تحلیل سازه ها

(تحلیل تنش و نیرو در سازه ها)

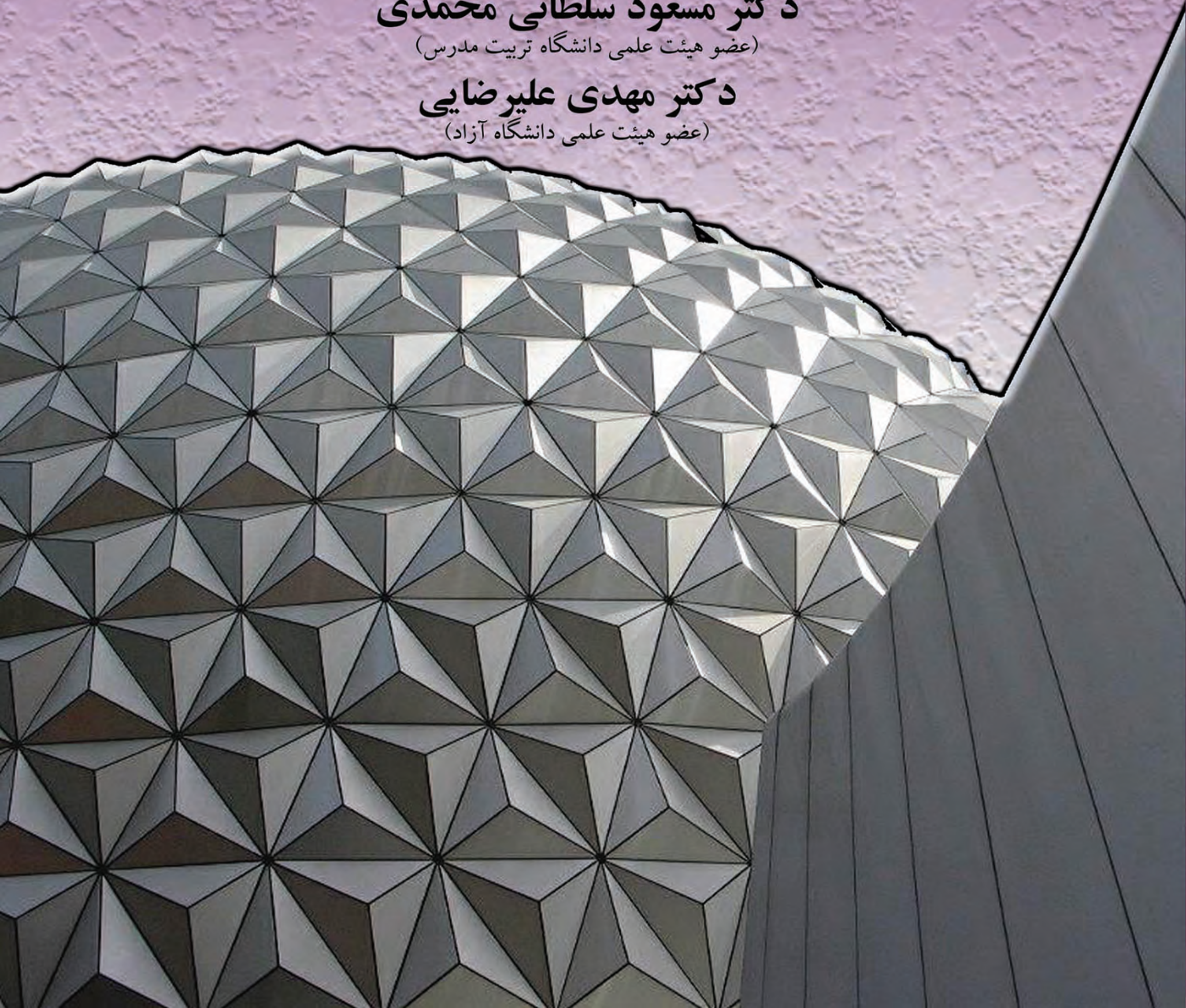
ترجمه و تدوین

دکتر مسعود سلطانی محمدی

(عضو هیئت علمی دانشگاه تربیت مدرس)

دکتر مهدی علیرضایی

(عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد)



پیشگفتار

شکر و سپاس خداوند یکتا را که این توفیق را به ما عطا کرد با ترجمه و تدوین این کتاب گامی هر چند ناچیز در جهت ادای وظیفه خود به جامعه علمی و دانشگاهی کشور برداریم. طراحی هر سازه‌ای در مهندسی نیازمند بررسی و تعیین بارهای وارده بر سازه و تحلیل نیروها و تعیین تنش‌ها و تغییرمکان‌های ایجاد شده در سازه است. از ویژگی‌های مهم تحلیل سازه‌ها قطعیت‌های موجود در آن و ارتباط تنگاتنگ آن با ریاضیات است. کتاب حاضر گام کوچکی در تحقق خواسته‌های فوق می‌باشد که امید است مورد توجه دانشجویان رشته مهندسی عمران قرار گیرد. متن اصلی در تدوین کتاب پیش رو، کتاب *Structural and Stress Analysis* تالیف دکتر *T.H.G Megson* است. در به کاربردن اصلاحات فنی فارسی سعی شده لغت معادل به زبان انگلیسی در پایین صفحه داده شود تا چنانچه اصطلاحی چندان گویا نبود، لغت معادل به زبان دیگر معنی را برساند و ضمناً با دانستن لغت لاتین، خواننده بتواند مطلب را در کتاب‌های مرجع انگلیسی جستجو کند. دریافت نظرات، پیشنهادات و رهنمون‌های همکاران محترم، دانشجویان گرامی و خوانندگان عزیز موجب امتنان است.

مسعود سلطانی محمدی – مهدی علیرضائی

پاییز ۱۳۸۷

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
فصل اول– مقدمه	۱
فصل دوم – اصول استاتیک	۱۲
فصل سوم – نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و پیچش	۳۸
فصل چهارم – تحلیل خرپاها	۸۱
فصل پنجم - کابل	۱۰۲
فصل ششم – قوس‌ها	۱۲۰
فصل هفتم –تنش و کرنش	۱۳۳
فصل هشتم – مشخصات مهندسی مواد	۱۸۴
فصل نهم – خمش در تیرها	۱۹۵
فصل دهم – برش در تیر	۲۵۳
فصل یازدهم– پیچش	۲۶۶
فصل دوازدهم – تیرهای مرکب	۳۰۰
فصل سیزدهم – خیز تیرها	۳۳۰
فصل چهاردهم – ترکیب تنش و کرنش	۳۹۵
فصل پانزدهم – روش‌های انرژی و کار مجازی	۴۴۶
فصل شانزدهم – تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی	۵۱۵
فصل هفدهم – روش تحلیل ماتریسی	۶۱۴

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

فصل هجدهم– تحلیل پلاستیک تیرها و قاب‌ها ۶۸۱
فصل نوزدهم – تئوری خط تسلیم دال‌ها ۷۲۰
فصل بیستم – خطوط تاثیر ۷۳۶
فصل بیست و یکم – ناپایداری سازه‌ها ۷۸۴
پیوست الف – خصوصیات هندسی مقاطع
پیوست ب – خیز تیرها

فصل اول

مقدمه

مکانیک بخش بزرگی از علوم مهندسی را در بر می‌گیرد. بخش اعظم مسائل مهندسی در ارتباط با نیروهایی هستند که به سیستم‌های مورد بحث اعمال می‌شود. به صورت کلی تمام نیروهای اعمالی به سیستم‌ها، تابعی از زمان می‌باشند. لیکن در بعضی مسائل کاربردی می‌توان آنها را بدون در نظر گرفتن فاکتور زمان بررسی نمود که در این حالت مسائل مورد بررسی ساده‌تر خواهند شد.

در فصل پیش روی به صورت اجمالی انواع سازه‌های مورد استفاده در مهندسی را معرفی می‌نماییم. برای وارد شدن به مسئله در ابتدای امر به عملکرد سازه‌ها مختلف خواهیم پرداخت و در ادامه در مورد انواع تکیه‌گاه‌ها و شکل‌های سازه‌ای بحث می‌کنیم.

۱-۱ عملکرد سازه‌ها[1]

عملکرد اصلی هر سازه‌ای تحمل بارهای وارد بر آن است. البته این امر به هدفی که سازه برای آن ساخته می‌شود بستگی دارد. در یک ساختمان چند طبقه با اسکلت فولادی، قاب‌های فولادی بایستی وزن پشت‌بام و کف طبقات را که شامل بارهای مرده و زنده می‌باشند را تحمل نمایند. همچنین این قاب‌ها باید قادر باشند تا بار ناشی از باد و زلزله را در هنگام وقوع آنها تحمل کرده و پایداری خود را حفظ نمایند. بام این ساختمان بایستی وزن برف و یا باد (بسته به میزان شیب آن) را حمل کند. دیوارهای خارجی در مواجه با بارهای باد بایستی قادر به تحمل آنها باشند. و در نهایت تمام این نیروها توسط قاب‌های فولادی به پی منتقل می‌شود.

انواع دیگر سازه‌ها نیز، بارهای گوناگون دیگری را تحمل می‌کنند. پل بایستی وزن عرشه و بارهای ناشی از رفت و آمد ماشین‌ها و عابرین پیاده را تحمل کند. سد بایستی قادر به تحمل بارهای ناشی از توده عظیم آب ذخیره شده در پشت خود باشد. یک دیوار حایل بایستی قادر به تحمل بارهای ناشی از رانش خاک در پشت خود باشد. همچنین مخازن

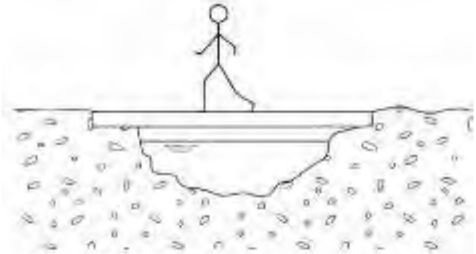
[1] Function of structures

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

ذخیره نفت و گاز نیز باید قادر به تحمل فشار داخلی ناشی از سیالات موجود در خود را باشند. دکل‌های فرستنده تلویزیونی معمولاً در مناطق با ارتفاع زیاد نصب می‌شوند. بنابراین باید قادر به حمل بارهای ناشی از باد و برف باشند.

۱-۲ شکل‌های سازه‌ای[1]

شکل سازه‌های طراحی شده به هدف، کاربری و مصالح استفاده شده در آنها بستگی دارد که طرح معماری و جنبه‌های زیبایی طرح نیز از جمله عوامل تاثیر گذار در روند طراحی هستند. یک آرشیتکت بسته به کاربری سازه شروع به طراحی سازه می‌کند تا به مسائل مربوطه پاسخ داده شود همچنین جنبه‌های اقتصادی طرح از جمله موارد مهم به شمار می‌آید. در روند تحلیل و طراحی، یک سازه به تعدادی المان کوچکتر تقسیم می‌شود. به عنوان مثال ممکن است از یک تیر به عنوان یک پل ساده مانند شکل ۱-۱ استفاده شود و همین تیر خود می‌تواند قسمتی از یک قاب باشد (شکل ۱-۲).

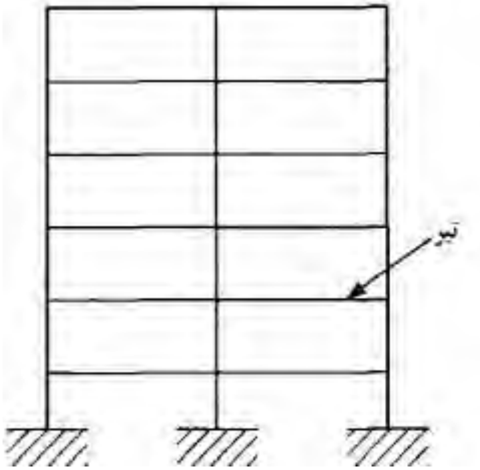


شکل ۱-۱ استفاده از تیر به عنوان یک پل ساده

[1] Structural Forms

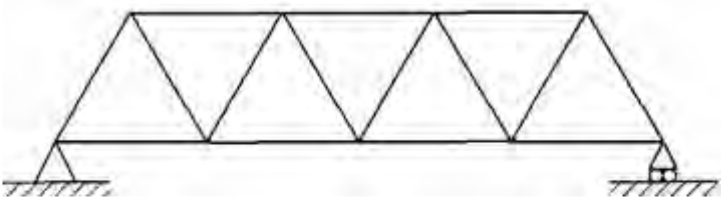
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱-۲ تیر به عنوان قسمتی از یک سازه

افزایش طول تیر برای پوشش دهانه‌های بلند معمولاً غیر اقتصادی است. برای دهانه‌های متوسط به جای تیر از خرپا استفاده می‌شود. خرپا بارهای اعمالی را به صورت بارهای محوری منتقل می‌کند. برای دهانه‌های بلندتر، از خرپا با ارتفاع بیشتر استفاده می‌شود. در شکل ۱-۳ یک خرپای *Warren* نمایش داده شده است که برای پوشش دادن پل‌ها استفاده می‌شود.



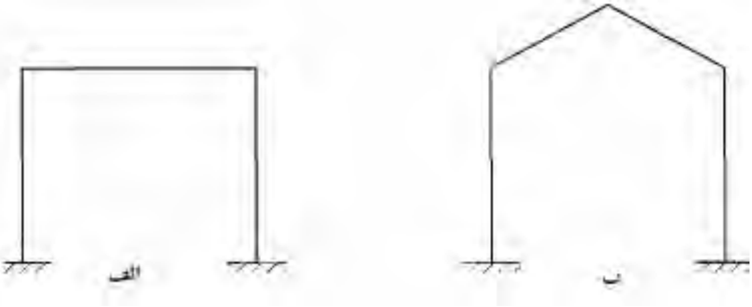
شکل ۱-۳ خرپای Warren

قاب پرتال[1] (شکل ۱-٤) نیز یکی از فرم‌های متداول در ساختمان‌های موجود می‌باشد که شامل تیر وستون‌هایی است که به صورت منظم آرایش یافته‌اند. قاب پرتال بارهای اعمالی را توسط اتصالات صلب خود تحمل می‌کند.

[1] Portal frame

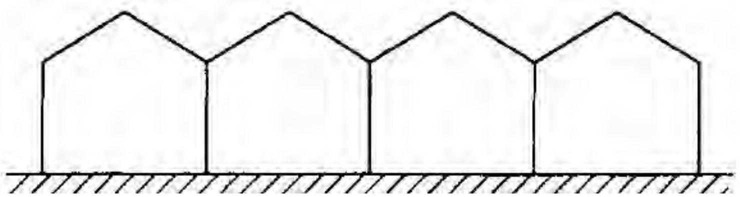
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱-٤ قاب پرتال

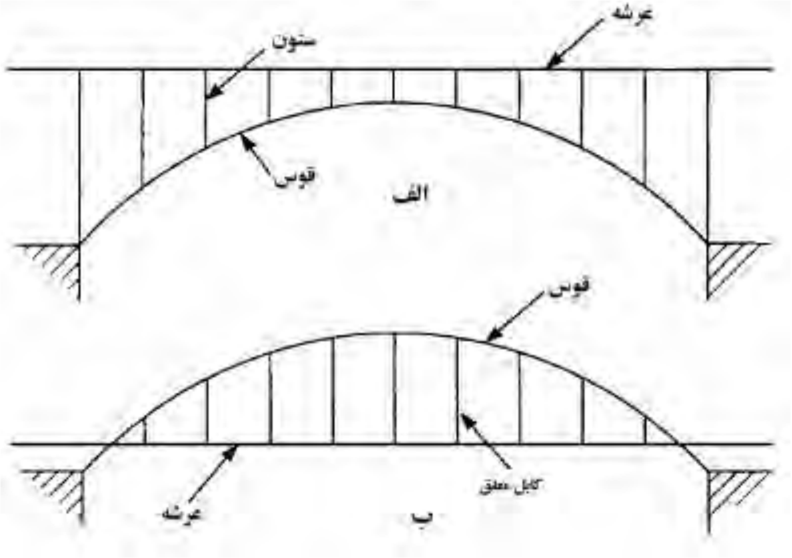
آرایش قاب نشان داده شده در شکل ۱-٤الف به صورتی است که از این قاب می‌توان به صورت تکراری در چند دهانه و چند طبقه استفاده شود (مانند شکل۱-۲) در حالی که قاب نشان داده شده در شکل ۱-٤ب معمولاً در ساختمان انبارها و کارخانه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد و به صورت یک طبقه ولی در چند دهانه قابل اجراست (شکل ۱-۵).



شکل ۱-۵ قاب یک طبقه و چند دهانه

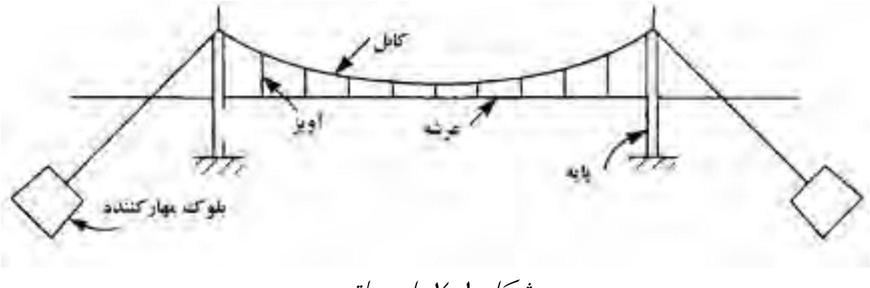
استفاده از خرپا برای پوشش دهانه‌های بلند غیر عملی می‌باشد و معمولاً در چنین مواردی از قوس استفاده می‌شود. شکل ۱-٦ دو نوع از این قوس‌ها را نشان می‌دهد.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل ۱-٦ قوس‌های استفاده شده در طراحی دهانه‌های بزرگ

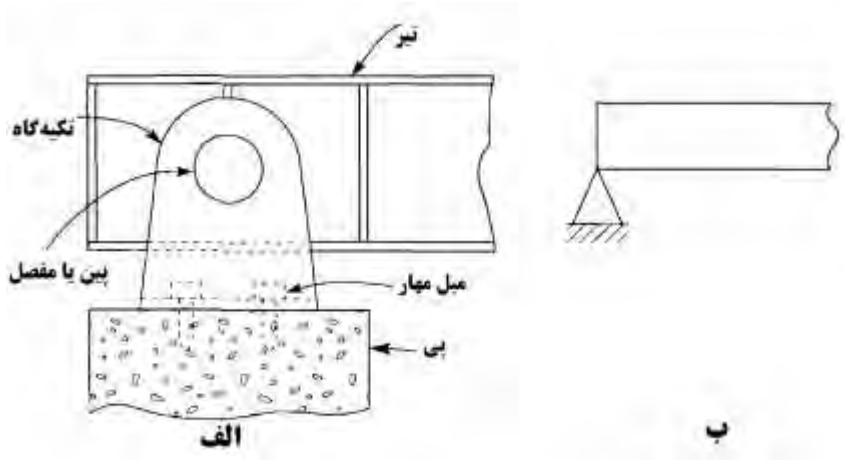
در شکل ۱-٦ب وزن عرشه پل توسط کابل‌های معلق حمل می‌شود. در این پل‌های معلق بیشتر بارها به صورت فشاری توسط قوس حمل می‌شوند، بنابراین در طراحی و اجرای این قوس‌ها از مصالح با تاب تحمل زیاد استفاده می‌شود. در طراحی قوس‌ها، شکل‌های مختلفی مانند سهمی، نیم‌دایره و خطی ممکن است مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تحمل و انتقال بار ناشی از کابل‌ها در این‌گونه سازه‌ها از بلوک‌های مهار کننده در دو طرف پل (مانند شکل ۱-۷) استفاده می‌شود.



شکل ۱-۷ پل معلق

۱-۳ سیستم‌های تکیه‌گاهی[1]

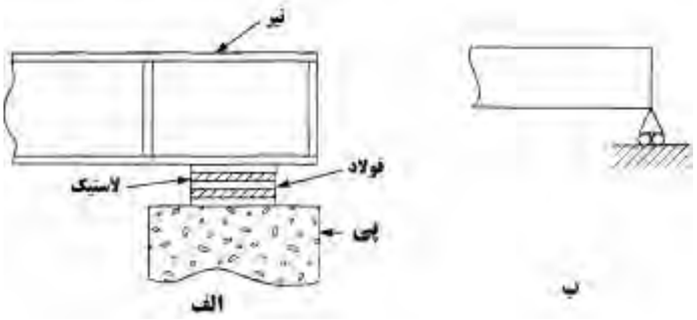
بارهای اعمالی به سازه بایستی توسط سازوکاری نهایتاً به پی و زمین منتقل شوند. در عمل رفتار تکیه‌گاه‌ها پیچیده می‌باشد؛ ولی برای انجام روند تحلیل می‌بایست آنها را به صورت ایده‌آل منظور نمود. در شکل ۱-۸الف تکیه‌گاه تیری نشان داده شده است که قادر به دوران حول محور عمود بر صفحه می‌باشد، ولی این تکیه‌گاه طوری اجرا شده که امکان حرکت افقی برای تیر متصل شده به آن را منتفی می‌سازد. نحوه نمایش این نوع تکیه‌گاه در شکل ۱-۸ب به صورت ایده‌آل، ارائه شده است. این نوع تکیه‌گاه را مفصلی می‌نامند.



شکل ۱-۸ شکل ایده‌آل شده تکیه‌گاه مفصلی

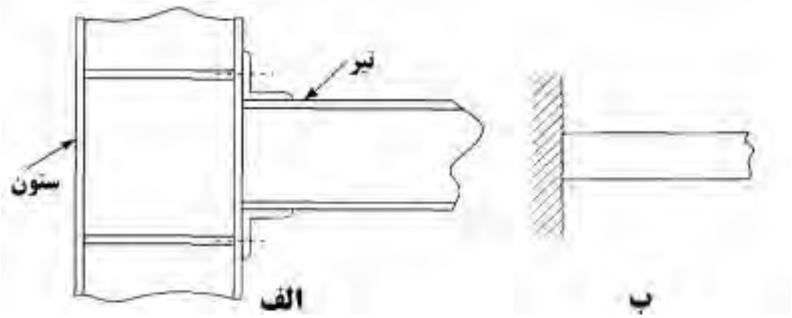
تیری که یک سمت آن با این تکیه‌گاه مهار شده است لازم نیست تا سمت دیگر نیز همین تکیه‌گاه را داشته باشد زیرا که این نوع تکیه‌گاه برای جلوگیری از حرکت افقی تیر کافی می‌باشد و تیر قادر به حرکت افقی نیست. در شکل ۱-۹ الف تکیه‌گاهی نشان داده شده که در آن از فولاد و لاستیک به صورت لایه‌لایه استفاده شده است. این نوع تکیه‌گاه قادر است در جهت افقی حرکت کند و تنها مانع حرکت تیر در جهت قائم می‌شود. در تحلیل این نوع تکیه‌گاه از شکل۱-۹ ب استفاده می‌شود. این نوع تکیه‌گاه به نام تکیه‌گاه غلتکی معروف است. این تکیه‌گاه دارای حرکت افقی و دوران حول محور عمود بر صفحه می‌باشد.

[1] Support systems



شکل۱-۹ شکل ایده‌ال شده تکیه‌گاه غلتکی

در بعضی از حالات مانند شکل۱-۱۰الف ممکن است تکیه‌گاه طوری باشد که از انتقال‌های افقی و قائم و همچنین از دوران تیر جلوگیری کند. این نوع تکیه‌گاه به نام تکیه‌گاه گیردار موسوم است و در شکل ۱-۱۰ب نحوه نمایش این نوع تکیه‌گاه به صورت ایده‌آل ارائه شده است.

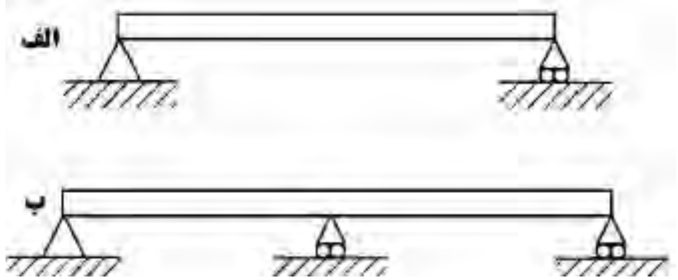


شکل ۱-۱۰ ایده‌آل شده تکیه‌گاه گیردار

در صورتی که یک تیر دارای یک تکیه‌گاه مفصلی و یک تکیه‌گاه غلتکی مانند شکل ۱-۱۱الف باشد، به آن تیر با تکیه‌گاه ساده گویند و در صورتی یک تیر دارای بیش از دو تکیه‌گاه غلتکی یا مفصلی باشد (شکل۱-۱۱ب) به آن تیر سراسری[1] گویند.

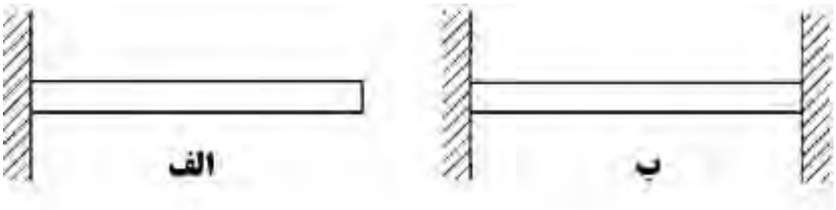
[1] continuous beam

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com



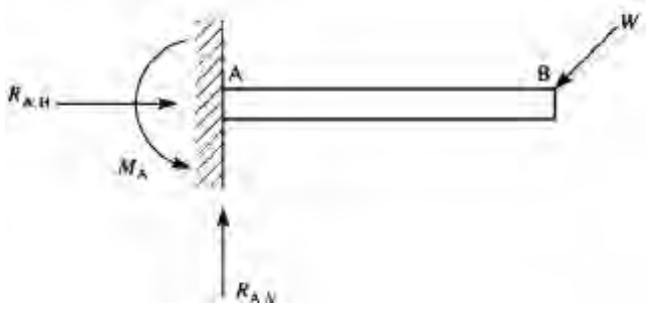
شکل ۱-۱۱ الف)تیر ساده ب)تیر سراسری

در صورتی که تیری مانند شکل۱-۱۲الف فقط از یک سمت دارای تکیه گیردار باشد به آن کنسول و در صورتی که در دو طرف خود مانند شکل ۱-۱۲ ب دارای تکیه‌گاه گیردار باشد به آن تیر دو سر گیردار گویند.



شکل ۱-۱۲ الف)تیر کنسول ب)تیر دو سر گیردار

هنگامی که نیرویی به یک تیر اعمال می‌شود، عکس‌العمل‌هایی در تکیه‌گاه‌های آن تیر ایجاد می‌شود که بدست آوردن این عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی اولین گام در حل اکثر مسائل می‌باشد. عکس‌العمل‌های ایجاد شده در اثر اعمال بار به نوع تکیه‌گاه بستگی دارد. بنابراین تکیه‌گاه‌ها با ایجاد نیروهایی از حرکت تیر در جهات مختلف جلوگیری می‌کنند. به عنوان مثال شکل ۱-۱۳ تیر کنسولی را که باری به اندازهW که با مولفه‌های افقی و قائم بر روی آن اعمال شده است نشان می‌دهد.



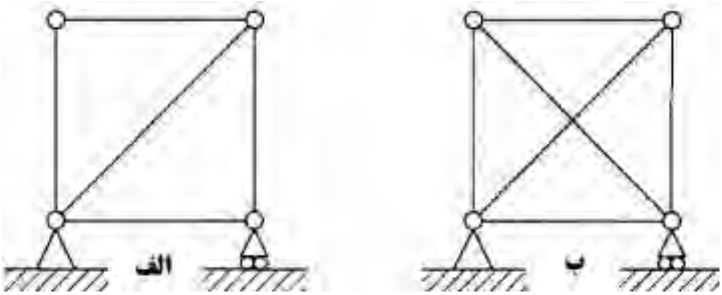
شکل۱-۱۳ تیرکنسول در معرض بار مورب

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

تحت اثر این بار، یک نیروی افقی به اندازه $R_{A.H}$ و یک نیروی قائم به اندازه $R_{A.V}$ در تکیه‌گاه A می‌شود تا از حرکت افقی و قائم تیر جلوگیری به عمل آید. همچنین باید یک لنگر به اندازه M_A در این تکیه‌گاه ایجاد شود تا از دوران تیر حول محور عمود بر آن جلوگیری نماید.

۱-۴ سازه‌های معین و نامعین استاتیکی[1]

در بسیاری از سازه‌ها تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به اندازه‌ای است که می‌توان با نوشتن معادلات تعادل استاتیکی (بخش ۲-۴ را ببینید) مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمود. این نوع سیستم‌ها، معین استاتیکی نامیده می‌شوند. در صورتی که تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و یا تعداد اعضا بیش از تعدادی باشد که با استفاده از معادلات تعادل قابل حل باشند، به این نوع، سیستم‌های نامعین استاتیکی یا سازهای هیپراستاتیک[2] گویند. شکل ۱-۱۴الف یک خرپا را نشان می‌دهد که تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و تعداد اعضای آن به اندازه‌ای است که می‌توان با استفاده از معادلات تعادل آن را تحلیل نمود. اما در شکل ۱-۱۴ب تعداد مجهولات بیش از تعداد معادلات تعادل در صفحه می‌باشد.



شکل ۱-۱۴ الف)خرپای معین ب)خرپای نامعین

۱-۵ تحیل و طراحی[3]

بعضی از دانشجویان در ابتدای برخورد با مفهوم تحلیل و طراحی دچار ابهام می‌شوند. بعد از روند طراحی اولیه و شکل معماری طرح، نوبت به مرحله تحلیل سازه برای بدست

[1] Statically determinate and indeterminate structures
[2] Hyperstatic systems
[3] Analysis and design

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

آوردن نیروهای داخلی آن می‌شود. در این مرحله باید نیروها و بارهایی که آن سازه در طی مدت بهره‌برداری با آنها مواجه خواهد شد را بدست آورده و به سازه اعمال نمود تا نیروهای ایجاد شده در سازه تحت این بارهای اعمالی را مورد بررسی قرار داد. به عنوان مثال فرض کنید با یک ساختمان طبقاتی مسکونی مواجه هستیم. در ابتدا با حدس اولیه، یک سری مقاطع برای این سازه در نظر گرفته می‌شود. بارهایی که سازه در طی مدت بهره‌برداری با آن مواجه خواهد شد، شناسایی و به سازه اعمال می‌شود. از جمله بارهایی که به هر سازه‌ای اثر می‌کند، وزن اجزای مرده ساختمان است. بار مرده شامل وزن اجزایی است که به صورت دائمی با سازه باقی می‌مانند. وزن خود سازه، وزن کف سازی و وزن دیوارهای خارجی از جمله بارهای مرده به شمار می‌آیند. بارهای زنده عبارت است از بارهای غیردائمی که در حین استفاده و بهره‌برداری از ساختمان به آن وارد می‌شود. این بارها شامل بار برف و زلزله نمی‌شود. این بارها به سازه اثر داده شده و پاسخ سازه به این بارها بررسی می‌شود. این مرحله را تحلیل سازه گویند. در اثر بارهای اعمالی تنش‌ها و کرنش‌هایی در اعضای سازه ایجاد می‌شود، مرحله طراحی شامل تعیین مقاطعی برای اعضای باربر سازه می‌باشند، به صورتی که کفایت تحمل این تنش‌های ایجاد شده را داشته باشند.

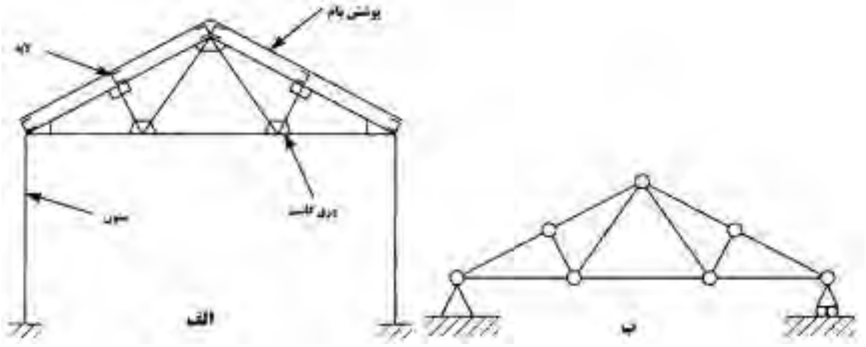
۱-۶ ایده‌آل سازی سازه[1]

به طور کلی سازه‌ها دارای پیچیدگی‌های فراوانی هستند که برای تحلیل بایستی به صورت ایده‌ال در آورده شوند. این ایده‌ال سازی به دقت مسئله همچون تعداد درجات آزادی آن بستگی دارد. یکی از عواملی مهمی که در ایده‌آل سازی باید به آن توجه نمود، نحوه اعمال بارهای وارده به سازه است. به عنوان مثال شکل ۱-۱۵الف خرپای سقف متکی بر دو ستون را نشان می‌دهد. وزن پوشش روی سقف توسط لاپه‌هایی[2] به محل اتصال اعضای خرپا منتقل می‌شود. در شکل ۱-۱۵ب نحوه نمایش ایده‌آل این خرپا برای تحلیل ارائه شده است.

[1] Structural idealization

[2] Purlins

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱-۱۵ الف)سازه واقعی ب) سازه ایده‌آل شده

در سازه واقعی اعضای خرپا توسط جوش[1] و توسط ورق‌ها اتصال (ورق گاست[2]) به یکدیگر متصل هستند. در این حالت در صورتی که اعضا و اتصالات آنها به گونه‌ای اجرا شوند که راستای نیروی ایجاد شده در آنها کاملاً در یک نقطه همدیگر را قطع نمایند، اتصال از نوع مفصلی خواهد بود. با چنین فرضی در شکل ۱-۱۵ب اتصالات به صورت مفصلی مدل شده‌اند. همچنین اتصال خرپا به ستون‌ها با دو تکیه‌گاه مفصلی و غلتکی تخمین زده شده است. سازه بالا یک سازه ساده بود. در صورتی که بخواهیم سازه‌های پیچیده‌تری مانند ورق‌های پوشش بام و یا یک دیوار برشی را بررسی کنیم بایستی آن را به تعداد زیادی المان که توسط گره‌هایی با هم در ارتباط هستند مدل سازی نمود. این نوع مدل سازی را روش المان محدود[3] گویند که یکی از روش‌های دقیق و پر کاربرد در نرم‌افزارهای تجاری تحلیل سازه‌ها است.

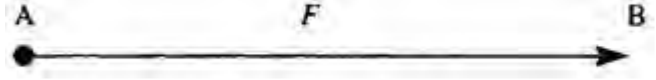
[1] Welded
[2] Gusset plates
[3] Finite Element Method (FEM)

فصل دوم
اصول استاتیک

استاتیک مطالعه اجسام ایستا و یا به عبارتی مطالعه اجسام در حال تعادل در زیر بارهای اعمال شده به سیستم است. در تحلیل استاتیکی سازه‌ها تمام قسمت‌های سازه‌ها در حال سکون هستند و معادلات تعادل برای آنها قابل استفاده است. در این فصل ما به اصول استاتیکی که برای روند تحلیل به آنها نیاز داریم، اشاره خواهیم داشت.

۲-۱ نیرو[1]

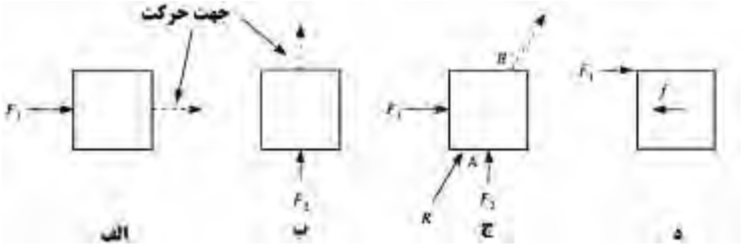
در تعریف نیرو از قانون اول نیوتن استفاده می‌کنیم که بیان می‌کند: ذره در حال سکون خواهد ماند و یا به حرکت مستقیم الخط خود با سرعت یکنواخت ادامه خواهد داد، اگر هیچ نیروی نامتوازنی بر آن اثر نکند. نیرو باعث تغییر در حرکت خواهد شد و علت کاهش یا افزایش سرعت است. ما در زندگی روزمره با نیروهای زیادی سروکار داریم. نیروی گرانشی زمین باعث کشیده شدن اجسام به سمت زمین و به صورت قائم می‌شود. نیروهای ایجاد شده در اثر باد باعث هل دادن و یا کشیده شدن اجسام و سازه‌ها به صورت افقی می‌شود. نیروها دارای جهات و مقادیر متغیری هستند. اثر یک نیرو به جهت اعمال شده آن بستگی دارد. به عنوان مثال با کشیدن و هل دادن یک در به صورت افقی و در لبه‌های آزاد آن، باز یا بسته خواهد شد. در صورتی که این نیرو در جهت قائم و موازی با لولای آن اعمال شود، در نه بسته و نه باز خواهد شد. بنابراین بزرگی و جهت نیرو از جمله مشخصات مهم نیروها به شمار می‌آیند. نیروها را می‌توان به صورت گرافیکی مانند شکل۲-۱ توسط یک بردار بیان نمود. در این شکل نیروی F به ذره بینهایت کوچکA اعمال شده است و جهت اعمال نیروی F از چپ به راست می‌باشد.



شکل ۲-۱ نمایش یک نیرو توسط بردار

[1] Force

بزرگی نیروی F را می‌توان توسط ترسیم آن با مقیاس درست بیان کرد، یعنی طول AB نمایش دهنده بزرگی آن است و جهت آن را با پیکان روی آن بیان می‌کنند. در علامت‌گذاری بردار F، آن را با حرف بزرگ $\mathbf{F}$ نمایش می‌دهند. حال یک مکعب مانند شکل۲-۲ الف در نظر بگیرید که نیروی F_1 بر آن به صورت نشان داده شده در شکل در جهت چپ به راست اعمال می‌شود. در صورتی که این نیرو از مقدار اصطکاک بین مکعب و سطح روی آن بیشتر باشد، مکعب به حرکت در خواهد آمد. به طور مشابه در صورتی که نیروی F_2 در جهت نشان داده شده در شکل ۲-۲ ب به سطح اعمال شود، مکعب در جهت نیروی F_2 حرکت خواهد نمود.



شکل۲-۲ عمل یک نیرو بر روی مکعب

چنین استنباط می‌شود که در صورتی که نیروی F_1 و F_2 با هم و در یک زمان به این مکعب وارد شوند مانند شکل ۲-۲ج حرکت مکعب به صورت شیب‌دار خواهد بود که در شکل به جای نیروی F_1 و F_2 می‌توان با نیروی R نشان داد. نیروی R منتجه[1] یا برآیند نیروهای F_1 و F_2 است. توجه داشته باشید که امتداد نیروهای F_1 و F_2 و R از مرکز سطح مکعب می‌گذرد. در صورتی که این اتفاق نیفتد و مانند شکل ۲-۲ د نیروی F_1 به یکی از گوشه‌های مکعب وارد شود، نیروی حاصل از اصطکاک f در مرکز سطح مکعب (دید از بالا) به وجود خواهد آمد و این دو نیرو تشکیل یک کوپل چرخشی را می‌دهند و نهایتاً علاوه بر حرکت جانبی ایجاد شده باعث دوران مکعب نیز خواهد شد. برای کسب اطلاعات بیشتر در این زمینه بخش ۲-۲ را ببینید.

تا وقتی که مکعب به صورت صلب باشد، نیروی R می‌تواند بر نقطه A و یا بر نقطه B اثر کند. بنابراین وقتی نیرویی به یک جسم صلب اعمال می‌شود جسم را در امتداد نیرو

[1] Resultant

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

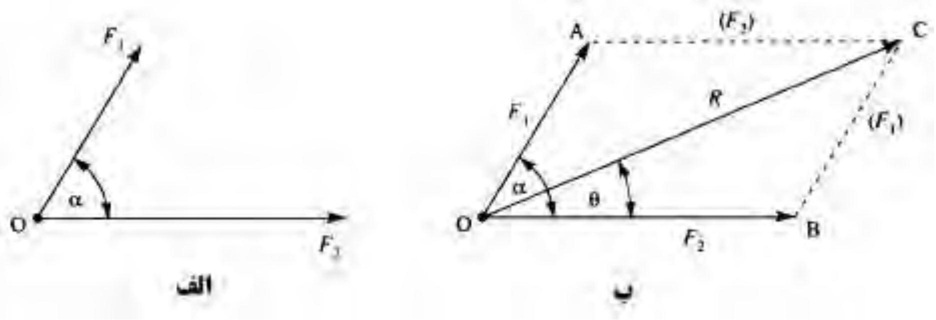
می‌تواند جابجا نماید. این اصل قابلیت انتقال[1] برای نیروهای اعمال شده به اجسام صلب است.

متوازی الاضلاع نیروها[2]

برآیند دو نیروی هم صفحه[3] که در یک نقطه واحد مانند شکل ۲-۳ الف اثر می‌کنند را می‌توان توسط قانون متوازی الاضلاع که به صورت زیر بیان می‌شود بدست آورد:

در صورتی که دو نیرو به یک نقطه مشترک اعمال شوند به طوری که هر کدام از این نیروها یکی از اضلاع متوازی الاضلاع باشند که از ترسیم امتداد نیروها حاصل شود، برآیند دو نیروی اعمال شده با طول قطر اصلی متوازی الاضلاع برابر است.

بنابراین در شکل ۲-۳ب R برآیند نیروهای F_1 و F_2 است. این نتایج را می‌توان به راحتی توسط آزمایشات تجربی و یا با استفاده از قانون جمع بردارها اثبات نمود.



شکل ۲-۳ برآیند دو نیرو

بنابراین در شکل ۲-۳ ب ضلع BC متوازی الاضلاع معادل بزرگی و جهت نیروی F_1 است که با ضلع OA نمایش داده شده است. بنابراین

$$R = F_2 + F_1$$

همچنین این نتیجه را می‌توان با مساوی قرار دادن ضلع AC متوازی الاضلاع و اندازه نیروی F_2 بدست آورد.

$$R = F_1 + F_2$$

[1] Transmissibility
[2] Parallelogram of forces
[3] Coplanar

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

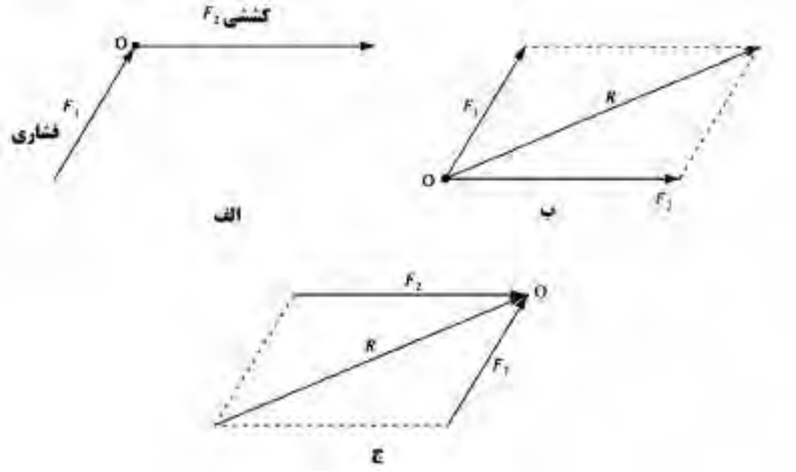
در صورتی که به صورت ترسیمی بخواهیم مقدار برآیند را نشان دهیم، نیروهای F_1 و F_2 بایستی با مقیاس ترسیم شوند. مثلث OBC که توسط ترسیم قطر OC حاصل شده است نمایش دهنده برآیند نیروها است. مقدار R و θ را می‌توان با استفاده از روابط مثلثاتی بدست آورد:

$$R^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha \tag{۲-۱}$$

و

$$\tan\theta = \frac{F_1\sin\alpha}{F_2 + F_1\cos\alpha} \tag{۲-۲}$$

در شکل ۲-۳الف هر دو نیروی F_1 و F_2 از نقطه O کشیده شده‌اند و هر دو نیرو تمایل به کشیدن نقطه O دارند. در شکل ۲-٤الف نیروی F_1 تمایل به فشار دادن نقطه O دارد، در حالی که نیروی F_2 تمایل به کشیدن نقطه O دارد و جهت پیکان از نقطه دور می‌شود. برای استفاده از قانون متوازی الاضلاع، بایستی دو ابتدا یا انتهای دو نیرو بر روی یک نقطه باشد. در شکل ۲-٤ب هر دو نیرو تمایل به کشیدن نقطه O دارند. در حالی که در شکل ۲-٤ج دو نیرو تمایل به فشار دادن نقطه O دارند.



شکل ۲-٤ حالات مختلف اعمال نیرو به سیستم

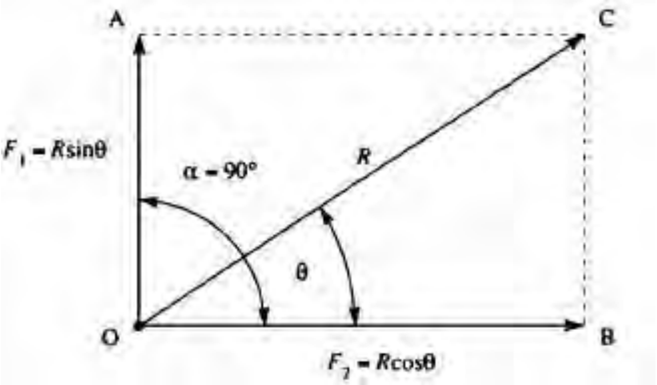
اثر هر سه سیستم نشان داده شده در بالا یکسان می‌باشند. دیدیم که در صورتی که برآیند دو نیرو که به صورت همزمان اعمال می‌شوند را بدست آوریم، معادل دو نیرو است و می‌توان به جای نیروهای F_1 و F_2 برآیند آنها را قرار دهیم. برعکس این قضیه نیز صادق

است و می‌توان نیروی R که برآیند است را با دو نیروی F_1 و F_2 جایگزین کرد. نیروهای F_1 و F_2 مولفه‌های بردار R در جهت‌های OA وOB هستند و R را می‌توان دوباره از نیروهای F_1 و F_2 بدست آورد. در این حالت در صورتی که $\alpha = 90^\circ$ باشد(شکل۲-۳ب) و با توجه به شکل۲-۵ داریم:

$$F_2 = R\cos\theta \quad , \quad F_1 = R\sin\theta \qquad (۲-۳)$$

بنابراین با توجه به شکل ۲-۵ یا معادله ۲-۱ و ۲-۲ داریم:

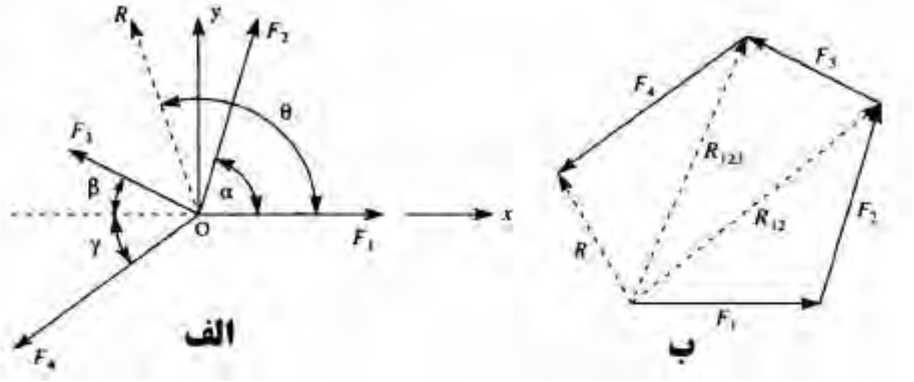
$$R = F_1^2 + F_2^2 \quad , \quad \tan\theta = \frac{F_1}{F_2} \qquad (۲-٤)$$



شکل ۲-۵ تجزیه نیرو به دو مولفه متعامد

برآیند سیستم شامل چند نیروی همزمان

در اینجا بر روی سیستمی بحث می‌کنیم که چند نیرو به صورت همزمان بر یک سیستم اعمال می‌شوند. برای بدست آوردن برآیند این نیروها می‌توانیم از نتایج مرحله قبل استفاده کنیم. برای بدست آورن برآیند با توجه به شکل ۲-٦الف می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم. شکل ۲-٦ب دیاگرام بردارها را نشان می‌دهد.



شکل ۲-٦ برآیند سیستم نیروها

با توجه به دیاگرام ترسیم شده داریم:

$$R_{12} = F_1 + F_2$$

که R_{12} برآیند نیروهای F_1 و F_2 است. بعلاوه

$$R_{123} = R_{12} + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

که R_{123} برآیند نیروهای F_1 و F_2 و F_3 می‌باشد. در نهایت

$$R = R_{123} + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

که R برآیند نیروهای F_1 و F_2 و F_3 و F_4 می‌باشد.

جهت و مقدار واقعی نیروی R را می‌توان توسط ترسیم بردارها به صورت شکل ۱-٦ب و یا با تجزیه نیروها به دو مولفه متعامد در جهت‌های x و y بدست آورد. توجه شود در صورتی که بخواهیم برآیند را به صورت ترسیمی بدست آوریم باید در هنگام ترسیم، آنها را با مقیاس ترسیم کنیم. حال اگر برآیند را از روش تجزیه نیروها بخواهیم بدست آوریم:

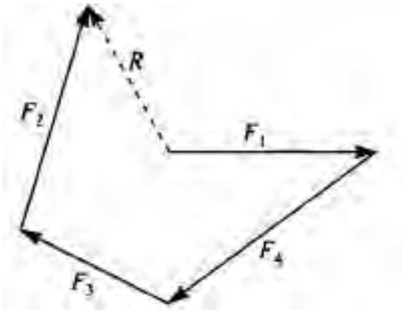
$$F_x = F_1 + F_2 \cos\alpha - F_3 \cos\beta - F_4 \cos\gamma$$
$$F_y = F_2 \sin\alpha + F_3 \sin\beta - F_4 \sin\gamma$$

بنابراین

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad \Rightarrow \quad \tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

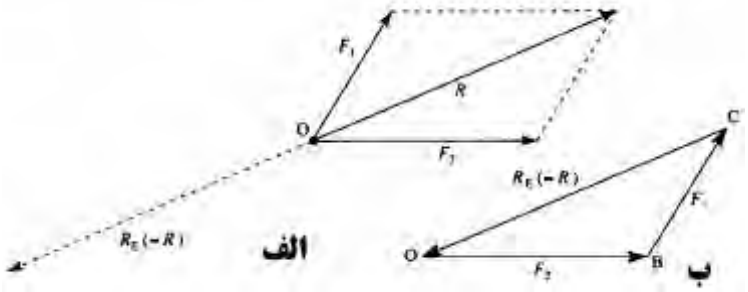
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

برآیند نیروهای F_1 و F_2 و F_3 و F_4 که از روش ترسیمی بدست می‌آیند با برآیند بدست آمده از روش تجزیه نیروها یکسان می‌باشد. برآیند نیروهای F_1 و F_2 و F_3 و F_4 در شکل ۲-۷ به صورت ترسیمی نشان داده شده است.



شکل ۲-۷ تعیین برآیند نیروها به روش ترسیمی

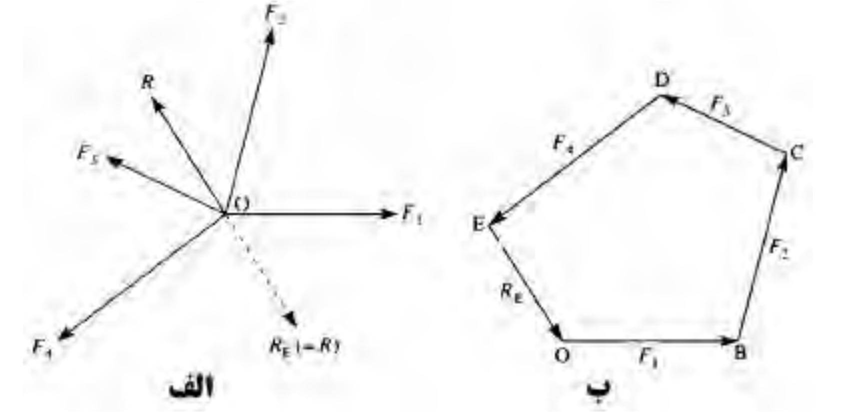
در شکل ۲-۳ب برآیند نیروهای F_1 و F_2 اعمال شده به نقطه O بدست آمد. این برآیند ممکن است با R_E که در واقع بردار قرینه برآیند R است نشان داده شود که مانند شکل۲-۸ دارای جهتی عکس ولی مقداری مساوی و برابر بردار برآیند R است. بردار R_E بردار برآیند نیروهای F_1 و F_2است.



شکل ۲-۸ برآیند دو نیرو

حال با توجه به مثلث تشکیل شده در شکل ۲-۸ب می‌توانیم بگوییم برآیند دو نیرو که به صورت ترسیمی نشان داده شده است برابر است با یک بردار که انتهای آخرین بردار را به ابتدای اولین بردار وصل می‌کند. با استفاده از این قانون می‌توان برآیند دو نیروی را که به صورت ترسیمی نشان داده شده‌اند به راحتی بدست آورد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

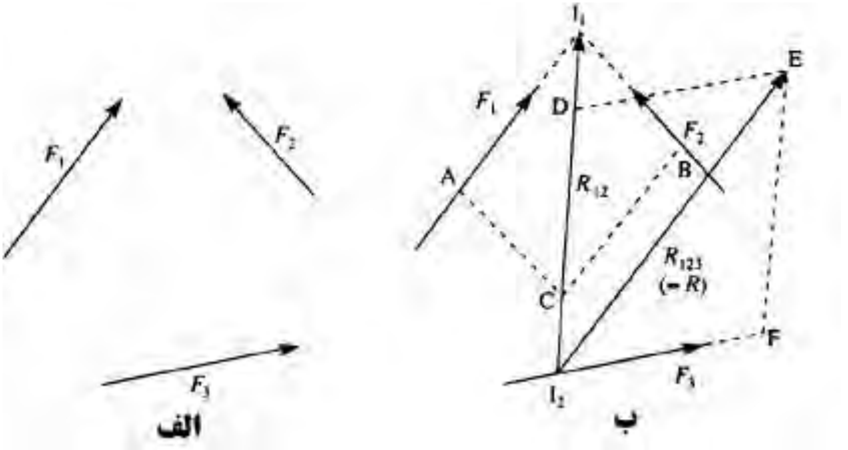


شکل ۲-۹ برآیند نیروها

شکل ۲-۹الف سیستمی شامل نیروهای F_1 ، F_2 ، F_3 و F_4 را نشان می‌دهد. برای بدست آوردن برآیند این نیروها (R) با توجه به شکل ۲-۹ب تمام نیروها یکی پس از دیگری پشت سر هم و با همان مقیاس و جهت اولیه کشیده شده است. برآیند نیروهای F_1 و F_2 و F_3 و F_4 با ترسیم برداری از انتهای آخرین بردار به ابتدای اولین بردار حاصل می‌شود.

برآیند نیروهای نامتقاطع (واگرا)

در بسیاری از سیستم‌های سازه‌ای خط اثر نیروهای وارده در یک نقطه به یکدیگر نمی‌رسند. به این نوع نیروها، نامتقاطع گویند.



شکل ۲-۱۰ سیستم نیروهای نامتقارن

در شکل ۲-۱۰ یک سیستم نامتقاطع نشان داده شده است. برای بدست آورن برآیند نیروهای F_1 و F_2 امتداد این دو نیرو را ادامه داده‌ایم تا در نقطه I_1 یکدیگر را قطع کنند. بردار R_{12} بیانگر برآیند نیروهای F_1 و F_2 میباشد که در امتداد ضلع CI_1 قرار دارد. ضلع AI_1 بیانگر نیروی F_1 و ضلع BI_1 بیانگر نیروی F_2 می‌باشد. حال برآیند نیروهای R_{12} و F_3 را بدست می‌آوریم. امتداد این دو نیرو یکدیگر را در نقطه I_2 قطع می‌کنند. ضلع I_2F بیانگر نیروی F_3 و ضلع I_2D بیانگر نیروی R_{12} می‌باشد. حال با استفاده از قانون متوازی الاضلاع برآیند دو نیرو را با ترسیم قطر متوازی الاضلاع I_2FED بدست می‌آوریم. در صورتی که بخواهیم برآیند نیروها را توسط عمل تجزیه آنها بدست آوریم بایستی هر یک از نیروها را به دو مولفه متعامد تجزیه کرده و مولفه‌های در جهت x را با هم و مولفه‌های در جهت y را نیز با هم جمع نماییم. و برآیند این آثار توسط رابطه زیر حاصل می‌شود.

$$R = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

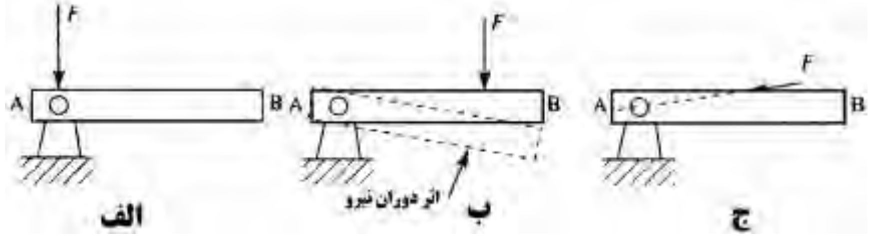
همچنین زاویه برآیند نیروها با محور x نیز از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

۲-۲ گشتاور حاصل از یک نیرو

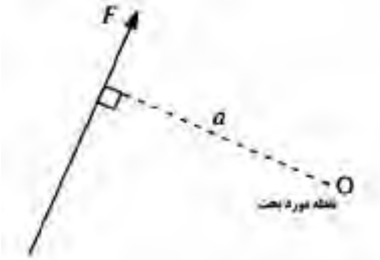
تا کنون تنها اثر انتقالی نیروها را بررسی کردیم ولی ممکن است یک نیرو علاوه بر اثر انتقالی، تمایل داشته باشد که یک جسم را حول یک محور دوران دهد. در شکل۲-۱۱الف میله بی وزن AB نشان داده شده است که نیروی F بر روی مفصل اعمال می‌شود. در این حالت نیروی F قادر به دوران میله AB نیست. اما در شکل ۲-۱۱ب نیروی F را کمی به سمت چپ انتقال داده‌ایم. در این حالت نیرو تمایل دارد که میله را حول تکیه‌گاه مفصلی دوران دهد. این تمایل را گشتاور می‌نامند و میزان این گشتاور به فاصله نیروی F تا مفصل و بزرگی این نیرو بستگی دارد. دیده می‌شود که هر چه فاصله نیروی F از نقطه A بیشتر می‌شود این تمایل نیز افزایش می‌یابد. مقدار گشتاور تولید شده در اثر نیرو برابر است با:

$$M = Fa \qquad (۲-۵)$$



شکل ۲-۱۱ اثر دوران نیرو

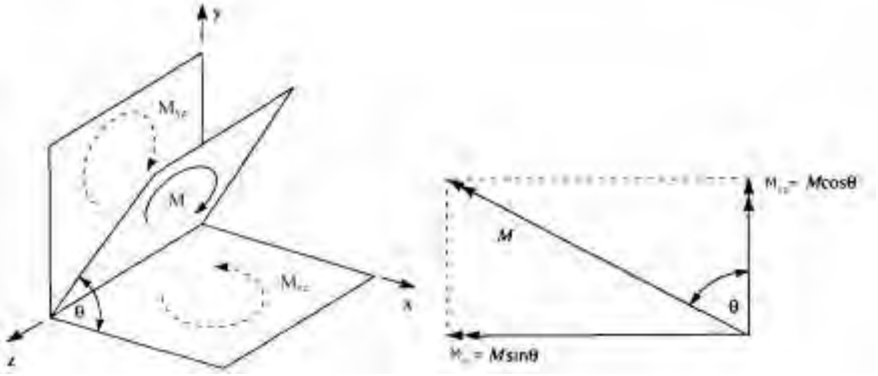
که a بازوی نیرو F می‌باشد. برای بدست آوردن بازوی نیرو، ابتدا امتداد نیرو را ترسیم کرده و از نقطه‌ای که می‌خواهیم گشتاور بگیریم یک خط بر امتداد نیرو عمود می‌نماییم. طول این خط همان بازوی گشتاور است. به عنوان مثال در شکل ۲-۱۲ در صورتی که بخواهیم گشتاور ایجاد شده در اثر اعمال نیروی F را حول نقطه O بدست آوریم، بازوی گشتاورگیری خطی است که نقطه O را به امتداد نیرو متصل می‌کند.



شکل ۲-۱۲ گشتاور ایجاد شده در اثر نیروی F

گشتاورها (لنگر) را نیز مثل نیروها می‌توان به مولفه‌های متعامد تجزیه کرد. در شکل ۲-۱۳الف گشتاور M در یک صفحه‌ای قرار گرفته است که با صفحه xz زاویه θ می‌سازد. این گشتاور را می‌توان به دو مولفه بر روی صفحه‌های yz و xz تجزیه نمود. در شکل ۲-۱۳ب روند کار نشان داده شده است. تجزیه گشتاورها نیز از همان قانون تجزیه نیروها پیروی می‌کند.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

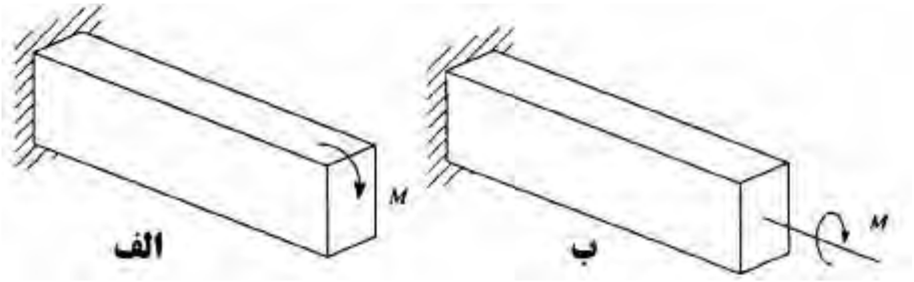


شکل ۲-۱۳ تجزیه گشتاور

$$M_{xz} = M\cos\theta$$

$$M_{yz} = M\sin\theta$$

در سازه‌ها، اثری که گشتاورها بر روی سازه‌ها ایجاد می‌کنند به صفحه اعمالی آنها بستگی دارد. به عنوان مثال در شکل ۲-۱٤ الف گشتاور اعمال شده به تیر تمایل به دوران تیر حول محور طولی آن را دارد و باعث ایجاد خمش در تیر می‌شود در حالی که گشتاور اعمال شده به تیر نشان داده شده در شکل ۲-۱٤ب تمایل به پیچش تیر دارد.

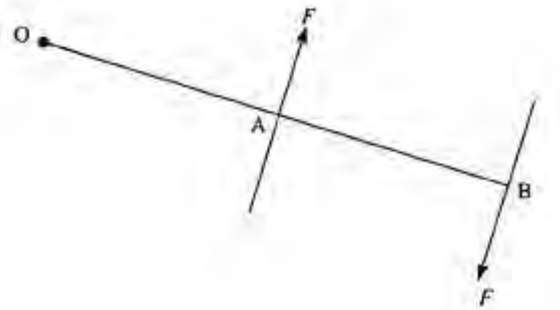


شکل ۲-۱٤ عمل مختلف لنگرها در صفحه‌های مختلف

جفت نیرو

شکل ۲-۱۵ را در نظر بگیرید که دو نیروی به اندازه F موازی ولی مخالف یکدیگر بر یک سیستم وارد می‌شوند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۲-۱۵ گشتاور حاصل از کوپل نیرو

گشتاور ایجاد شده در اثر این نیروها حول نقطه O برابر است با:

$$M_O = F \times BO - F \times AO$$

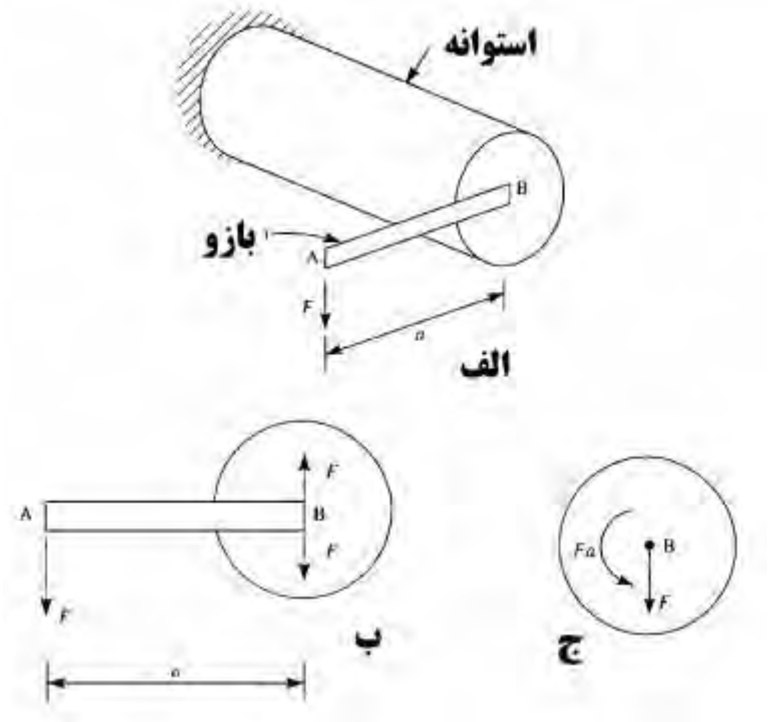
در حالی که خط OAB عمود بر امتداد دو نیرو است:

$$M_O = F(BO - AO) = F \times AB$$

دیده می‌شود که مجموع گشتاورهای دو نیرو حول نقطه O معادل است با اینکه یکی از نیروها را در فاصله مابین این دو نیرو ضرب نماییم.

سیستم نیروهای معادل

در بسیاری از سازه‌ها می‌توان نیروهای اعمال شده را با اثرشان جایگزین کرد. به عنوان مثال در شکل ۲-۱۶الف یک استوانه که از یک طرف به دیوار و از سمت دیگر آزاد است و همانطور که دیده می‌شود در انتهای خود دارای بازویی به طول a می‌باشد و در انتهای این بازو نیرویی به اندازه F بر آن اعمال می‌شود. در شکل ۲-۱۶ب دو نیرو که هر دو به اندازهF ولی مختلف الجهت می‌باشند به شکل اضافه شده است. البته اضافه شدن این دو نیرو تاثیری بر رفتار آن ندارد زیرا که این دو نیرو چون مخالف یکدیگر هستند ذاتاً خنثی می‌باشند. نیروی F گذاشته شده در مرکز استوانه دارای جهت پایین به بالا می‌باشد و با نیروی موجود در بازو که دارای جهت بالا به پایین می‌باشد تشکیل یک جفت نیرو می‌دهند و می‌توانیم به جای این دو نیرو گشتاور حاصل از آنها را جایگزین نماییم. در شکل ۲-۱۶ج این جایگزینی نشان داده شده است و به جای این دو نیرو گشتاور حاصله که برابر Fa میباشد جایگزین شده است.



شکل ۲-۱٦ نیروهای معادل

۲-۳ برآیند در سیستم نیروهای موازی

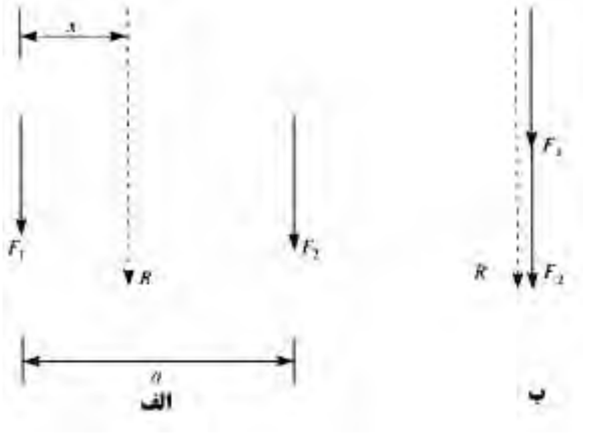
گاهی چند نیرو با یکدیگر موازی هستند. شکل ۲-۱۷الف نمونه‌ای از این حالت را نشان می‌دهد. نیروهای F_1 وF_2 با هم موازی می‌باشند و در بینهایت به یکدیگر می‌رسند. در این حالت استثنا، برآیند نیروها حاصل جمع آنها می‌باشد.

$$R = F_1 + F_2 \qquad (۲-٦)$$

مکان و جهت نیروی برآیند R را می‌توان با گشتاور گیری حول یک نقطه دلخواه تعیین نمود. به عنوان مثال با توجه به شکل ۲-۱۷الف و با گشتاور گیری حول محوری که از امتداد نیروی F_1 میگذرد داریم:

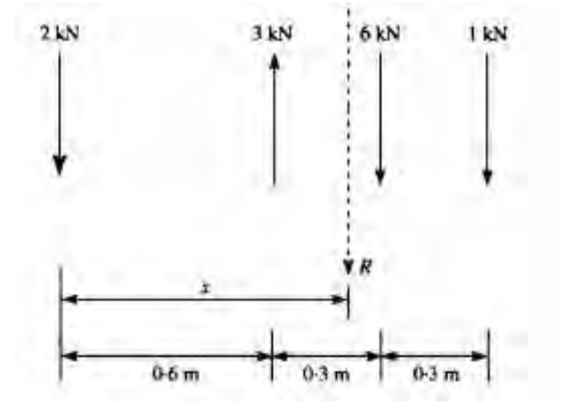
$$F_2 a = Rx = (F_1 + F_2)x$$

$$x = \frac{F_2}{F_1 + F_2} a \qquad (۲-۷)$$



شکل ۲-۱۷ برآینده سیستم نیروهای موازی

مثال۲-۱) با توجه به شکل ۲-۱۸ مقدار برآیند و مکان آن را برای سیستم نشان داده شده پیدا کنید.



شکل ۲-۱۸ سیستم نیروهای مثال ۱-۲

حل) در این حالت که تمام نیروها موازی یکدیگر هستند برآیند براحتی با جمع جبری آنها بدست می‌آید

$$R = 2 - 3 + 6 + 1 = 6kN$$

حال با توجه به شکل فرض کنید که برآیند نیروها به اندازه $6kN$ و فاصله x از بر نیروی $2kN$ اثر می‌کند، با گشتاور گیری حول محوری که از این نیرو می‌گذرد فاصله x بدست می‌آید.

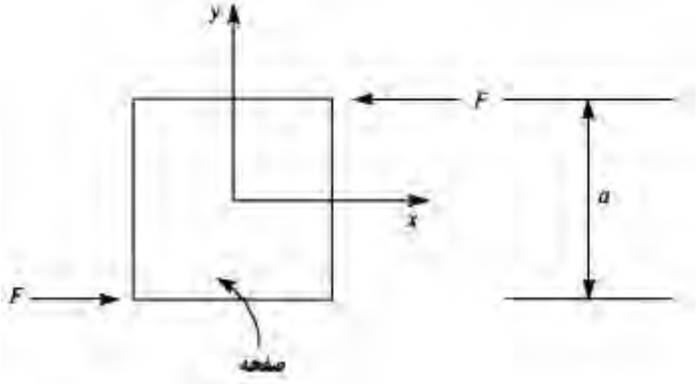
$$Rx = -3 \times 0.6 + 6 \times 0.9 + 1 \times 1.2$$

حال با جایگزینی R از معادله بالا خواهیم داشت:

$$6x = -1.8 + 5.4 + 1.2 \quad \Rightarrow \quad x = 0.8m$$

۲-۴ معادلات تعادل سیستم

در بحث ایستایی عمدتاً با بیان شرایط نیرو سروکار داریم که برای تامین حالت تعادل سازه‌های مهندسی لازم و کافی هستند. بنابراین در این فصل به تعادل می‌پردازیم. تعادل بخش اصلی و با اهمیت استاتیک است و باید آن را کاملاً فرا گرفت. یک جسم را در صفحه در نظر بگیرید. حالت‌های که ممکن است این جسم داخل صفحه به صورت مستقل حرکت کند شامل حرکت افقی، حرکت به صورت قائم و یک حرکت دورانی است. شکل ۲-۱۹ یک صفحه را نشان می‌دهد که تحت یک کوپل چرخشی قرار گرفته است.



شکل ۲-۱۹ کوپل ایجاد شده

دو نیروی وارد بر این صفحه یکدیگر را در جهت افقی خنثی می‌کنند و حرکت صفحه در جهت افقی امکان پذیر نیست ولی گشتاوری که از این دو نیرو حاصل می‌شود موجب دوران صفحه حول محور عمود بر صفحه خواهد شد. پس برای اینکه این سه حالت حرکت خنثی شده و جسم دارای تعادل باشد بایستی مجموع نیروها در جهت x و مجموع نیروها در جهت y برابر صفر شده تا از حرکت جسم در جهت محورهای x و y جلوگیری شود.

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \qquad (۲-۸)$$

همچنین برای اینکه از دوران جسم نیز جلوگیری شود بایستی مجموع لنگرهای اعمال شده به صفحه حول هر نقطه دلخواهی برابر صفر گردد. یعنی:

$$\sum M_z = 0 \qquad (۲-۹)$$

معادلات ۲-۸ و ۲-۹ معادلات اساسی برای حفظ تعادل یک جسم داخل صفحه می‌باشند.

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0 \qquad (۲-۱۰)$$

در صورتی که جسم به صورت سه بعدی مورد بررسی قرار گیرد بایستی معادلات زیر ارضا شوند تا تعادل در فضا برقرار باشد.

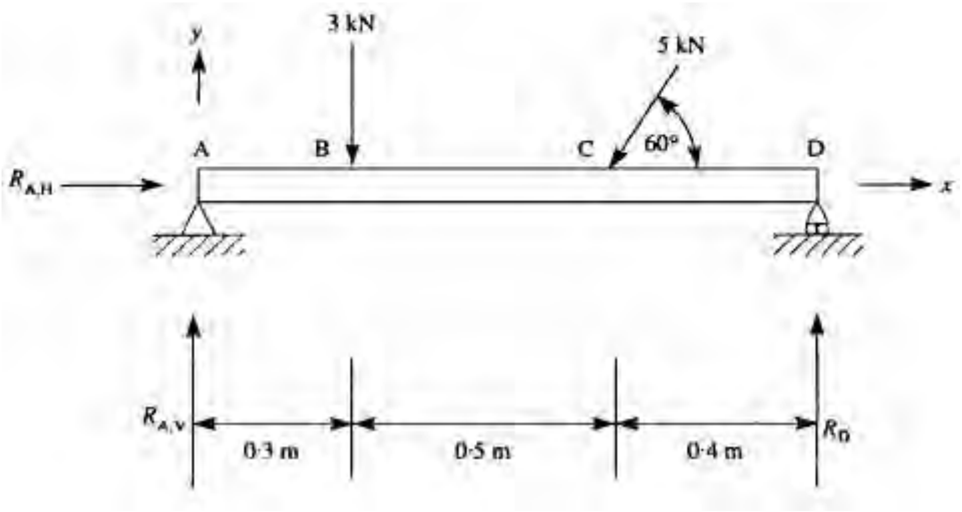
$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۱۱)$$

$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0 \qquad (۲-۱۲)$$

۲-۵ تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

با استفاده از معادله ۲-۱۰ می‌توان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یک سازه معین را محاسبه نمود.

مثال ۲-۲) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر $ABCD$ نشان داده شده در شکل ۲-۲۰ را تعیین کنید.



شکل ۲-۲۰ تیر مثال ۲-۲

حل) تکیه‌گاه A در این تیر، یک تکیه‌گاه مفصلی می‌باشد که دارای دو مولفه می‌باشد. مولفه در جهت x را با $R_{A.H}$ و مولفه در جهت محور y این تکیه‌گاه را با $R_{A.V}$ نشان می‌دهیم. تکیه‌گاه D یک تکیه‌گاه غلتکی می‌باشد و تنها دارای یک عکس‌العمل در جهت محور y ها میباشد که آن را با R_D نشان داده‌ایم. حال با نوشتن معادلات تعادل عکس‌العمل‌ها بدست می‌آیند. ابتدا از معادله $\sum F_x = 0$ استفاده می‌کنیم و جهت چپ به راست را مثبت در نظر می‌گیریم. یعنی نیروهایی که در جهت چپ به راست هستند مثبت وارد می‌شوند.

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} - 5\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = 2.5kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} \times 1.2 - 3 \times 0.9 - \left(5\sin 60^\circ\right) \times 0.4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{A.H} = 3.7kN$$

ب ههمین ترتیب با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم، RD تعیین می‌شود.

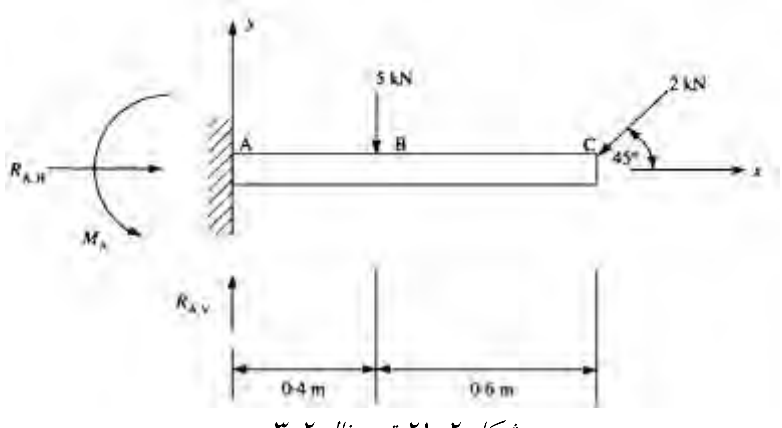
$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D + R_{A.V} - 3 - 5\sin 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_D = 3.6kN$$

در نوشتن معادلات تعادل نیروهای مورب را به دو مولفه متعامد تقسیم می‌کنیم.

مثال ۲-۳) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در تیر کنسول شکل ۲-۲۱ را بدست آورید.

حل) تکیه‌گاه انتهایی این تیر به صورت گیردار می‌باشد و سه مجهول تولید می‌کند. با استفاده از سه معادله تعادل در صفحه می‌توانیم عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست آوریم.



شکل ۲-۲۱ تیر مثال ۲-۳

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در شکل نشان داده شده است. ابتدا از معادله $\sum F_x = 0$ استفاده می‌کنیم و جهت چپ به راست را مثبت در نظر می‌گیریم. یعنی نیروهایی که در جهت چپ به راست هستند مثبت وارد می‌شوند.

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} - 2\cos 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = 1.4kN$$

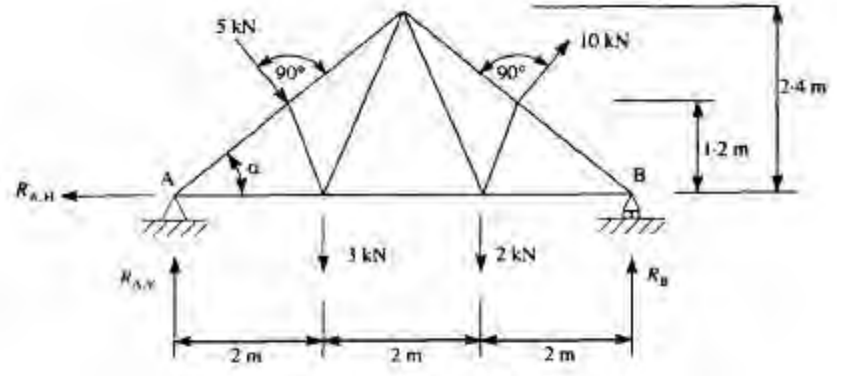
به همین ترتیب $R_{A.V}$ و M_A تعیین می‌شوند:

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} - 5 - 2\sin 45^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} = 6.4kN$$

$$\sum M_A = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A - 5\times 0.4 - \left(2\sin 45^\circ\right)\times 1.0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad M_A = 3.4kN.m$$

مثال۲-٤) در خرپای شکل ۲-۲۲ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست آورید.



شکل ۲-۲۲ خرپای مثال ۲-٤

حل)) تکیه‌گاه A در این خرپا، یک تکیه‌گاه مفصلی می‌باشد که دارای دو مولفه می‌باشد. مولفه در جهت x را با $R_{A.H}$ و مولفه در جهت محور y این تکیه‌گاه را با $R_{A.V}$ نشان می‌دهیم.تکیه‌گاه B یک تکیه‌گاه غلتکی می‌باشد و تنها دارای یک عکس‌العمل در جهت محورy ها میباشد که آن را با R_B نشان داده‌ایم. جهت هر یک از عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را ابتدا به صورت فرضی در نظر می‌گیریم و در صورتی که مقدار منفی بدست آمد به این معنی است که جهت در نظر گرفته شده اشتباه است.

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{2.4}{3} = 38.7^\circ$$

حال با نوشتن معادلات تعادل عکس‌العمل‌ها بدست می‌آیند. ابتدا از معادله $\sum F_x = 0$ استفاده می‌کنیم و جهت چپ به راست را مثبت در نظر می‌گیریم. یعنی نیروهایی که در جهت چپ به راست هستند مثبت وارد می‌شوند.

$$\rightarrow + \sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} - 5\sin 38.7^\circ - 10\sin 38.7^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_{A.H} = 9.4kN$$

همچنین با نوشتن معادله تعادل گشتاورها و نیروها در جهت قائم $R_{A.V}$ و R_B تعیین می‌شوند:

$$\sum M_B = 0$$

$$\Rightarrow R_{A.V} \times 6 - (5\cos 38.7^\circ) \times 4.5 + (5\sin 38.7^\circ) \times 1.2$$

$$+ (10\cos 38.7^\circ) \times 1.5 + (10\sin 38.7^\circ) \times 1.2 - 3 \times 4 - 2 \times 2 = 0$$

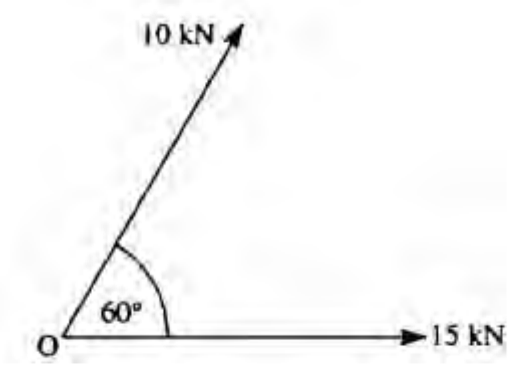
$$\Rightarrow \quad R_{A.V} = 1.8kN$$

$$\uparrow + \sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B + R_{A.V} - 5\cos 38.7^\circ + 10\cos 38.7^\circ - 3 - 2 = 0$$

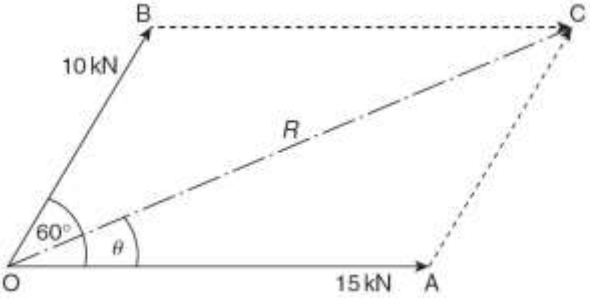
$$\Rightarrow \quad R_B = -0.7kN$$

مساله‌ها

۲-۱ در شکل زیر برآیند دو نیروی نشان داده شده را الف)از روش ترسیمی ب) از روش تحلیلی بدست آورید.



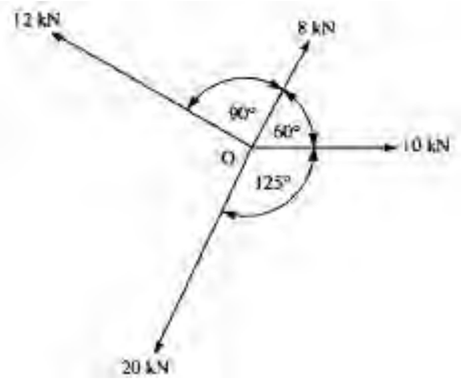
حل) با استفاده از روش ترسیمی دو خط یکی موازی با نیروی $10kN$ از انتهای نیروی $15kN$ و دیگری یک نیرو به موزات نیروی $15kN$ از انتهای نیروی $10kN$ ترسیم شده و از متوازی الاضلاع بدست آمده قطر آن را ترسیم می‌نماییم.



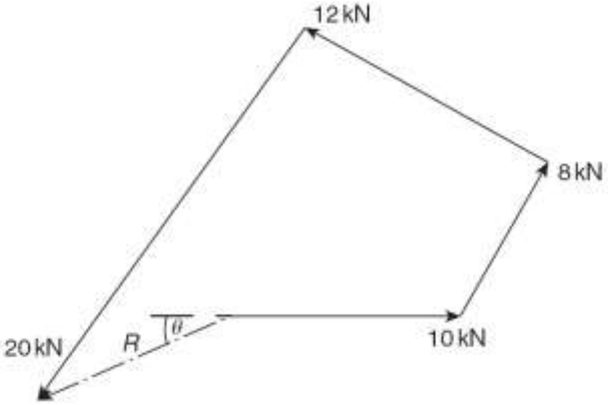
$$R^2 = 15^2 + 10^2 + 2 \times 15 \times 10 \cos 60^\circ \quad \Rightarrow \quad R = 21.8kN$$

$$\tan\theta = \frac{10\sin 60^\circ}{15 + 10\cos 60^\circ} \quad \Rightarrow \quad \theta = 23.4^\circ$$

۲-۲ در شکل زیر برآیند نیروهای نشان داده شده را الف)از روش ترسیمی ب) از روش تحلیلی بدست آورید.



حل) برای بدست آوردن برآیند نیروهای نشان داده شده در شکل کافی است نیروهای موجود را به صورت دنباله پشت سر یکدیگر و با مقیاس درست ترسیم کنیم.



حال اگر برداری از ابتدای اولین بردار به انتهای آخرین بردار رسم شود، طول آن خط بردار برآیند را نشان می‌دهد.

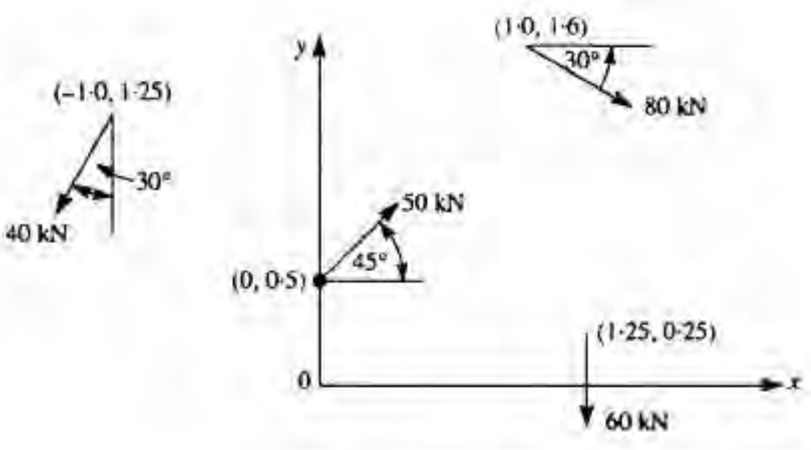
$$F_x = 10 + 8\cos 60^\circ - 12\cos 30^\circ - 20\cos 55^\circ = -7.9kN$$

$$F_y = 8\cos 30^\circ + 12\cos 60^\circ - 20\cos 55^\circ = -3.5kN$$

$$R^2 = (-7.9)^2 + (-3.5)^2 \quad \Rightarrow \quad R = 8.6$$

$$\tan\theta = 23.9^\circ$$

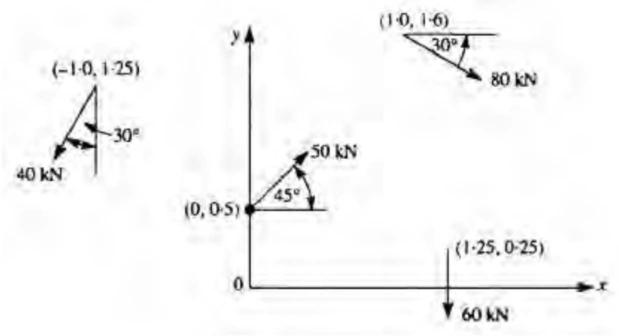
۲-۳ در شکل زیر برآیند نیروهای نشان داده شده را بدست آورید.

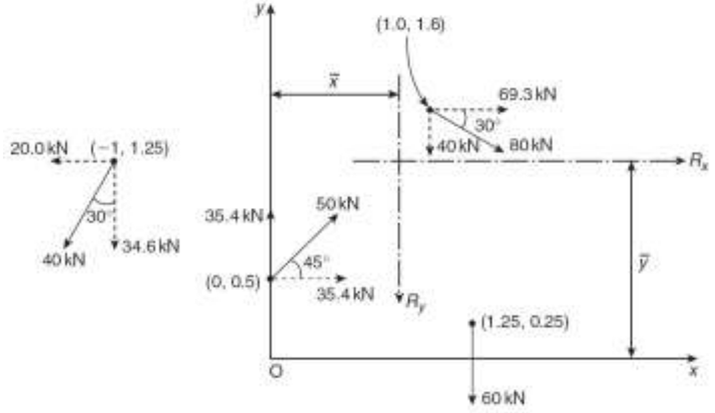


استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

حل) در ابتدا هر یک از نیروهای نشان داده شده در شکل را به دو مولفه متعامد در جهت x و y تجزیه می‌کنیم.

$$R_x = 63.3 + 35.4 - 20.0 = 84.7kN$$





حال با گشتاور گیری حول محور xها داریم

$$R_x\bar{y} = 35.4 \times 0.5 - 20.0 \times 1.25 + 69.3 \times 1.6 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 1.22m$$

همچنین با استفاده از شکل داریم:

$$R_y = 60 + 40 + 34.6 - 35.4 = 99.2kN$$

$$R_y\bar{x} = 40 \times 1.0 + 60.0 \times 1.25 - 34.6 \times 1.0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0.81m$$

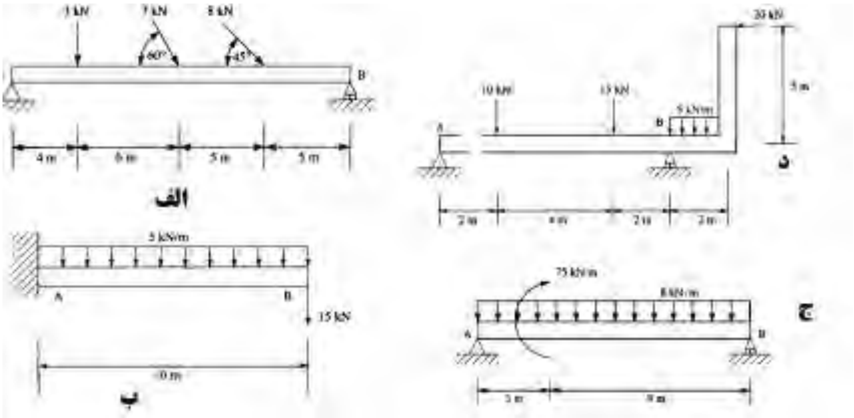
$$R^2 = 99.2^2 + 84.7^2 \quad \Rightarrow \quad R = 130.4$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{99.2}{84.7} = 49.5^\circ$$

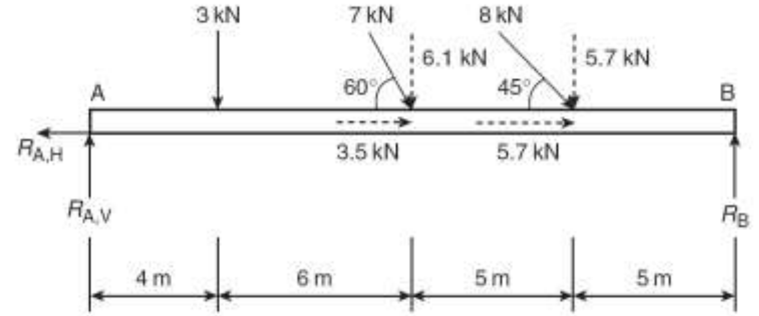
کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

۲-٤ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیرهای زیررا تعیین کنید.



حل) الف)در ابتدا تمام نیروهای نشان داده شده بر روی تیر را به دو مولفه متعامد تجزیه می‌کنیم.



همچنین برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یک جهتی را به عنوان جهت فرضی در نظر می‌گیریم. با گشتاور گیری حول نقطه B داریم:

$$R_{A.V}\times 20-3\times 16-6.1\times 10-5.7\times 5=0 \quad\Rightarrow\quad R_{A.V}=6.9kN$$

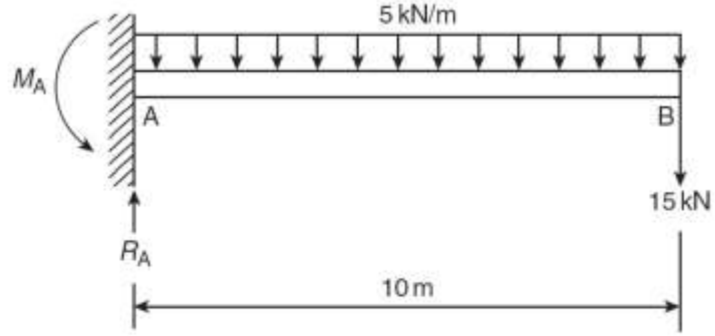
$$R_{A.V}+R_{B.V}-3-6.1-5.7=0 \quad\Rightarrow\quad R_{B.V}=7.9kN$$

$$R_{A.H}-3.5-5.7=0 \quad\Rightarrow\quad R_{A.H}=9.2kN$$

ب) در این تیر کنسول ابتدا دیاگرام جسم آزاد را ترسیم می‌کنیم:

$$R_A-15-5\times 10=0 \quad\Rightarrow\quad R_A=65kN$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

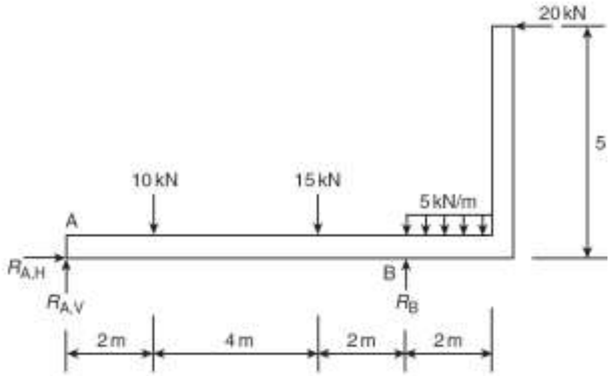


با گشتاور گیری حول نقطه A داریم:

$$M_A - 15\times10 - 5\times10\times5 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = 400\,kN.m$$

علامت مثبت بدست آمده برای عکس العمل‌ها نشان دهنده درست بودن جهت فرضی است.

ج) ابتدا دیاگرام جسم آزاد را ترسیم می‌کنیم:



$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = 20kN$$

با گشتاور گیری حول نقطه A داریم:

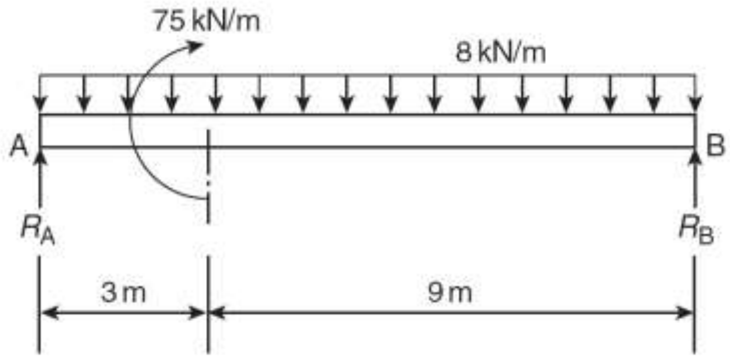
$$R_B\times8 + 20\times5 - 5\times2\times9 - 15\times6 - 10\times2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 12.5kN$$

$$R_{A.V} + R_B - 10 - 15 - 5\times2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} = 22.5kN$$

د) بارگذاری روی تیر باعث ایجاد عکس العمل‌های قائم در تکیه‌گاه‌ها می‌شود.

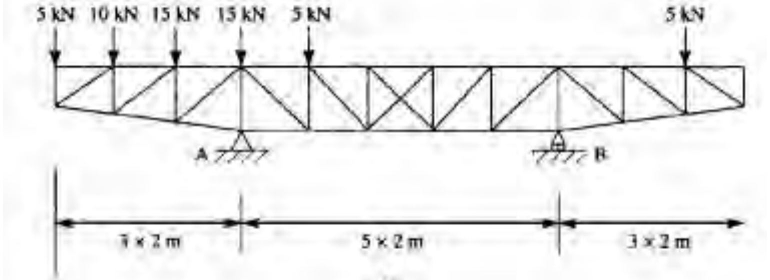
با گشتاور گیری حول نقطه B داریم:

$$R_A\times12 + 75 - 8\times12\times6 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 41.8kN$$

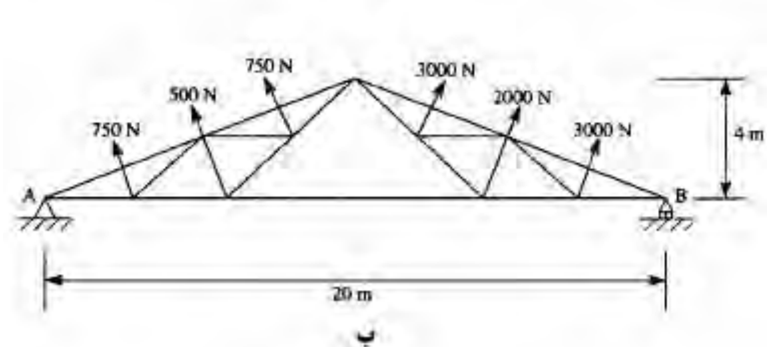


$$R_B + R_A - 8\times 12 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 54.2\,kN$$

۲-۵ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی خرپای صفحه‌ای زیر را تعیین کنید.



الف



ب

حل) الف) در این خرپا نیروهای وارده در جهت ثقل می‌باشند و مولفه افقی ندارند پس عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه A برابر صفر است. با گشتاور گیری حول نقطه B داریم:

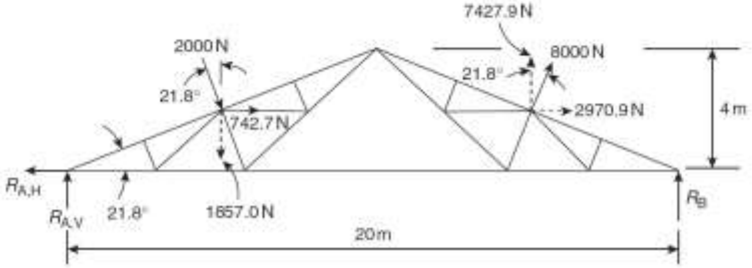
$$R_A \times 10 - 5\times 16 - 10\times 14 - 15\times 12 - 15\times 10 - 5\times 8 + 5\times 4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_A = 57\,kN \uparrow$$

$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B + R_A - 5 - 10 - 15 - 15 - 5 - 5 = 0$$

$$\Rightarrow R_B = -2kN \downarrow$$

ب) دیاگرام جسم آزاد سازه را ترسیم می‌کنیم و نیروهای وارد بر آن را به دو مولفه تجزیه می‌کنیم:



با گشتاور گیری حول نقطه B داریم:

$$R_{A.V} \times 20 + 742.7\times 2 - 1857.0\times 15 + 2970.9\times 2 + 7427.9\times 5 = 0$$

$$\Rightarrow R_{A.V} = -835.6N \downarrow$$

$$R_B + R_{A.V} - 1857.0 + 7427.9 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = -4735.3 \downarrow$$

$$R_{A.H} - 742.7 - 2970.9 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = 3713.6N$$

فصل سوم
نیروی محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و پیچش

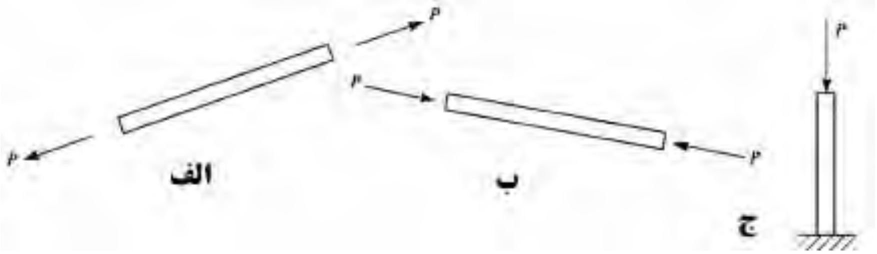
هدف اصلی سازه‌ها تحمل و انتقال بارهای وارد بر آنهاست. برای رسیدن به این هدف سازه باید قادر باشد تا بارهای اعمالی را از یک نقطه به نقطه‌ای دیگر انتقال دهد، مثلاً باید قادر باشد تا نیروهای وارده را به راحتی به تکیه‌گاه منتقل کند. به عنوان مثال تیر نشان در شکل۲-۲۱، بارهای اعمال شده را به تکیه‌گاهA منتقل می‌کند. این عمل با توزیع نیروهای داخلی همراه است که قبل از تعیین تنش‌ها و تغییرمکان‌ها قابل محاسبه هستند.

۳-۱ انواع بارها

یک سازه ممکن است تحت تاثیر بارهای مختلف و پیچیده‌ای قرار گیرد. به‌هرحال بارهای وارده به سازه‌های مورد بحث را می‌توان در چهار نوع خلاصه کرد: نیروهای محوری، نیروهای برشی، لنگرخمشی و پیچش

بارهای محوری

بارهای محوری در امتداد محور طولی یک عضو سازه اعمال می‌شود. در صورتی که عمل بار روی عضو به صورتی باشد که مانند شکل۳-۱الف باعث افزایش طول آن شود، بار از نوع کششی است و در صورتی که باعث کوچک شدن طول عضو شود (مانند شکل ۳-۱ب) به آن بار فشاری گویند.

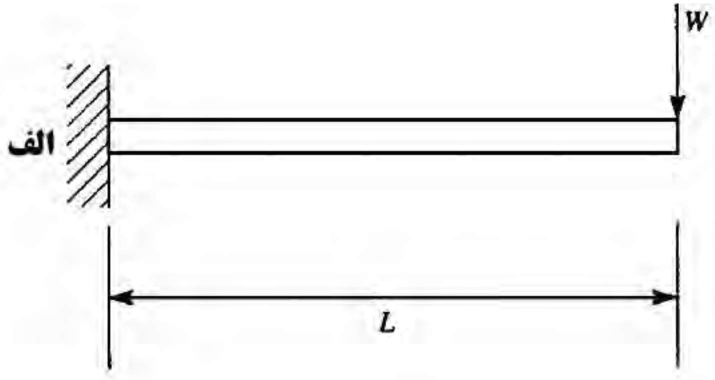


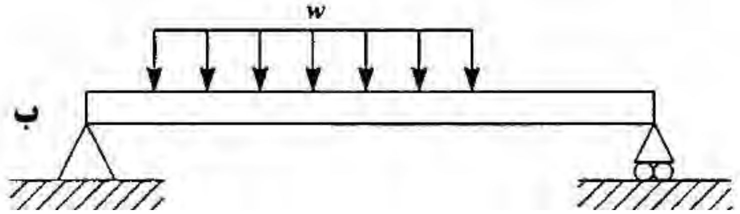
شکل ۳-۱ بارهای محوری

اعضایی همچون شکل ۳-۱الف و ب در قاب‌های با اتصالات مفصلی و خرپاها دیده می‌شوند. شکل۳-۱ج نیز یک پایه را نشان می‌دهد که تحت بار فشاری محوری قرار دارد.

بارهای برشی

نیروی برشی همیشه عمود بر محور عضو اعمال می‌شود. در شکل۳-۲الف یک تیر را که نیروی برشی متمرکز W را تحمل می‌کند نشان داده شده است. در شکل ۳-۲ب نیروی برشی در طول عضو پخش شده و شدت بار برابر w بر واحد طول می‌باشد. بار متمرکز قادر است که به یک نقطه اعمال شود. در عمل تمام بارها به صورت گسترده بر روی تیر پراکنده شده‌اند ولی در بعضی مواقع که نقطه اثر بار کوچک است آنها را به صورت متمرکز در نظر می‌گیریم. مثال عملی از این حالت وقتی است که تیرهای فرعی بر روی یک تیر اصلی به صورت عرضی قرار گرفته‌اند. نیروی ناشی از تیرهای فرعی به صورت متمرکز به تیر اصلی وارد می‌شود. به عنوان مثالی از بارهای گسترده می‌توان به وزن خود تیرها اشاره کرد که در طول آنها گسترده شده است و یا در صورتی که بر روی یک تیر قرار گرفته باشد، وزن دیوار به صورت گسترده بر روی تیر زیرین اعمال می‌شود.



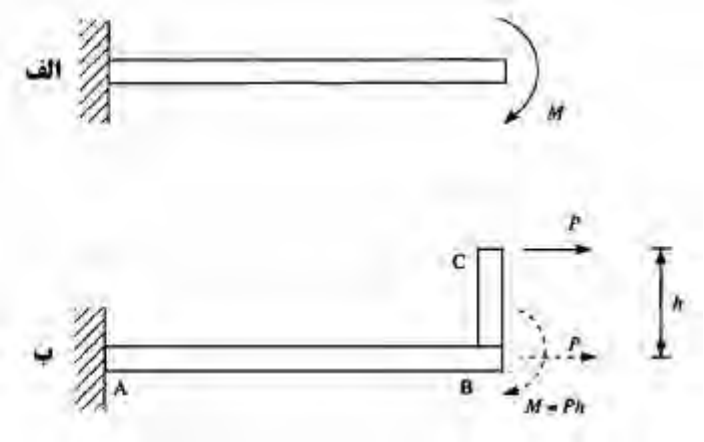


شکل۳-۲ نیروهای برشی

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است		Web: www.M-Alirezaei.com

لنگر خمشی

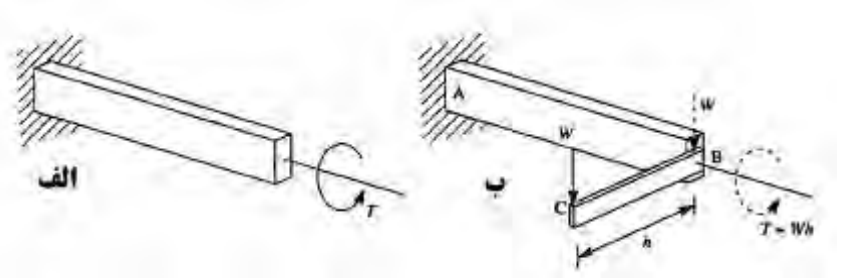
در حالات عملی به سختی اتفاق می‌افتد که تیری تحت خمش خالص مانند شکل ۳-۳الف قرار گیرد و در اکثر مواقع تیرها تحت بارهای مختلف مانند تیر نشان داده شده در شکل ۳-۳ب قرار می‌گیرند. در این شکل عضو عمودی BC که در انتهای تیر AB قرار دارد نیروی افقی P را حمل می‌کند. این بار باعث ایجاد نیروی محوری و یک لنگر خمشی به اندازه $M=Ph$ در تیر می‌شود.



شکل ۳-۳ لنگر خمشی اعمال شده بر تیر

پیچش

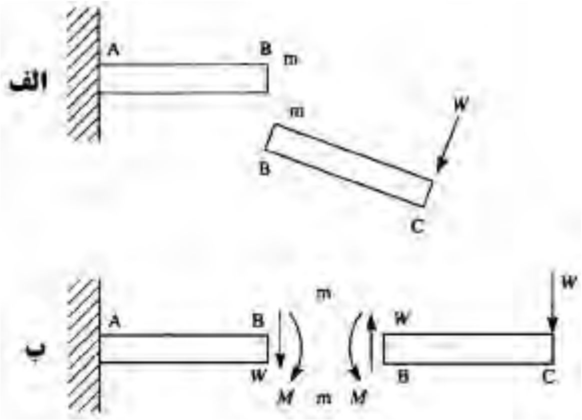
یک مثال عملی از پیچش در شکل ۳-٤الف نشان داده شده است. در این شکل تیر در پیچش خاص قرار دارد. در شکل ۳-٤ب عضو افقی BC نیروی قائم W را تحمل می‌کند که این نیرو در تیر اصلی موجب ایجاد یک لنگر پیچشی به اندازه $T=Wh$ و همچنین یک نیروی برشی به اندازه W می‌شود.



شکل۳-٤ پیچش اعمال شده بر روی یک تیر

کانال تلگرام:		Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

تمام بارهای نشان داده شده در شکل‌های ۳-۱ تا ۳-٤ به صورت خارجی و به نمایندگی از بارهای واقعی بر روی تیرها اعمال شده‌اند. هرکدام از این بارها موجب ایجاد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌شوند مثالی در این خصوص در بخش ۲-۵ مورد بررسی قرار گرفت. این سازه‌ها تحت بارهای اعمالی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تحت تعادل قرار می‌گیرند و می‌توان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را نیز به عنوان نیروهای خارجی که بر سازه اثر می‌کنند در نظر گرفت. حال تیر کنسول شکل ۳-۲الف را در نظر بگیرید. در صورتی که مانند شکل ۳-۵الف تیر را در محل mm برشی بزنیم و قسمت BC را جدا نماییم، قسمت AB می‌تواند نیروهای اعمالی را ماندقبل تحمل کند. کل جسم در تعادل است، بنابراین هر مقطع فرضی از جسم نیز باید در حال تعادل باشد و ایستایی خود را حفظ کند. بنابراین برای اینکه تیر دارای تعادل باشد در هر مقطع فرضی از آن بایستی سه نیروی محوری، برشی و لنگر خمشی وجود داشته باشد تا تعادل در آن برقرار شود. در شکل ۳-۵ب این نیروها نشان داده شده است. در صورتی که به سمت چپ مقطع برش خورده نگاه کنیم جهت مثبت فرض شده برای نیروهای داخلی مانند جهت نشان داده شده بر روی تیر AB است و در صورتی که به قسمت سمت راست نگاه کنیم جهت مثبت فرض شده برای نیروهای داخلی مانند جهت نشان داده شده بر روی تیر BC خواهد بود. در صورتی که در تحلیل علامتی منفی به دست آمد به این معنی است که جهت واقعی نیروی داخلی خلاف علامت فرض شده است.

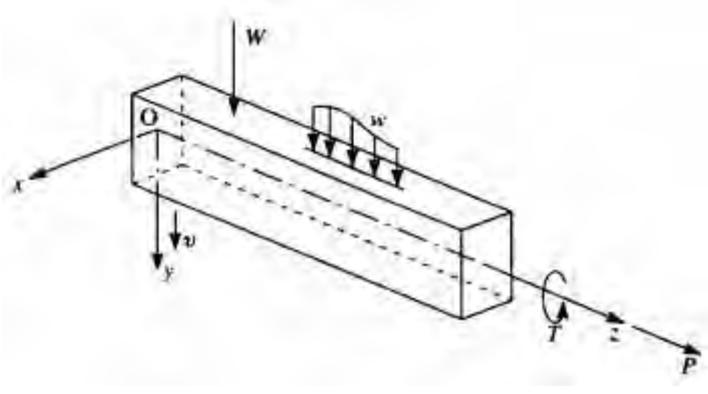


شکل ۳-۵ نیروهای داخلی ایجاد شده در یک تیر

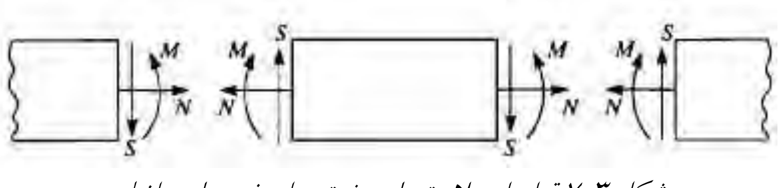
۳-۲ نمادگذاری و قرارداد علامت‌ها

باید در روند تحلیل برای رسیدن به جواب‌های یکسان قراردادهایی در مورد محورهای مختصات و علامت‌های نیروها منظور شود. در تیرهای مورد بررسی مانند تیر نشان داده در شکل ۳-۶ محور Oz محور طولی تیراست، محورOy به سمت پایین بوده و فرض می‌شود که نیروهای خارجی در جهت y اعمال می‌شوند. در این صورت جابجایی در تیر را با v نمایش می‌دهیم و جهت مثبت آن در جهت y است. در صورتی که نیروی محوری که بر روی تیر اعمال می‌شود به صورت کششی باشد مثبت در نظر گرفته می‌شود. و همچنین در صورتی که یک لنگر پیچشی بر تیر اثر کند مانند شکل ۳-۶ و جهت آن خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد (پاد ساعتگرد) مثبت در نظر گرفته می‌شود.

جهت مثبت نیروهای داخلی نیز در شکل ۳-۷ نشان داده شده است. با توجه به شکل دیده می‌شود وقتی برشی از تیر زده می‌شود در صورتی که به سمت چپ برش نگاه کنیم جهت مثبت برای نیروی برشی S بالا به پایین است.



شکل ۳-۶ نمادگذاری و قرارداد علامت‌ها



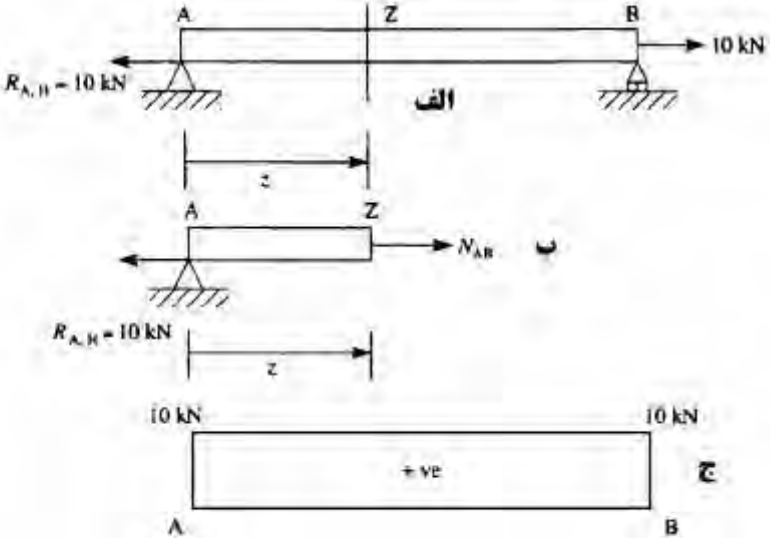
شکل ۳-۷ قرارداد علامت‌های مثبت برای نیروهای داخلی

همچنین جهت مثبت لنگر خمشی M پادساعتگرد و نیروی محوریN از چپ به راست است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۳-۳ نیروهای محوری

مثال ۳-۱) دیاگرام نیروی محوری تیر AB نشان داده شده در شکل ۳-۸الف را ترسیم کنید.



شکل ۳-۸ دیاگرام نیروی محوری مثال ۳-۱

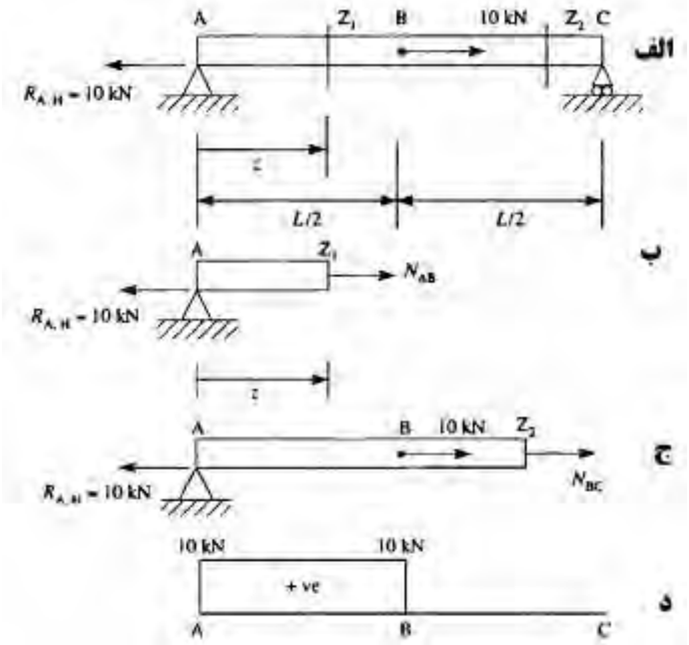
حل) گام اول در حل مسئله بدست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با استفاده از روش شرح داده شده در قسمت ۲-۵ است. عکس‌العمل تکیه‌گاهی A برابر $R_{A.H}=10kN$ به سمت چپ می‌باشد. در طول A تا B هیچ ناپیوستگی در بارگذاری وجود ندارد، با یک برش می‌توان مسئله را حل نمود. برش Z را به فاصله z از بر تکیه‌گاه A زده و سمت چپ تیر را دوباره در شکل ۳-۸ب ترسیم کرده‌ایم. نیروی داخلی N_{AB} را با توجه به جهت قرار دادی نشان داده شده است. چون کل تیر دارای تعادل است پس هر برشی از آن نیز باید تعادل داشته باشد. حال با نوشتن معادلات تعادل آن را بررسی می‌کنیم. معادله $\rightarrow +\sum F_x = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم.

$$N_{AB} - R_{A.H} = N_{AB} - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = +10kN$$

مقدار نیروی محوری از ابتدا تا انتهای تیر ثابت و برابر $+10kN$ است که در شکل ۳-۸ج نشان داده شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

مثال ۳-۲) دیاگرام نیروی محوری تیر ABC نشان داده شده در شکل ۳-۹ را ترسیم کنید.



شکل ۳-۹ تیر مثال۲-۳

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای تیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم. تکیه‌گاه C غلتکی است و در نتیجه مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی افقی A برابر $R_{A.H}=10kN$ به سمت چپ می‌شود. بارگذاری خارجی از Aتا B تغییراتی ندارد و برای این ناحیه یک برش کافی است که این برش در شکل ۳-۹ب نشان داده شده است. همچنین برای ناحیه B تا C نیز به یک برش نیاز داریم که در شکل ۳-۹ج نشان داده شده است. در برش Z_1 دیاگرام جسم آزاد ترسیم شده است. با نوشتن معادله تعادل مقدار N_{AB} یا به عبارتی نیرو محوری مابین A تا B تعیین می‌شود.

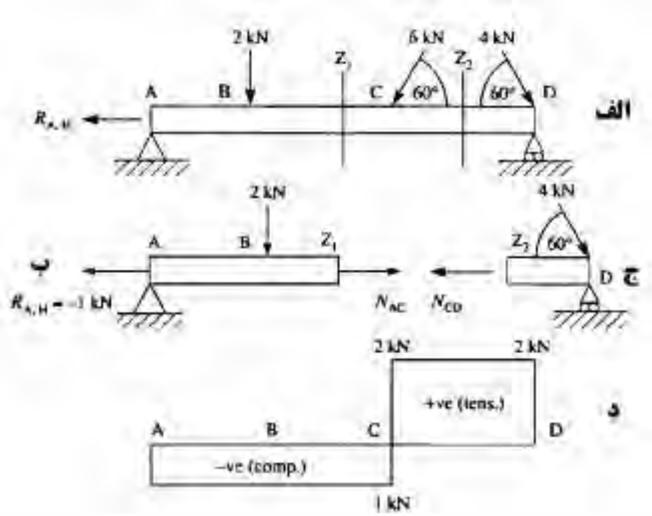
معادله $\rightarrow + \sum F_x = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم.

$$N_{AB} - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = +10kN \ \text{tension}$$

مقدار نیروی محوری از ابتدا تا نقطه B تیر ثابت و برابر $+10kN$ است که در شکل ۳-۸د نشان داده شده است. حال برای برش Z_2 نیز معادله تعادل را می‌نویسیم.

$$N_{BC} + 10 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = 0$$

مثال۳-۳) دیاگرام نیروی محوری تیر شکل ۳-۱۰ را که تحت سه بار متمرکز قرار دارد تعیین کنید.



شکل۳-۱۰

حل) چون هدف ما تعیین نیروهای محوری در تیر است نیازی به تعیین عکس‌العمل‌های قائم تکیه‌گاهی نیست و فقط بایستی عکس‌العمل تکیه‌گاهی A را که یک مولفه افقی دارد تعیین نماییم. عکس‌العمل تکیه‌گاهی D به دلیل غلتکی بودن در جهت قائم است. با نوشتن معادله $\rightarrow + \sum F_x = 0$ برای کل تیر تعادل تیر در جهت x را کنترل می‌کنیم تا نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی در A بدست آید.

$$R_{A.H} + 6\cos 60^\circ - 4\cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = -1kN$$

در ابتدا جهت $R_{A.H}$ را به سمت چپ مثبت در نظر گرفته شده بود ولی مقدار بدست آمده منفی است و نشان می‌دهد که جهت فرض شده برای $R_{A.H}$ اشتباه است. در ناحیه A تا C تغییراتی در بارگذاری خارجی که مولفه افقی بر روی تیر داشته باشد نداریم و تنها یک بار متمرکز $2kN$ به صورت قائم وارد می‌شود که تاثیری بر نیروی محوری تیر ندارد پس تنها یک برش در ناحیه A تا C کافی است. برش Z_1 در ناحیه A تا C زده شده است (شکل ۳-۳ب).

$$N_{AC} - R_{A.H} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AC} = R_{A.H} = -1kN \text{ compression}$$

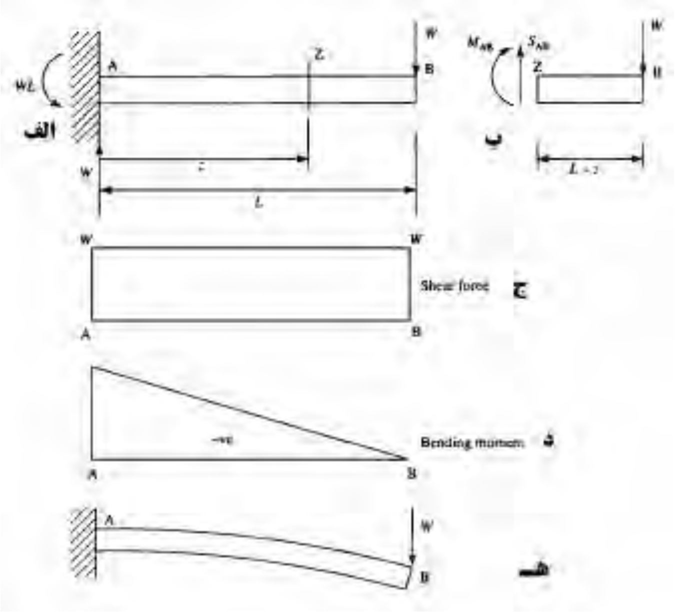
به طور مشابه برای قطعه سمت چپ نیز معادله تعادل نوشته می‌شود.

$N_{CD} - 4\cos 60^{\circ} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{CD} = +2kN$ tension

۳-٤ نیروی برشی و لنگر خمشی

با استفاده از مفاهیم ارائه شده در بخش ۳-۵ به راحتی می‌توان نیروی برش و لنگر خمشی در تیر را بدست آورد.

مثال ۳-٤) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر نشان داده شده در شکل ۳-۱۱ را ترسیم کنید.



شکل ۳-۱۱ دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی

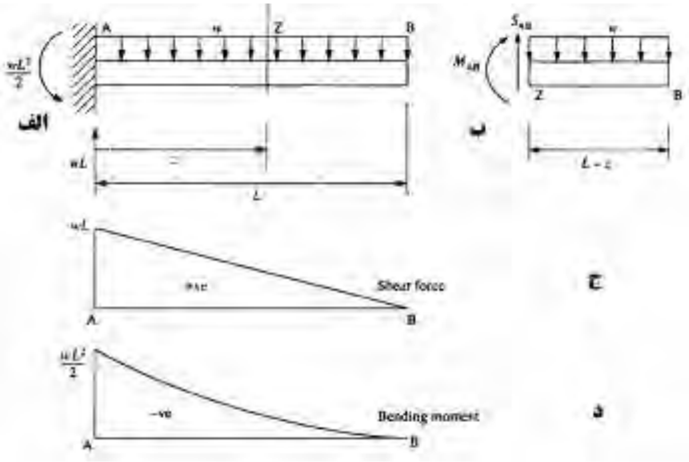
حل) بارگذاری از ابتدا تا انتها تیر ثابت بوده و تنها یک برش کافی می‌باشد. برش Z به فاصله z از بر تکیه‌گاه A می‌باشد که در شکل نمایش داده شده است. در این برش تیر به دو قسمت تقسیم شده و ما به قطعه سمت راست نگاه می‌کنیم و معادلات تعادل را برای این قسمت می‌نویسیم در صورتی که به قطعه سمت چپ نگاه کنیم بایستی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی A را نیز تعیین کنیم زیرا که این عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی دیده می‌شوند. مطابق شکل ۳-۱۱ب نیروهای داخلی را طبق قرارداد قرار می‌دهیم. معادله $\uparrow + \sum F_y = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی حاصل شود.

$S_{AB} - W = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = +W$

$$\sum M = 0 \quad \rightarrow M_{AB} + W(L-z) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = -W(L-z)$$

مثال ۳-۵) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر یک سر گیردار شکل ۳-۱۲الف که تحت بار گسترده خطی w را ترسیم کنید.

حل) دوباره مانند مثال قبل نیازی به تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاهی نیست و در صورتی که در برش به قطعه سمت راست نگاه کنیم، عکس‌العمل تکیه‌گاهی آن دیده نمی‌شوند.



شکل ۳-۱۲

مقدار بار اعمالی در ابتدا تا انتهای تیر تغییرات ندارد، پس تنها یک برش برای رسیدن به معادلات برش و لنگر کافی است. در برش زده شده در شکل۳-۱۲ب به بررسی تعادل در آن می‌پردازیم. ابتدا معادله $\uparrow + \sum F_y = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی حاصل شود.

$$S_{AB} - W(L-z) = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = +W(L-z)$$

دیده می‌شود که S_{AB} تابعی از z است، یعنی دارای تغییرات است. حال لنگر را تعیین می‌کنیم.

$$M_{AB} - \frac{W}{2}(L-z)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = -\frac{W}{2}(L-z)^2$$

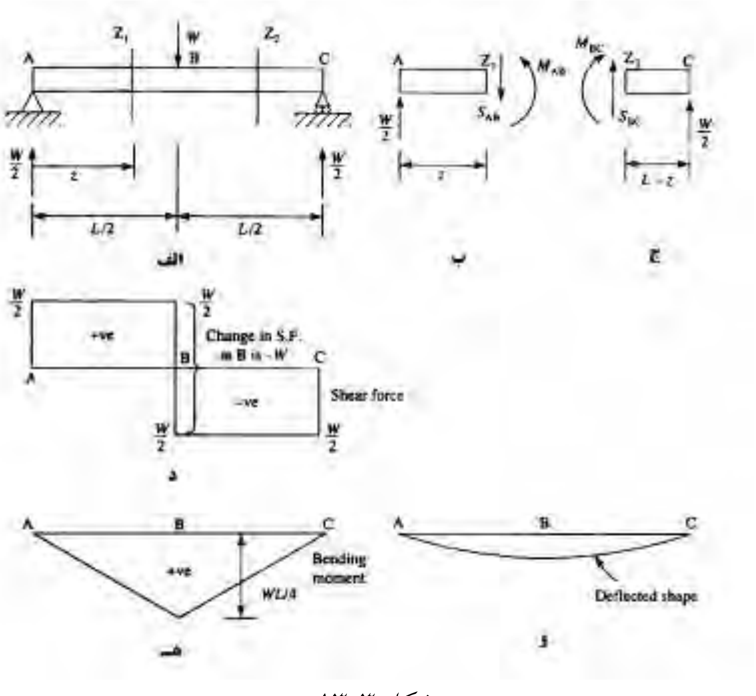
همیشه درجه دیاگرام برش یک مرتبه از درجه دیاگرام بارگذاری بیشتر است، همچنین درجه دیاگرام لنگر یک مرتبه از درجه دیاگرام برش بیشتر است. به عبارتی مشتق دیاگرام لنگر در هر نقطه‌ای از آن مقدار برش را می‌دهد.

$$\frac{dM_{AB}}{dz} = w(L - z)$$

مثال ۳-۶) در شکل ۳-۱۳ مقدار دیاگرام برش و لنگر را ترسیم کنید.

حل) در این مسئله ما نیاز به تعیین عکس‌العمل تکیه‌گاهی داریم. بار اعمال شده به صورت متمرکز و به اندازه W در وسط تیر اعمال شده است، به راحتی می‌توان حدس زد که هر کدام از تکیه‌گاه‌ها به اندازه مساوی از بار سهم می‌برند. در تیر به دو برش برای تعیین نیروهای داخلی نیاز داریم. برش‌های Z_1 و Z_2 در شکل نشان داده شده است. در شکل ۳-۱۳ب برای قطعه سمت چپ معادله تعادل را می‌نویسیم. ابتدا معادله $\uparrow + \sum F_y = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی حاصل شود.

$$-S_{AB} + \frac{W}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = +\frac{W}{2}$$



شکل ۳-۱۳

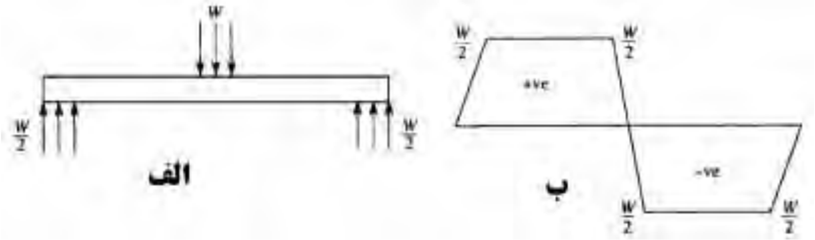
در شکل ۳-۱۳ب برای قطعه سمت راست معادله تعادل را می‌نویسیم. معادله $+\uparrow\sum F_y=0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی برای سمت راست تیر حاصل شود.

$$S_{AB}+\frac{W}{2}=0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB}=-\frac{W}{2}$$

دیده می‌شود که نیروی برشی برای سمت چپ مثبت و برای سمت راست منفی و به صورت خط ثابت است. معادله تعادل لنگر را برای برش سمت چپ می‌نویسیم:

$$M_{AB}-\frac{W}{2}z=0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB}=\frac{W}{2}z$$

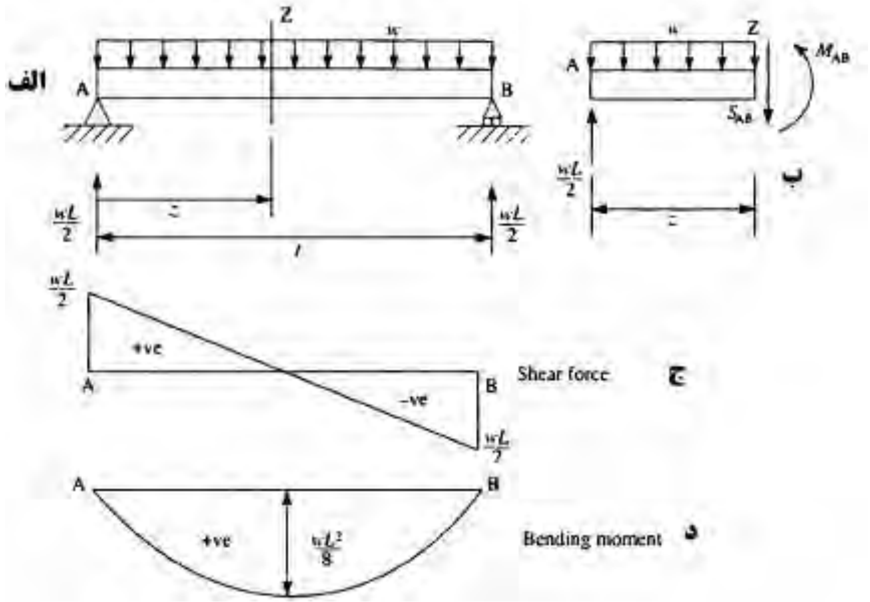
لذا در مثال فوق که لنگر به صورت خطی تغییر می‌کند. دیده می‌شود که دیاگرام برش در زیر بارهای متمرکز مقداری ثابت دارد و در زیر بارهای گسترده ثابت به صورت خطی تغییر می‌کند. به عنوان مثال شکل ۳-۱۴الف یک تیر را نشان می‌دهد که در شکل ۳-۱۴ب دیاگرام نیروی برشی آن نشان داده شده است. در ناحیه‌ای که بار گسترده است، تغییرات دیاگرام خطی است.



شکل۳-۱۴تغییرات دیاگرام برش

مثال۳-۷) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر دو سرساده تحت بار گسترده خطی را تعیین کنید.

حل) در ابتدا با نوشتن معادلات تعادل برای تیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم. در شکل ۳-۱۵الف این تیر نشان داده شده است. به علت تقارن تیر می‌توان فهمید که نصف بار را تکیه‌گاه A و نصف بار را تکیه‌گاه B تحمل می‌کند. با زدن یک مقطع همانند شکل ۳-۱۵ب نیروهای داخلی را طبق قرارداد در تیر برش خورده نمایش می‌دهیم.



شکل۳-۱۵

معادله $+\uparrow \sum F_y = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی برای سمت راست تیر حاصل شود.

$$S_{AB} + wz - w\frac{L}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = +w\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

مقدار برش در این قسمت از تیر به صورت خطی تغییر می‌کند. مقدار z از صفر تا L متغیر است و با گذاشتن مقادیر مختلف در آن مقدار دیاگرام ترسیم می‌شود. حال با نوشتن معادله لنگر برای قطعه برش خورده داریم:

$$M_{AB} + \frac{wz^2}{2} - w\frac{L}{2}z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = +\frac{wz}{2}(L - z)$$

مقدار لنگر در این قسمت از تیر به صورت درجه دو تغییر می‌کند. مقدار z از صفر تا L متغییر است و با گذاشتن مقادیر مختلف در آن دیاگرام ترسیم می‌شود. با مشتق گیری از معادله لنگر نیز می‌توان به معادله برش رسید.

$$\frac{dM_{AB}}{dz} = w\left(\frac{L}{2} - z\right)$$

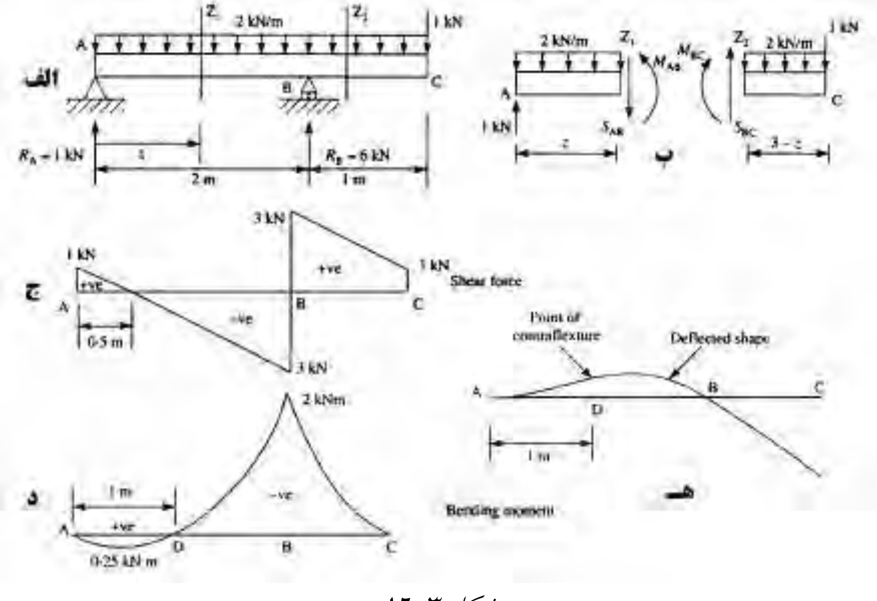
مثال۳-۸) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر شکل ۳-۱۶الف را که دارای یک قسمت جلو آمده می‌باشد را تعیین کنید.

حل) در ابتدا با نوشتن معادلات تعادل برای تیر، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم. در شکل ۳-۱۶الف این تیر نشان داده شده است. با نوشتن معادله لنگر حول نقطه B مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A تعیین می‌شود و عکس‌العمل تکیه‌گاهی B چون از این نقطه می‌گذرد وارد معادله نمی‌شود.

$$R_A \times 2 - 2\times 3\times 0.5 + 1\times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 1kN$$

معادله $+\uparrow \sum F_y = 0$ را برای تیر می‌نویسیم تا R_B حاصل شود.

$$R_A + R_B - 2\times 3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 6kN$$



شکل ۳-۱۶

در این شکل به دو برش نیاز داریم. برش Z_1 و Z_2 مطابق شکل زده شده است. حال با نوشتن معادلات تعادل برای هر برش، نیروهای داخلی آن بررسی می‌شود. در برش Z_1 با نوشتن معادله $+\uparrow \sum F_y = 0$ برای قطعه برش خورده داریم:

$$S_{AB} + 2z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{AB} = 1 - 2z$$

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

دیده می‌شود که مقدار برش در ناحیه A تا B به صورت خطی تغییر می‌کند. مقدار z از صفر تا 2 متغیر است و با گذاشتن مقادیر مختلف در آن دیاگرام ترسیم می‌شود. حال با نوشتن معادله لنگر برای قطعه برش خورده داریم:

$$M_{AB} + 2z\frac{z}{2} - 1z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = z - z^2$$

در برش Z_2 با نوشتن معادله $\uparrow + \sum F_y = 0$ برای قطعه برش خورده داریم:

$$S_{BC} - 2(3-z) - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{BC} = 7 - 2z$$

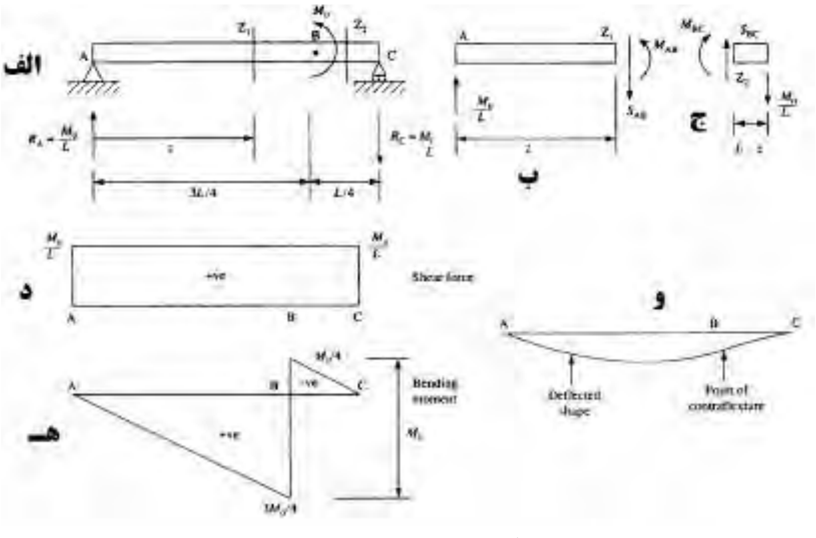
حال با نوشتن معادله لنگر برای قطعه برش خورده Z_2 داریم:

$$M_{BC} + \frac{2}{3}(3-z)^2 + 1(3-z) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BC} = -12 + 7z - z^2$$

مثال۳-۹) تیر شکل ۳-۱۷ که بر روی آن یک لنگر متمرکز اعمال می‌شود را در نظر بگیرید. دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.

حل) در ابتدا با نوشتن معادلات تعادل برای تیر، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم. با نوشتن معادله لنگر حول نقطه C مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A تعیین می‌شود.

$$R_A = \frac{M_0}{L} \quad , \quad R_C = \frac{M_0}{L}$$



شکل ۳-۱۷ تیر مثال۳-۹

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در این تیر به دو برش برای بدست آوردن معادله‌های برش و لنگر نیاز داریم. برش‌های Z_1 و Z_2 در شکل نشان داده شده است. در شکل ۳-۱۷ب برای قطعه سمت چپ معادله تعادل را می‌نویسیم. ابتدا معادله $+\uparrow \sum F_y = 0$ را برای قطعه برش خورده می‌نویسیم تا نیروی برشی حاصل شود.

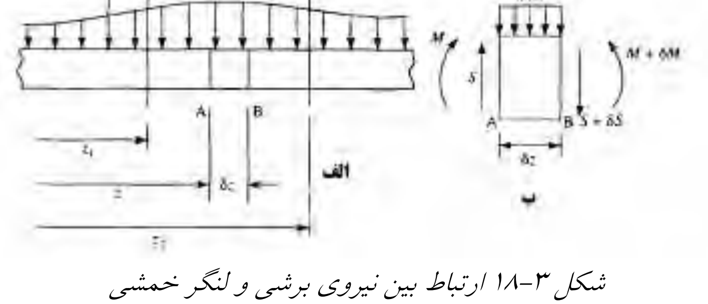
$$S_{AB} = S_{BC} = +\frac{M_0}{L}$$

$$M_{AB} - \frac{M_0}{L} z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{AB} = \frac{M_0}{L} z$$

$$M_{BC} + \frac{M_0}{L}(L - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad M_{BC} = \frac{M_0}{L}(z - L)$$

۳-۵ ارتباط بین نیروی برشی و لنگر خمشی

برای هر تیر با بارهای گسترده می‌توان بعضی روابط عمومی را به دست آورد که به تعیین توزیع گشتاور و برش در طول تیر کمک می‌کند. شکل۳-۱۸الف نمایشگر بخشی از تیر بارگذاری شده است که در شکل ۳-۱۸ب جزءdz از آن جدا شده است. بار w نمایشگر نیروی واحد طول تیر است. برشS و گشتاورM وارد بر این جزء در مکانz در جهت‌های مثبت‌شان کشیده شده‌اند. در سمت مقابل این جزء و در جایی که مختص$z+dz$ است نیز این کمیت‌ها در جهت‌های مثبت خودشان نمایش داده شده‌اند. اما به دلیل تغییرات M و S نسبت به z به صورت $S+dS$ و$M+dM$ مشخص می‌شود. می‌توان بار اعمال شدهw را در طول این جزء ثابت در نظر گرفت زیرا این طول کمیتی دیفرانسیلی است و اثر هر تغییرw در حد در مقایسه با اثر خود w از بین می‌رود.



شکل ۳-۱۸ ارتباط بین نیروی برشی و لنگر خمشی

برای تعادل این جزء لازم است که مجموع نیروی عمودی صفرباشد. پس داریم:

$$S - w.dz - (S + dS) = 0$$

$$w = -\frac{dS}{dx} \qquad (۱-۳)$$

از معادله ۳-۱ متوجه می‌شویم که شیب نمودار برشی باید در همه جا برابر منفی مقدار بار اعمالی باشد. معادله۳-۱ برای هر دو طرف بار متمرکز معتبر است اما نه در مکان اعمال بار متمرکز، زیرا تغییر یک باره نیروی برشی موجب ناپیوستگی شده است.

اکنون می‌توان نیروی برشی را با انتگرال‌گیری از معادله۳-۱ بر حسب بارw بیان کرد. پس:

$$\int_{V_0}^{V} dS = -\int_{z_0}^{z} w.dz \quad \Rightarrow \quad S = -\int w(z)dz + C_1 \qquad (۲-۳)$$

برای تعادل جزء تیر نشان داده شده در شکل ۳-۱۸ نیاز به آن است که مجموع گشتاورها حول سمت چپ برابر صفر باشد:

$$M - w.dz\frac{dz}{2} + (S + dS)dz - (M + dM) = 0$$

با ساده سازی و حذف جمله‌های $dS.dz$ و $\frac{w(dz)^2}{2}$ که دیفرانسیل‌هایی از مرتبه بالاتر هستند، داریم:

$$V = \frac{dM}{dz} \qquad (۳-۳)$$

که بیانگر این واقعیت است که نیروی برشی در هر جا برابر شیب یا مشتق منحنی گشتاور است. معادله ۳-۳ برای دو طرف بار متمرکز معتبر است اما نه در محل جفت متمرکز زیرا در اینجا به علت تغییر یکباره گشتاور، ناپیوستگی به وجود می‌آید.

اکنون می‌توان گشتاور را با انتگرال گیری از معادله ۳-۳ بر حسب نیروی برشیS بیان نمود. پس:

$$\int_{M_0}^{M} dM = -\int_{z_0}^{z} V.dx \qquad (٤-۳)$$

لذا اگرw تابعی پیوسته ازx باشد، می‌توان گشتاورM را با دو بار انتگرال‌گیری به دست آورد به شرطی که حدود انتگرال‌گیری در هر لحظه به درستی ارزیابی شده باشد. از این روش تنها وقتی می‌توان استفاده نمود که w تابعی پیوسته ازx باشد به عبارتی:

$$M = \int S.dz + C_2 \qquad (۵-۳)$$

که C_1 ثابت انتگرال‌گیری است.

$$M = \int \left[- \int w(z) dz + C_1 \right] dz + C_2$$

$$M = -\iint w(z) dz + C_1 z + C_2 \qquad (۳-۶)$$

در صورتی که w بار گسترده ثابت باشد:

$$M = -w \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$$

در صورتی که بر روی تیر یک بار متمرکز قرار داشته باشد:

$$M = C_1 z + C_2$$

این معادله نشان می‌دهد که در این حالت معادله لنگر خمشی به صورت خطی در زیر بار متمرکز تغییر می‌کند. ثابت‌های C_1 و C_2 توسط شرایط مرزی تعیین می‌شوند. حال از معادله ۳-٤ بین Z_1 و Z_2 انتگرال بگیرید داریم:

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{dM}{dz} dz = -\int_{z_1}^{z_2} S.dz$$

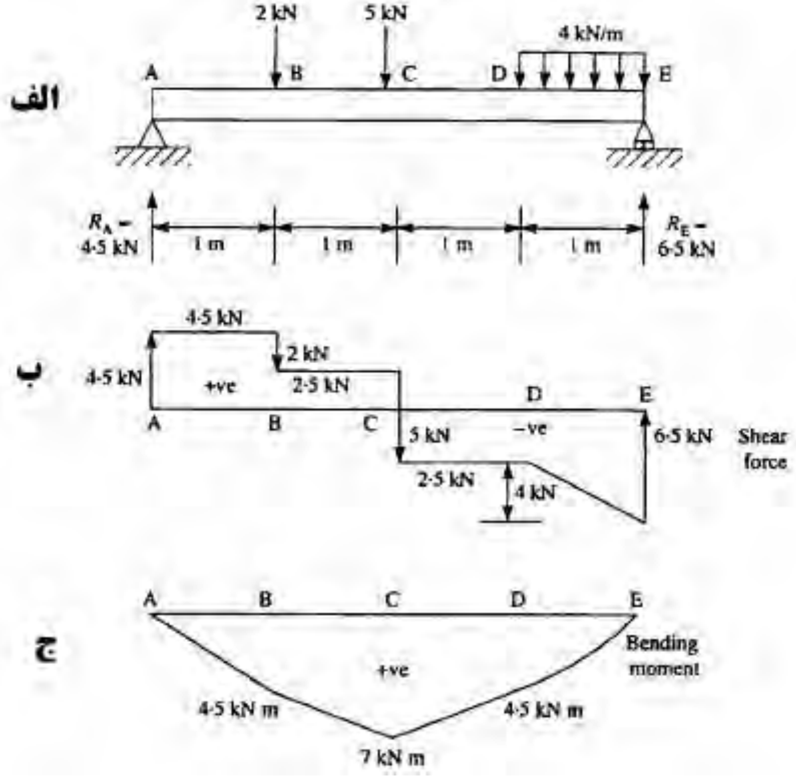
$$M_2 - M_1 = \int_{z_1}^{z_2} S.dz \qquad (۳-۷)$$

که M_1 و M_2 لنگر خمشی در مقطع Z_1 و Z_2 هستند. معادله ۳-۷ نشان می‌دهد که تغییرات لنگر خمشی بین Z_1 و Z_2 برابر مساحت دیاگرام برش است. با استفاده از معادله‌های ۳-۱ و ۳-٤ داریم:

$$\frac{d^2 M}{dz^2} = \frac{dS}{dz} = -w(z) \qquad (۳-۸)$$

یا به عبارت دیگر با دوبار مشتق‌گیری از معادله لنگر به معادله بار می‌رسیم.

مثال ۳-۱۰) دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در تیر شکل ۳-۱۹الف را ترسیم کنید.



شکل۳-۱۹تیر مثال۳-۱۰

حل) در ابتدا با نوشتن معادلات تعادل برای تیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین می‌کنیم. با نوشتن معادله لنگر حول نقطه E مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A تعیین می‌شود.

$$R_A \times 4 - 2\times 3 - 5\times 2 - 4\times 1\times 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 4.5kN$$

حال با نوشتن معادله $\uparrow + \sum F_y = 0$:

$$R_A + R_E - 2 - 5 - 4\times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_E = 6.5kN$$

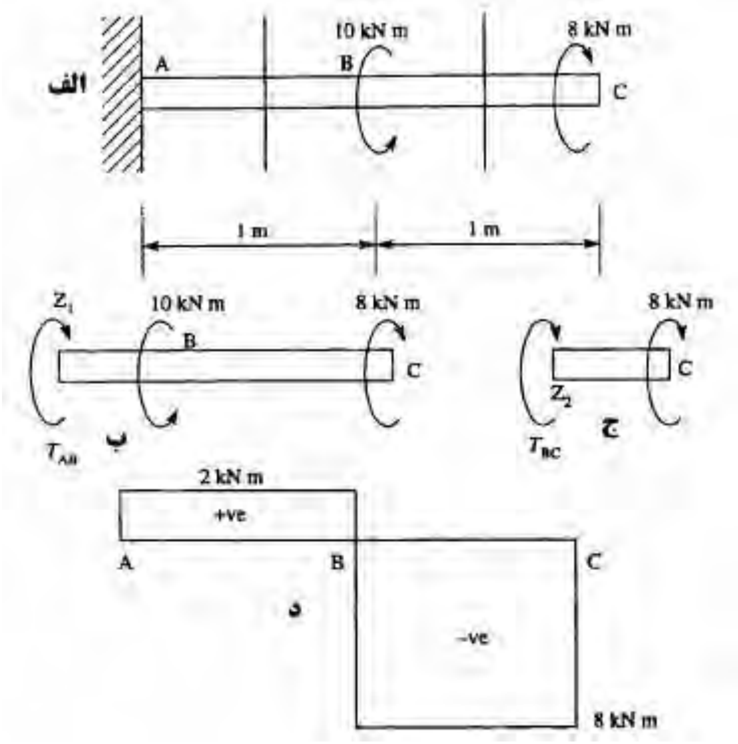
با توجه به تنوع بارگذاری بر روی تیر ما به چهار برش برای تعیین معادله برش و لنگر نیاز داریم. حال می‌خواهیم با استفاده از روابط بدست آمده در بخش قبلی مسئله را حل نماییم: در تکیه‌گاه A یک عکس‌العمل به صورت متمرکز وجود دارد، پس در دیاگرام برش ما یک پرش به اندازه عکس‌العمل خواهیم داشت که در جهت عکس‌العمل خواهد بود، پس به اندازه $4.5kN$ به سمت بالا حرکت می‌کنیم. از A تا B نیرویی وجود ندارد به صورت ثابت

حرکت می‌کنیم. در B یک نیروی متمرکز وجود دارد پس در دیاگرام برش ما یک پرش به اندازه نیرو خواهیم داشت که در جهت نیرو به سمت پایین حرکت می‌کنیم. از B تا C نیرویی وجود ندارد به صورت ثابت حرکت می‌کنیم. در C یک نیروی متمرکز وجود دارد پس در دیاگرام برش ما یک پرش به اندازه نیرو خواهیم داشت که در جهت نیرو به سمت پایین حرکت می‌کنیم. از C تا D نیرویی وجود ندارد به صورت ثابت حرکت می‌کنیم. از D تا E بار گسترده خطی وجود دارد و جهت آن به سمت پایین است پس مساحت بار گسترده به مقدار نیروی برشی اضافه می‌شود. درجه بار از درجه صفر است، پس درجه دیاگرام برش از درجه یک خواهد بود. در انتهای تیر و در تکیه‌گاه E یک نیروی متمرکز ناشی از عکس‌العمل تکیه‌گاهی وجود دارد که در جهت پایین به بالا است پس در دیاگرام برش ما یک پرش به اندازه عکس‌العمل خواهیم داشت که در جهت عکس‌العمل خواهد بود. برای ترسیم دیاگرام لنگر بایستی مساحت دیاگرام برش را از چپ جمع بزنیم و مقادیر مساحت، مقدار لنگر را بدست می‌دهد. توجه کنید که شیب نمودار برش برابر مقدار در دیاگرام لنگر خواهد بود.

۳-۶ پیچش

با عضوهای پیچشی در بسیاری از کارهای مهندسی مواجه می‌شویم. در ساختمان‌ها در تیرهایی که به صورت گیردار به تیرهای عرضی متصل هستند و سطح بارگیر نامتقارن دارند (مانند تیرهای کناری ساختمان‌های بتنی) پیچش بوجود می‌آید. پیچش در یک مقطع سبب ایجاد تنشهای برشی در آن می‌شود که توزیع آن به شکل هندسی مقطع وابسته است. ساده‌ترین مقطع برای تعیین توزیع پیچش در آن دایره است.

مثال ۳-۱۱) دیاگرام لنگر پیچشی را در شکل ۳-۲۰الف ترسیم کنید.



شکل ۳-۲۰ تیر مثال۳-۱۱

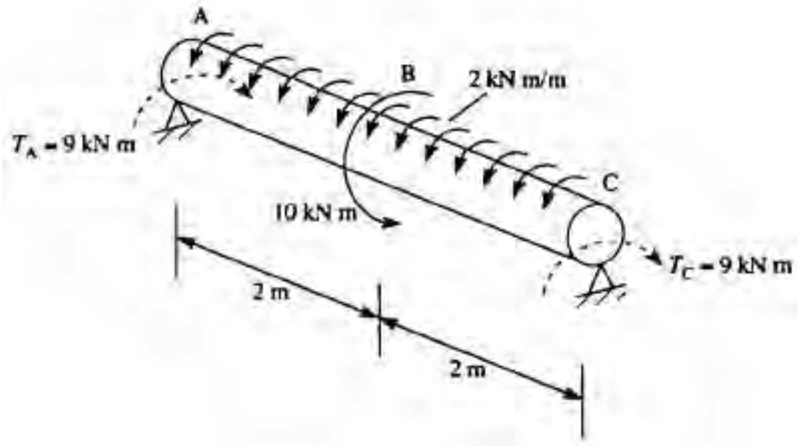
حل) با توجه به شکل دیده می‌شود که بارگذاری در نقطه B دچار ناپیوستگی است، پس به دو برش مطابق شکل ۳-۲۰ب و ج نیاز داریم. در شکل ۳-۲۰ب با نوشتن معادله تعادل داریم:

$$T_{AB} - 10 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{AB} = +2kN.m$$

همچنین در شکل ۳-۲۰ج داریم:

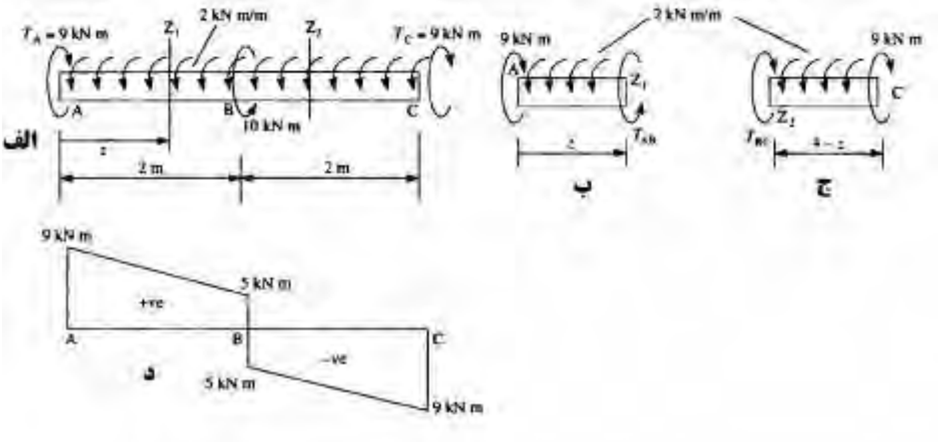
$$T_{BC} + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC} = -8kN.m$$

مثال ۳-۱۲) تیر نشان داده شده در شکل۳-۲۱ لنگر گسترده‌ای به شدت *2kN.m/m* و یک لنگر متمرکز به مقدار *10kN.m* را حمل می‌کند. دیاگرام لنگر پیچشی را برای تیر نشان داده شده رسم کنید.



شکل۳-۲۱

حل) با نوشتن معادله تعادل مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌های A و C هر دو به مقدار $T_A=T_C=9kN.m$ بدست می‌آیند. با توجه به شکل ۳-۲۲ به دو برش برای تعیین معادله لنگر پیچشی در تیر نیاز داریم.



شکل ۳-۲۲

در شکل ۳-۲۲ب داریم:

$$T_{AB}+2z-9=0 \quad \Rightarrow \quad T_{AB}=9-2z$$

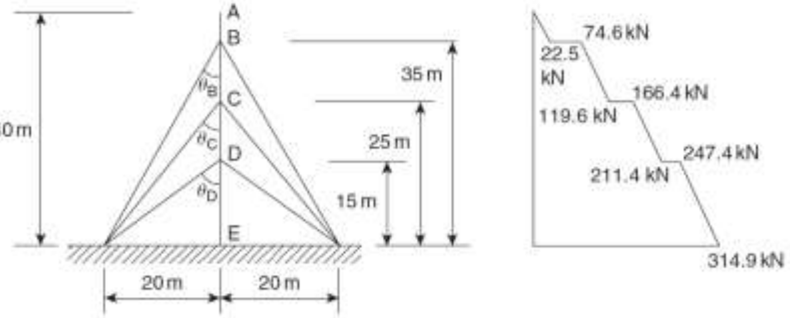
در شکل ۳-۲۲ج داریم:

$$T_{BC}+2(4-z)+9=0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC}=-2z-1$$

مساله‌ها

۱) یک دکل به ارتفاع *40* متر و وزن *4.5kN/m* توسط سه کابل نگه داشته شده است که در ارتفاع‌های *15*، *25* و *35* متری دکل را مهار نموده‌اند. پای این کابل‌ها به فاصله *20* متری از دکل قرار دارد. در صورتی که نیروی داخلی هر کابل برابر *15kN* باشد، دیاگرام نیروی محوری در دکل را ترسیم کنید.

حل) در شکل زیر دکل به همراه کابل‌های متصل به آن نمایش داده شده است. با توجه به شکل مقادیر زوایای کابل‌ها برابر است با:



$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{20}{35}\right) = 29.7^\circ$$

$$\theta_C = \tan^{-1}\left(\frac{20}{25}\right) = 38.7^\circ$$

$$\theta_D = \tan^{-1}\left(\frac{20}{15}\right) = 53.1^\circ$$

مقدار نیروی محوری در دکل داخلی ناشی از نیروهای کابل و وزن خود دکل می‌باشد. با زدن برش در هر قسمت و نوشتن معادلات تعادل برای قسمت بریده شده، نیروهای داخلی تعیین می‌گردد. در ابتدا یک برش در بالای B می‌زنیم:

$$N = 5 \times 4.5 = 22.5kN$$

مقطع پایین B:

$$N = 22.5 + 4 \times 15\cos 29.7^\circ = 74.6kN$$

برش در بالای C:

$$N = 74.6 + 10 \times 4.5 = 119.6kN$$

برش در پایین C:

$$N = 119 + 4 \times 15 \cos 38.7^{\circ} = 166.4kN$$

برش در بالای D:

$$N = 116.4 + 10 \times 4.5 = 211.4kN$$

برش در پایین D:

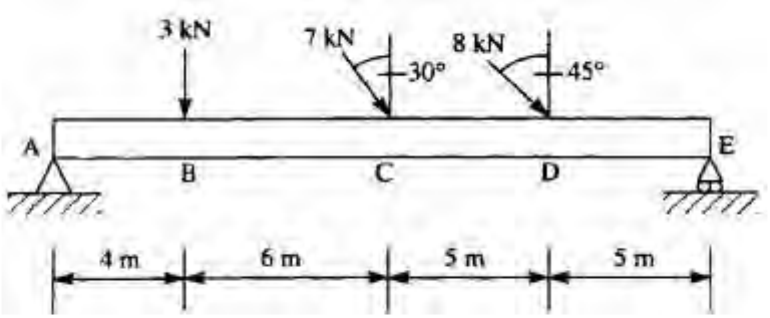
$$N = 211.4 + 4 \times 15 \cos 53.1^{\circ} = 247.4kN$$

در نهایت با زدن یک برش در بالای E داریم:

$$N = 247.4 + 15 \times 4.5 = 314.9kN$$

دیاگرام توزیع نیروی محوری در شکل نشان داده شده است.

۲) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.



حل) گام نخست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر است. مقدار نیروی محوری در طول تیر و مابین A تا C ثابت و برابر $N_{AC}=9.2kN$ می‌باشد.

$$N_{CD} = 9.2 - 3.5 = 5.7kN$$

$$N_{DE} = 9.2 - 3.5 - 5.7 = 0$$

برای تعیین نیروهای برشی، در هر جایی که شرایط بارگذاری تغییر کند یک برش می‌زنیم.

با زدن یک برش مابین A و B مقدار برش در این قسمت برابر است با:

$$S_{AB} = -R_{A,V} = -6.9kN$$

با زدن یک برش مابین B و C مقدار برش در این قسمت برابر است با:

$$S_{BC} = -6.9 + 3 = -3.9kN$$

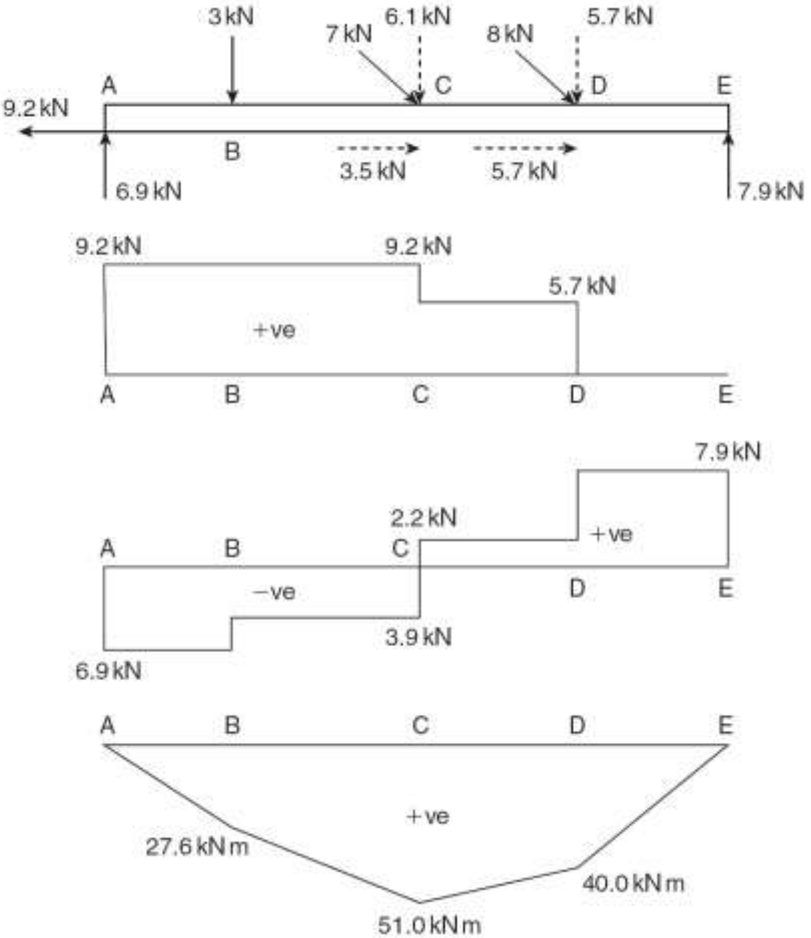
با زدن یک برش مابین C و D مقدار برش در این قسمت برابر است با:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$S_{CD} = -6.9 + 3 + 6.1 = 2.2kN$

در نهایت با زدن یک برش مابین D و E مقدار برش در این قسمت برابر است با:

$S_{DE} = +R_E = 7.9kN$



برای تعیین لنگر خمشی توجه داشته باشید که مقدار لنگر در تکیه‌گاه‌های تیر که به صورت مفصلی می‌باشند برابر صفر است. در B:

$M_B = 6.9 \times 4 = 27.6kN.m$

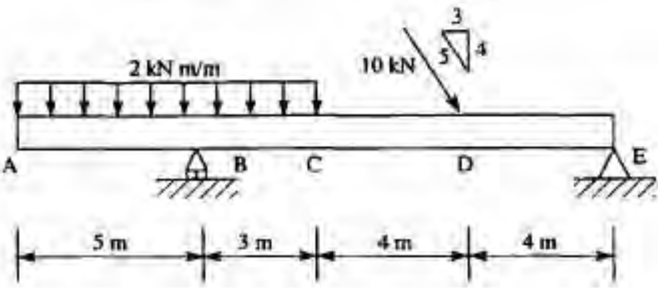
$M_C = 6.9 \times 10 - 3 \times 6 = 51.0kN.m$

$M_C = 6.9 \times 15 - 3 \times 11 - 6.1 \times 5 = 40kN.m$

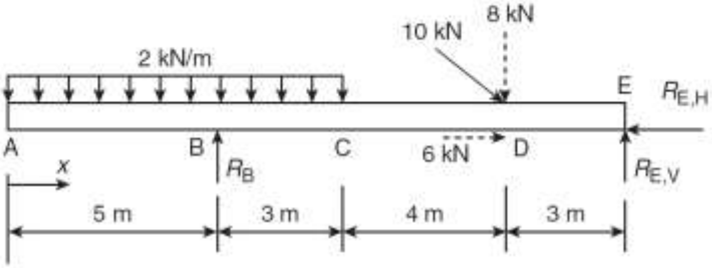
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

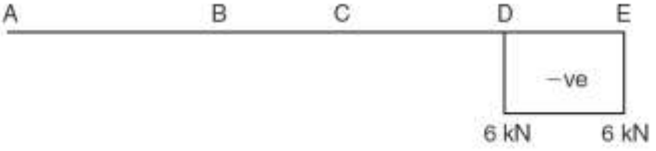
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است
Web: www.M-Alirezaei.com

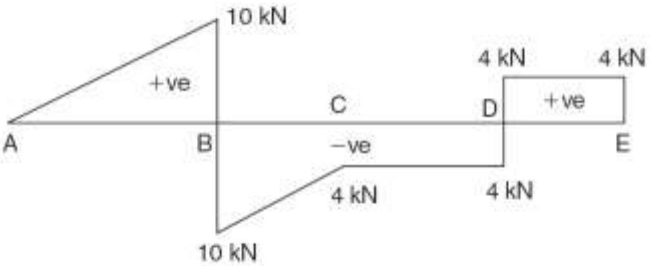
۳) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.

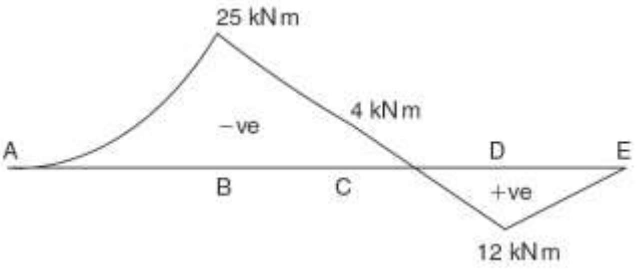


حل) در شکل زیر مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی نشان داده شده است.









کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

نیروی متمرکز $10kN$ که به صورت مورب بر روی تیر اعمال می‌شود به دو مولفه تجزیه شده است. با گشتاورگیری حول E داریم:

$$R_B \times 10 - 2\times 8\times 11 - 8\times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 20kN$$

حال با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_{E,V} + R_B - 2\times 8 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{E,V} = 4kN$$

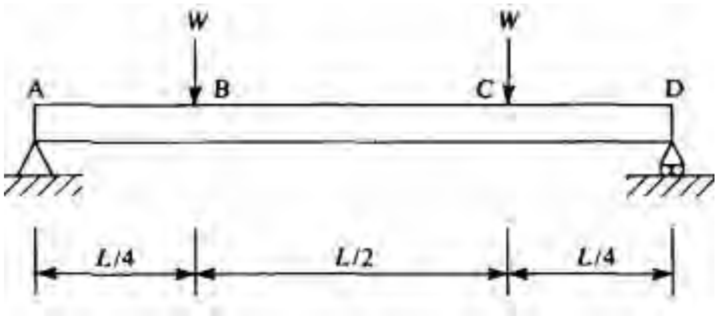
مقدار نیروی محوری مابین A تا D برابر صفر است. تنها مابین DE به اندازه عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه E نیروی محوری وجود دارد. برای تعیین نیروی برشی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$S_{AB} = +2x$$
$$S_{BC} = +2x - R_B = 2x - 20$$
$$S_{CD} = 2\times 8 - 20 = -4kN$$
$$S_{DE} = +R_{E,V} = +4kN$$

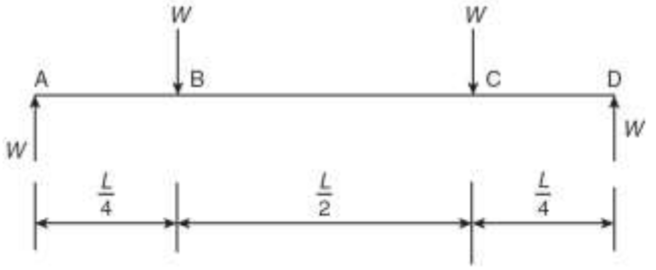
با زدن مقطع در هر موقعیت به فاصله x از بر تکیه‌گاه و گرفتن لنگر حول محل برش خورده داریم:

$$M_{AB} = -2x\left(\frac{x}{2}\right) = -x^2$$
$$M_{BC} = -x^2 + R_B(x-5) = -x^2 + 20(x-5)$$

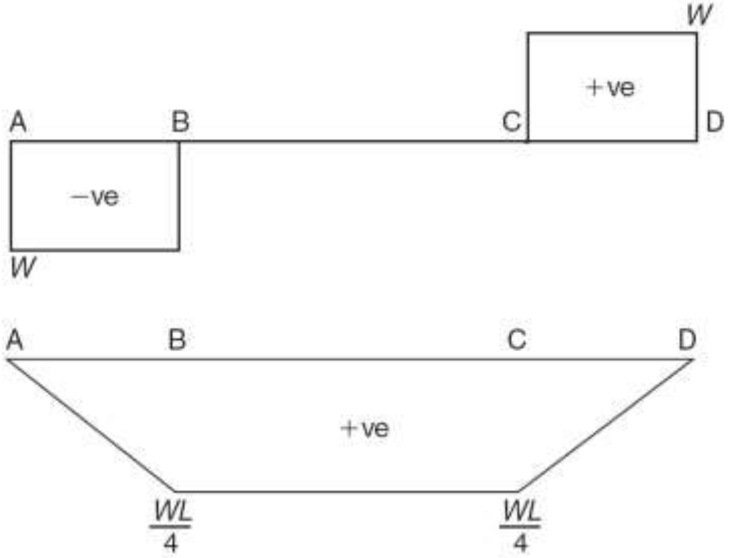
٤) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



حل) به علت تقارن مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی هر دو برابر W می‌باشند. در طول BC مقدار برش برابر صفر است و در عوض لنگر برای این ناحیه ثابت است. در شکل زیر دیاگرام آزاد تیر و دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی ترسیم شده است.

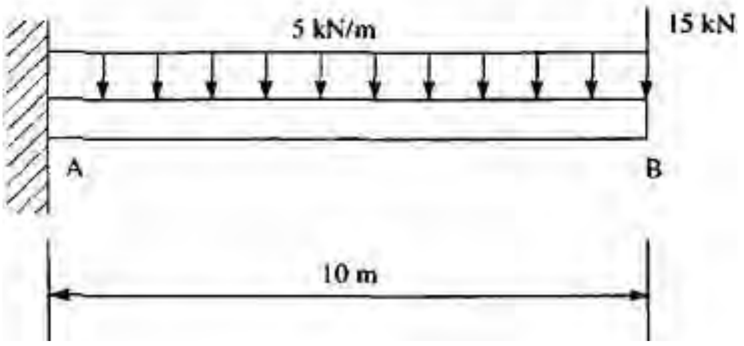


دیاگرام آزاد جسم

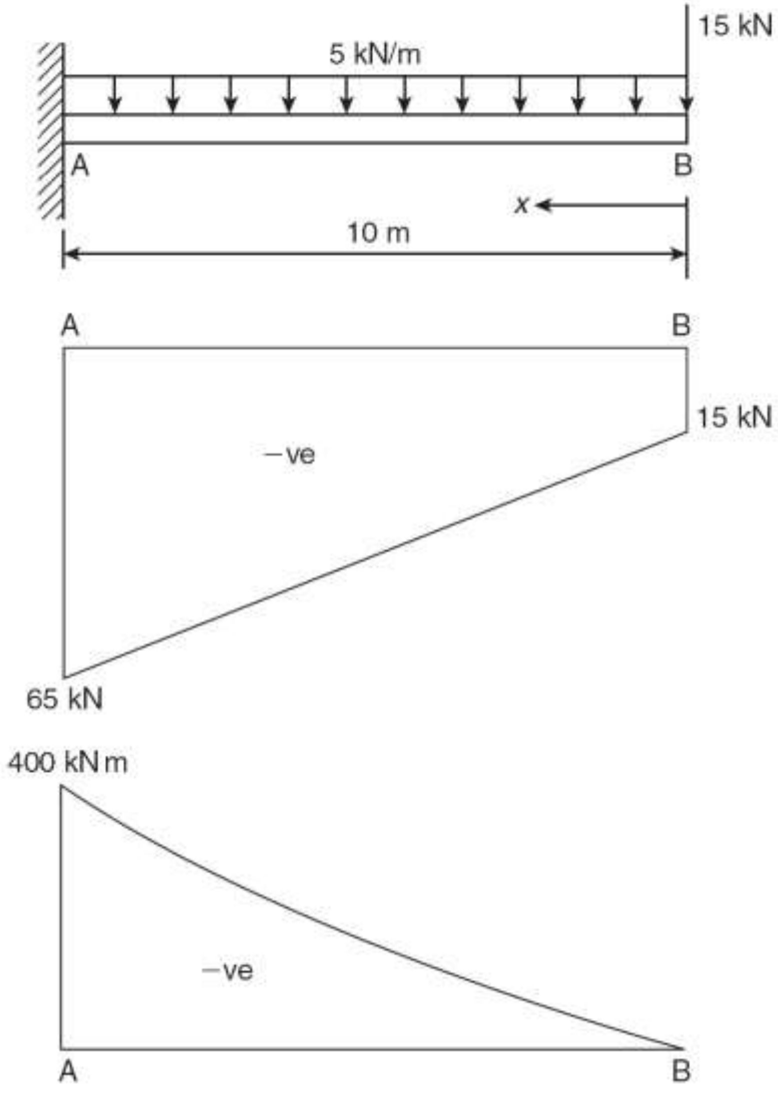


دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی

۵) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.



حل) گام نخست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر است.

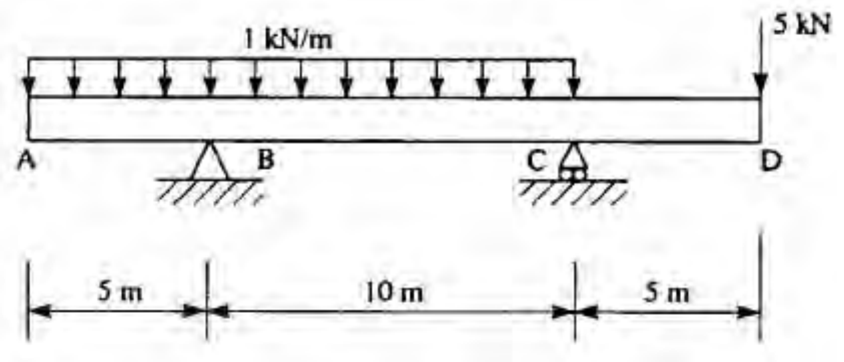


با زدن تنها یک برش و نوشتن معادلات تعادل می‌توان دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را مانند شکل بالا ترسیم نمود.

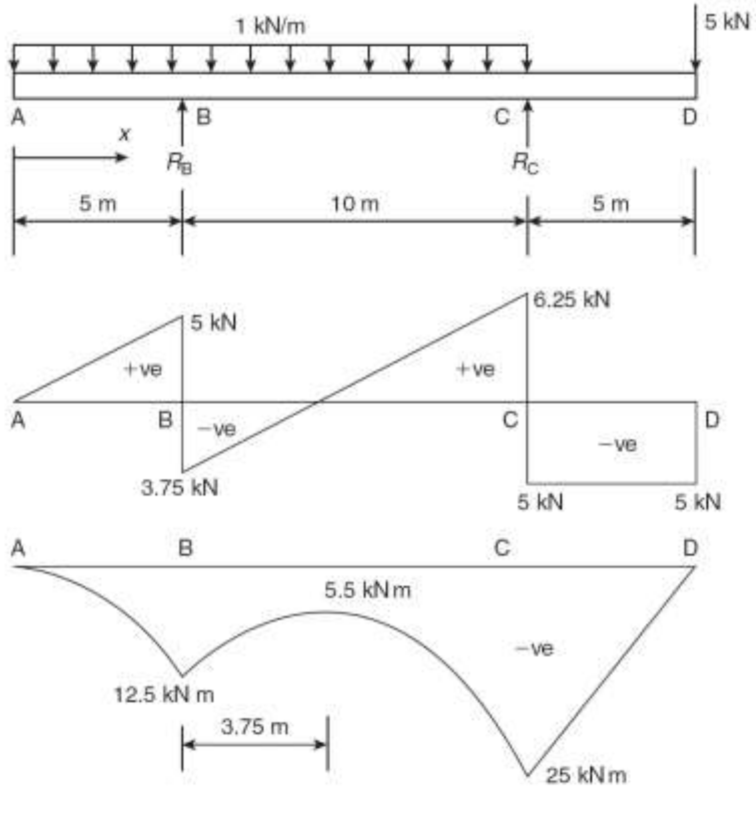
$$S_{AB} = -15 - 5x$$

$$M_{AB} = -15x - 5x\left(\frac{x}{2}\right) = -15x - \frac{5x^2}{2}$$

۶) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



حل) گام نخست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر است. بدین منظور با گشتاوری گیری حول C مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی B تعیین می‌شود و در نهایت با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی و قائم مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی قائم C و افقی B تعیین می‌شود.



$$R_B \times 10 - 1\times 15\times 7.5 + 5\times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 8.75\,kN$$

$$R_C + R_B - 1\times 15 - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = 11.25kN$$

برای بدست آوردن معادله برش و لنگر در هر محدوده‌ای که شرایط بارگذاری تغییر می‌کند با زدن یک برش و نوشتن معادلات تعادل داریم:

$$S_{AB} = +1x$$

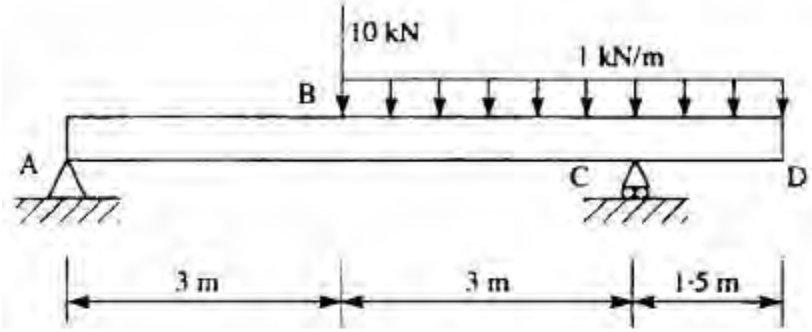
$$S_{BC} = +1x - R_B = x - 8.75$$

$$S_{CD} = -5kN$$

$$M_{AB} = -1x\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{2}$$

$$M_{BC} = \left(-\frac{x^2}{2}\right) + R_B(x-5) = -0.5x^2 + 8.75(x-5)$$

۷) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید.



حل) گام نخست تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر است. بدین منظور با گشتاوری گیری حول C مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A تعیین می‌شود و در نهایت با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی و قائم، مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی قائم C و افقی A تعیین می‌شود.

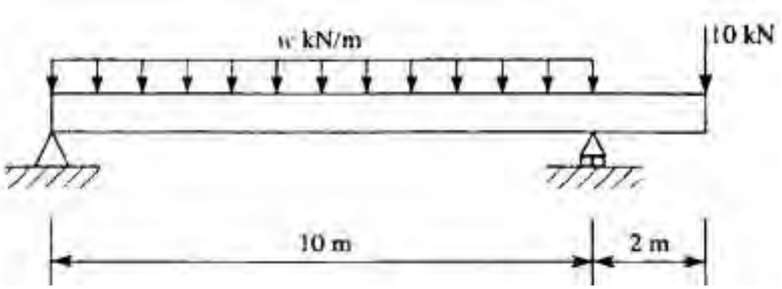
$$R_A \times 6 - 10\times 3 - 1\times 4.5\times 0.75 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 5.6kN$$

$$R_A + R_A - 10 - 1\times 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C = 8.9kN$$

برای بدست آوردن توزیع برش و لنگر، در هر محدوده‌ای که شرایط بارگذاری تغییر می‌کند برش زده و معادلات تعادل نوشته می‌شود. در محدوده AB نیروی برشی معادل عکس‌العمل تکیه‌گاهی A است.

$$S_{AB}=-R_A=-5.6kN$$
$$S_{BC}=-R_A+10+1(x-3)=1.4+x$$
$$M_{AB}=-R_A\times 3=5.6\times 3=16.8kN.m$$
$$M_{BC}=5.6x-10(x-3)-\frac{1(x-3)^2}{2}=-1.4x-0.5x^2+25.5$$

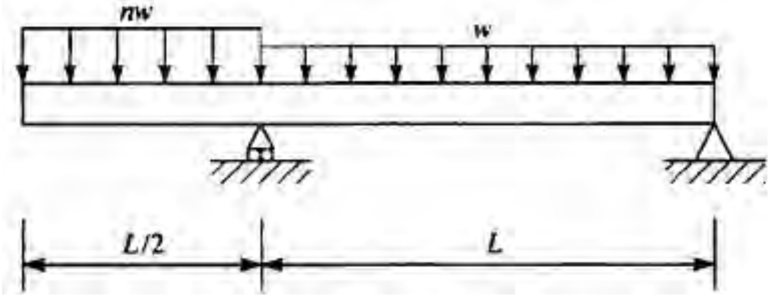
۸) مقدار شدت بار w را طوری بیابید که حداکثر لنگر ایجاد شده در تیر به فاصله *10/3m* از تکیه‌گاه سمت چپ ایجاد شود.



حل) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A با گشتاورگیری حول B بدست می‌آید:

$$R_A\times 10-w\times 10\times 5+10\times 2=0 \quad \Rightarrow \quad R_A=5w-2$$
$$S_{AB}=-(5w-2)+wx$$
$$M_{AB(\max)}=(5\times 1.2-2)\times\frac{10}{3}-1.2\times\frac{\left(\frac{10}{3}\right)^2}{2}=6.7kN.m$$

۹) مقدار n در شکل زیر را طوری بیابید که حداکثر لنگر ایجاد شده در تیر به فاصله *L/3* از بر تکیه‌گاه سمت راست ایجاد شود.



حل) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A با گشتاورگیری حول B بدست می‌آید:

$$R_A L - nw\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{5L}{4}\right) - wL\left(\frac{L}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{wL(5n+4)}{8}$$

مقدار برش بین A و B به صورت زیر با یک برش و نوشتن معادله تعادل به دست می‌آید:

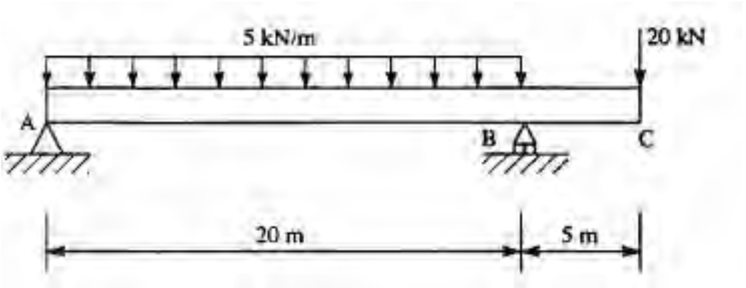
$$S_{AB} = -R_A + nw\left(\frac{L}{2}\right) + wL\left(\frac{L}{2}\right) + wx =$$

$$-wL\frac{5n+4}{8} + nw\frac{L}{2} + wx = -nw\frac{L}{8} - w\frac{L}{2} + wx$$

در جایی که لنگر حداکثر باشد، برش در آن برابر صفر است. پس:

$$n = \frac{4}{3}$$

۱۰) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی را ترسیم کنید. همچنین مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده را محاسبه کنید.



حل) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی A با گشتاورگیری حول B بدست می‌آید:

$$R_A \times 20 - 5 \times 20 \times 10 + 20 \times 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 45kN$$

$$R_A + R_A - 5 \times 20 - 20 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 75kN$$

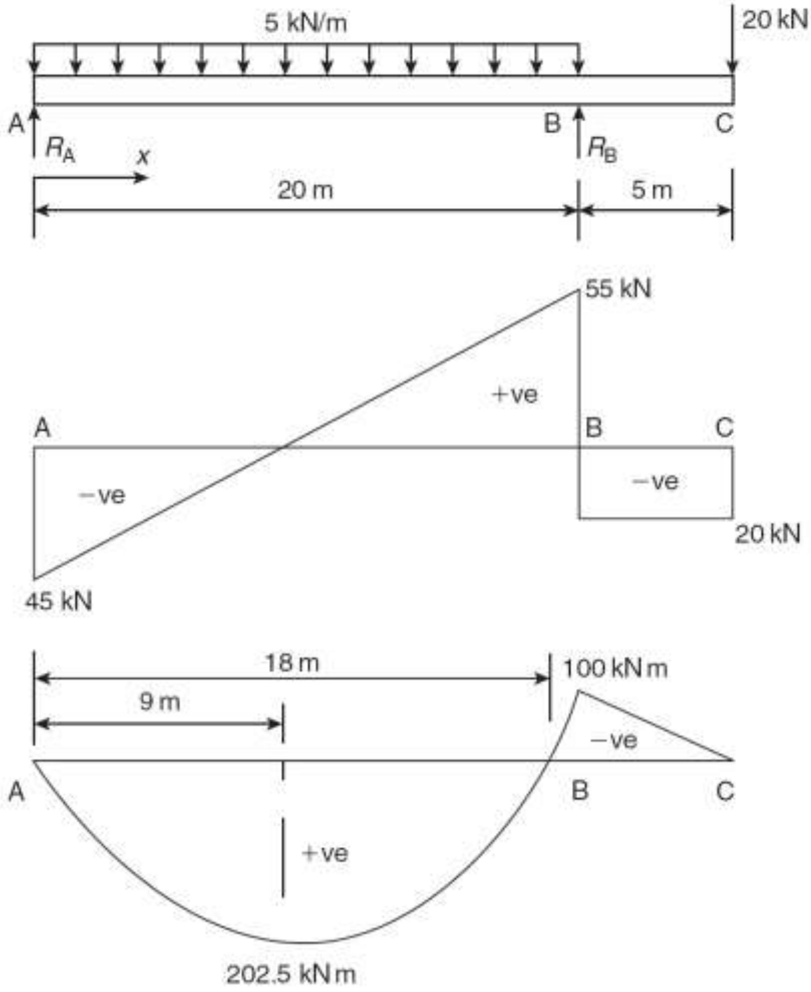
مقدار برش بین A و B به صورت زیر با یک برش و نوشتن معادله تعادل حاصل می‌شود:

$$S_{AB} = -R_A + 5x = -45 + 5x$$

$$M_{AB} = 45x - \frac{5x^2}{2}$$

$$M_{AB(\max)} = 202.5kN.m$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



۱۱) مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده در یک تیر دو سر ساده به دهانه *8* متر که بر روی آن در کل طول یک بار گسترده خطی یکنواخت به مقدار *100kN* و یک بار گسترده دیگر که به فاصله *2* متری از تکیه‌گاه سمت چپ و به مقدار *120kN* قرار دارد را تعیین کنید. همچنین مقدار لنگر در وسط دهانه تیر بیابید.

حل) با گشتاورگیری حول B

$$R_A \times 8 - 100 \times 4 - 120 \times 4.75 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 121.25kN$$

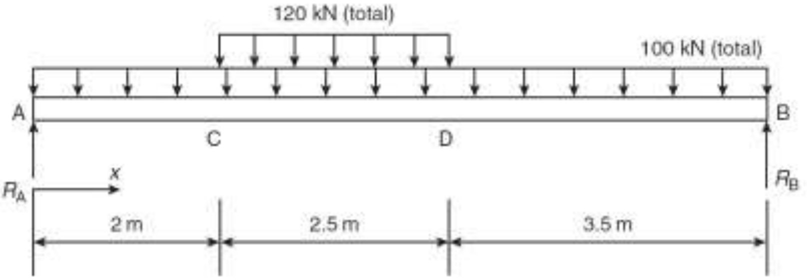
$$S_{CD} = -121.25 + 100\frac{x}{8} + \frac{120(x-2)}{2.5} = -217.25 + 60.5x$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$M_{AB(\max)} = 121.25 \times 3.6 - \left(\frac{100}{8}\right)\frac{3.6^2}{2} - \left(\frac{120}{2.5}\right)\frac{(3.6-2)^2}{2} = 294.1 kN.m$$

مقدار لنگر در وسط دهانه برابر است با:

$$M_{AB} = 121.25 \times 4 - \left(\frac{100}{8}\right)\frac{4^2}{2} - \left(\frac{120}{2.5}\right)\frac{(4-2)^2}{2} = 289 kN.m$$



۱۲) برای یک تیر دو سر ساده به دهانه *6* متر که بر روی آن یک بار گسترده خطی به صورت مثلثی و با مقدار حداقل صفر و حداکثر *2kN/m* اعمال می‌شود، دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.

حل) با گشتاورگیری حول B

$$R_A \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 \times 2 \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 2kN$$

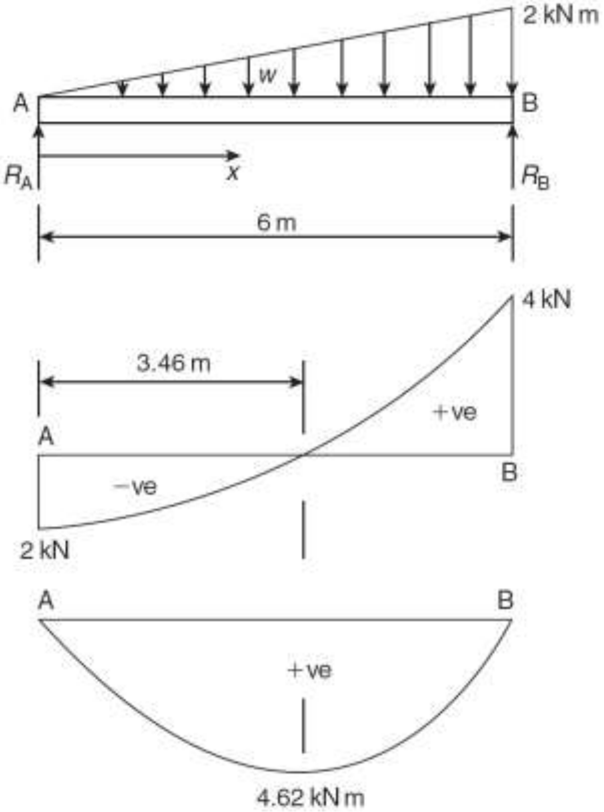
مقدار برش بین A و B به صورت زیر با یک برش و نوشتن معادله تعادل بدست می‌آید:

$$S_{AB} = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)xw$$

$$M_{AB} = -2x + \left(\frac{1}{2}\right)xw\left(\frac{x}{3}\right) = 2x - \frac{x^3}{18}$$

$$M_{AB(\max)} = 4.62 kN.m$$

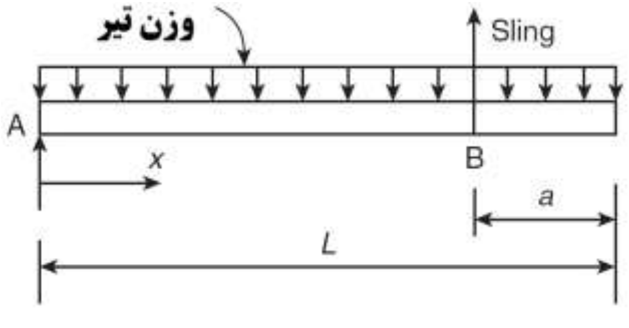
دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی تیر در شکل زیر ترسیم شده است.



۱۳) یک تیر پیش ساخته بتنی به طول L داریم. نشان دهید که برای بلندکردن این تیر به وسیله یک قلاب، بهترین فاصله برابر *0.29* متر از انتهای آن است.

حل) با گشتاورگیری حول B

$$R_A(L-a)-wL\left(\frac{L}{2}-a\right)=0$$



$$R_A = wL\frac{\left(\frac{L}{2}-a\right)}{L-a}$$

مقدار برش بین A و B به صورت زیر با یک برش و نوشتن معادله تعادل بدست می‌آید:

$$S_{AB} = -R_A + wx = -wL\frac{\left(\frac{L}{2}-a\right)}{L-a} + wx$$

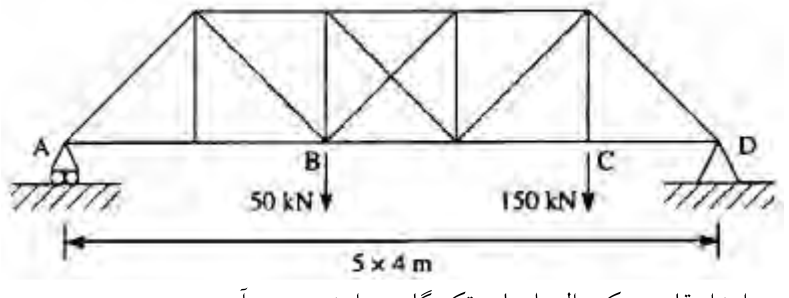
مقدار حداکثر لنگر در جایی اتفاق می‌افتد که مقدار برش برابر صفر باشد:

$$x = L\frac{\left(\frac{L}{2}-a\right)}{L-a}$$

$$M_{AB(\max)} = R_A L\frac{\left(\frac{L}{2}-a\right)}{L-a} - \frac{w}{2}\left[\frac{L\left(\frac{L}{2}-a\right)}{L-a}\right]^2$$

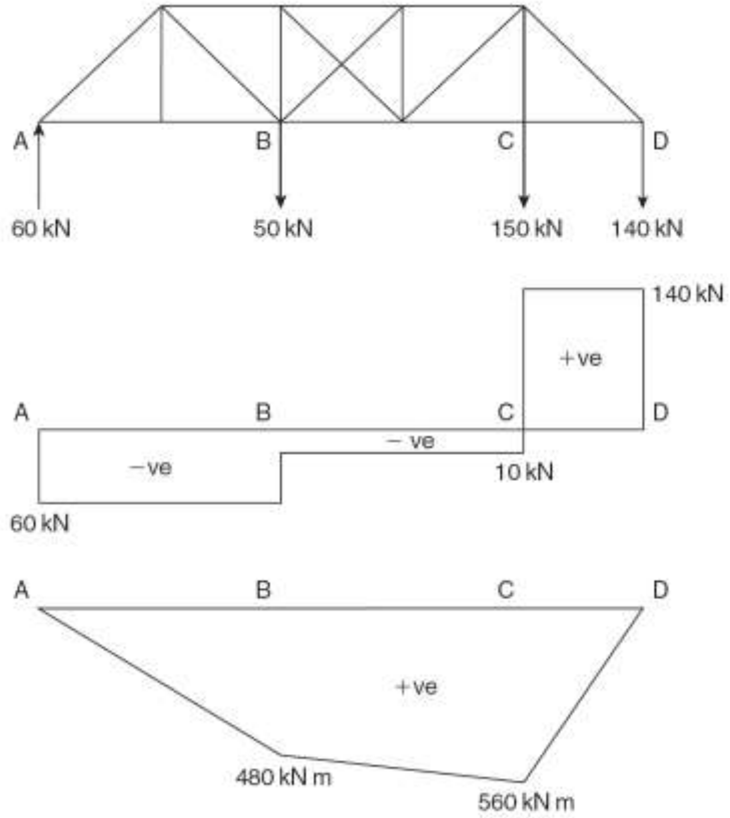
$$2a^2 - 4aL + L^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 0.29L$$

۱٤) برای قاب زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.

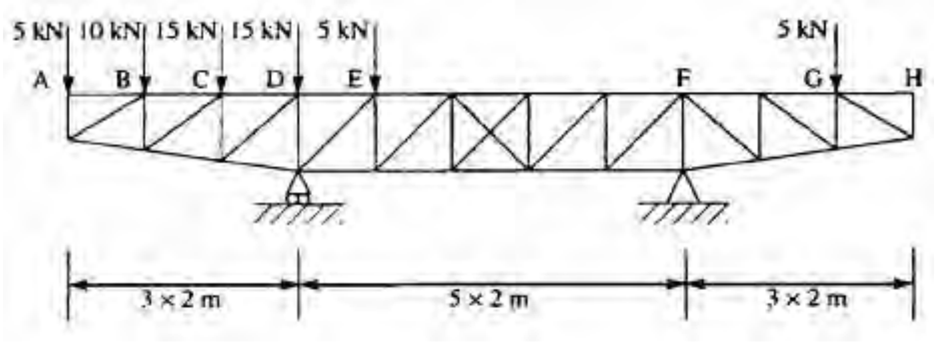


حل) در ابتدا مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم:

بین A تا B مقدار برش ثابت و برابر با عکس‌العمل تکیه‌گاهی A می‌باشد. در A به اندازه عکس‌العمل تکیه‌گاهی A به سمت بالا حرکت می‌کنیم. در B یک نیروی متمرکز به مقدار $50kN$ به سمت پایین در حال اعمال شدن است. این نیرو باعث ایجاد یک پرش در دیاگرام برش می‌شود. از B تا C هیچ گونه باری نداریم، بنابراین به صورت ثابت حرکت می‌کنیم و در C یک نیروی متمرکز به مقدار $150kN$ باعث ایجاد یک پرش در دیاگرام برش می‌شود.

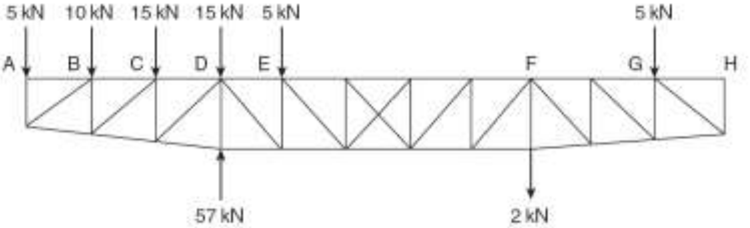


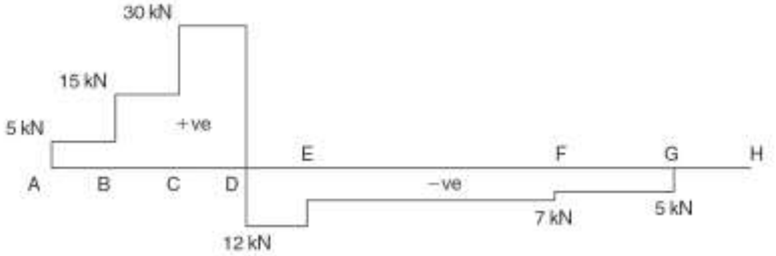
۱۵) برای قاب زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را ترسیم کنید.

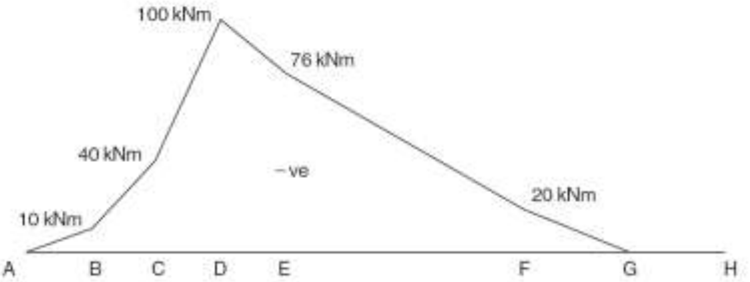


حل) در ابتدا مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم. با گشتاورگیری حول یکی از تکیه‌گاه‌ها مقدار عکس‌العمل قائم دیگری بدست می‌آید. سپس با روش ارئه شده

در مثال قبل دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری را مانند شکل زیر ترسیم می‌کنیم.







$$S_{AB} = +5kN$$

$$S_{BC} = +5 + 10 = +15kN$$

$$S_{CD} = +5 + 10 + 15 = +30kN$$

$$S_{DE} = +5 + 10 + 15 + 15 - 57 = -12kN$$

$$S_{EF} = +5 + 10 + 15 + 15 - 57 + 5 = -7kN$$

$$S_{EF} = -5kN$$

$$S_{GH} = 0$$

$$M_A = M_G = M_H = 0$$

$M_B = -5\times 2 = -10kN.m$

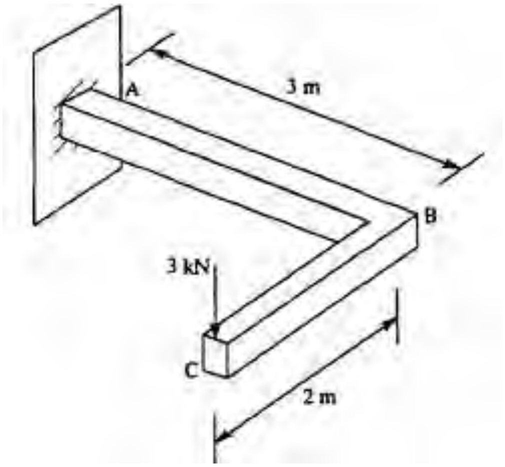
$M_C = -5\times 4 - 10\times 2 = -40kN.m$

$M_D = -5\times 6 - 10\times 4 - 15\times 2 = -100kN.m$

$M_E = -5\times 12 - 2\times 8 = -76kN.m$

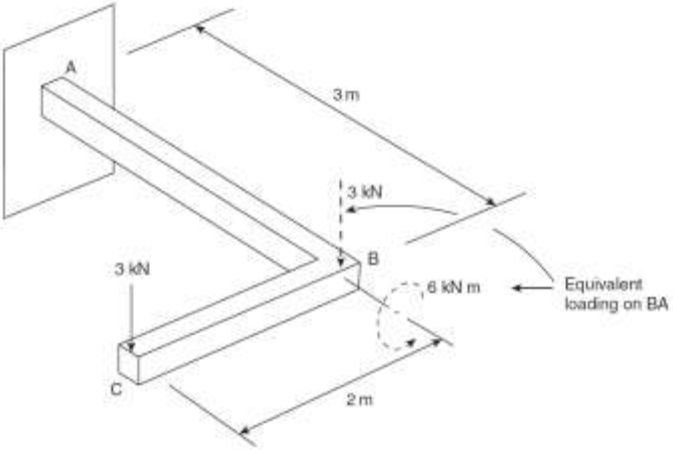
$M_F = -5\times 4 = -20kN.m$

۱۶) برای تیر زیر دیاگرام نیروی برشی، لنگر خمشی و لنگر پیچشی را ترسیم کنید.

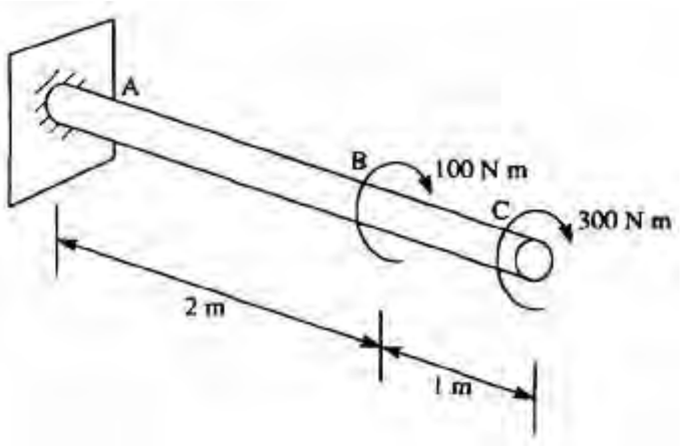


حل) قسمت CB : در این قسمت مقدار برش ثابت و برابر $+3kN$ می‌باشد. در C مقدار لنگر برابر صفر و در B برابر $6kN.m$ می‌باشد.

قسمت AB : در این قسمت مقدار برش ثابت و برابر $-3kN$ می‌باشد

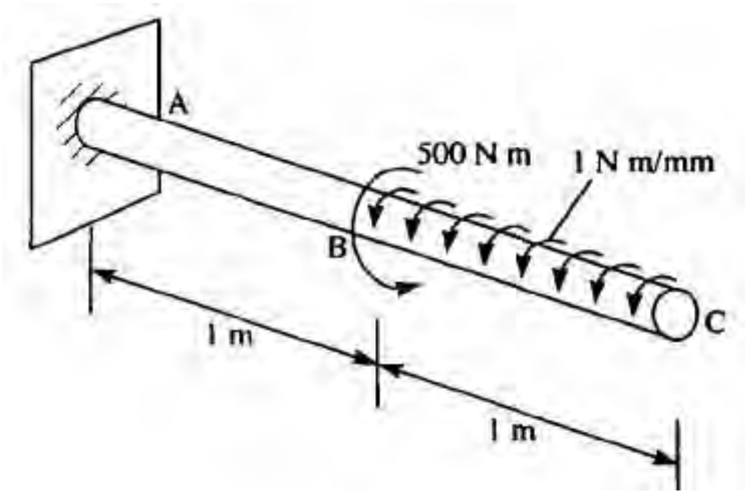


۱۷) دیاگرام لنگر پیچشی را برای تیر زیر رسم کنید.

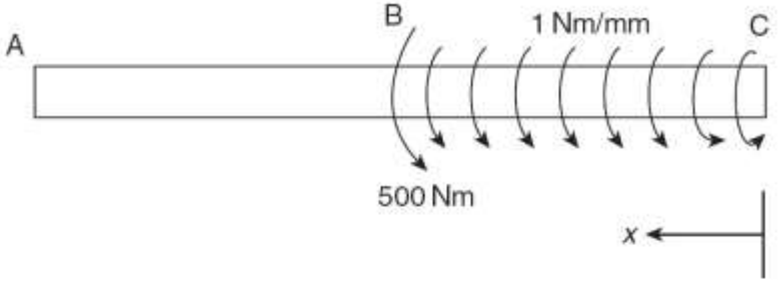


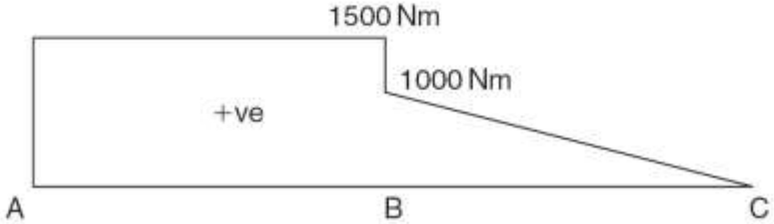
در قسمت CB مقدار پیچش ثابت و برابر $-300N.m$ است. در قسمت AB نیز مقدار پیچش ثابت و برابر $-400N.m$ می‌باشد.

۱۸) دیاگرام لنگر پیچشی را برای تیر زیر رسم کنید.

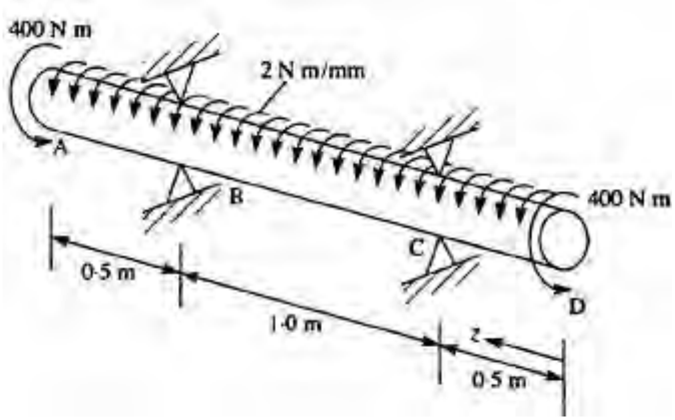


حل) مقدار پیچش در اثر گشتاور پیچشی گسترده برابر $T_{CB}=1x$ است. که در آن T بر حسب $N.m$ و x بر حسب mm می‌باشد. وقتی که $x=0$ باشد، $T_{CB}=0$ است و وقتی که $x=1$ باشد، $T_{CB}=1000\,N.m$ خواهد بود. در قسمت BA مقدار پیچش ثابت و برابر $1\times1000+500=1500\,N.m$ است. در شکل زیر دیاگرام نیروی پیچشی در طول تیر نشان داده شده است.





۱۹) دیاگرام لنگر پیچشی را برای تیر زیر رسم کنید.



حل) مقدار پیچش در به فاصله x از D برابر است با:

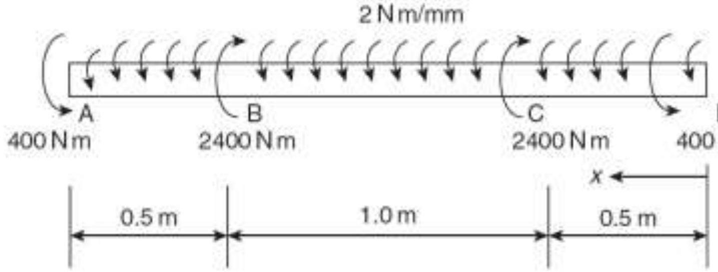
$$T_{DC} = 400 \times 2x$$

که در آن T بر حسب $N.m$ و x بر حسب mm می‌باشد. وقتی که $x=0$ باشد، $T_{DC} = 400\,N.m$ است و وقتی که $x=0.5m$ باشد، $T_{DC} = 1400\,N.m$ خواهد بود. به همین ترتیب مقدار گشتاور در CB برابر است با:

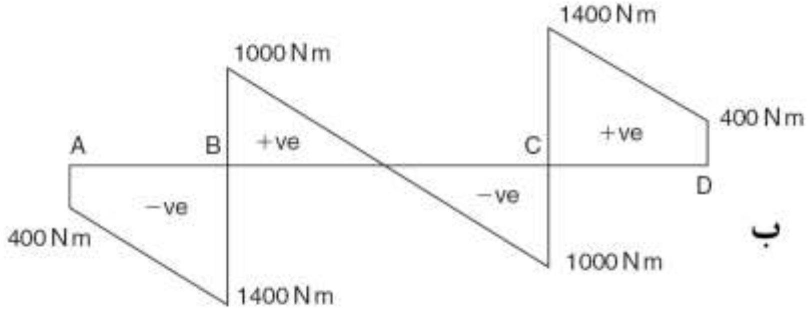
$$T_{CB} = 400 \times 2x - 2400 = 2x - 2000$$

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

وقتی که $x=0.5m$ باشد، $T_{CB}=-1000\,N.m$ خواهد بود.



الف



ب

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

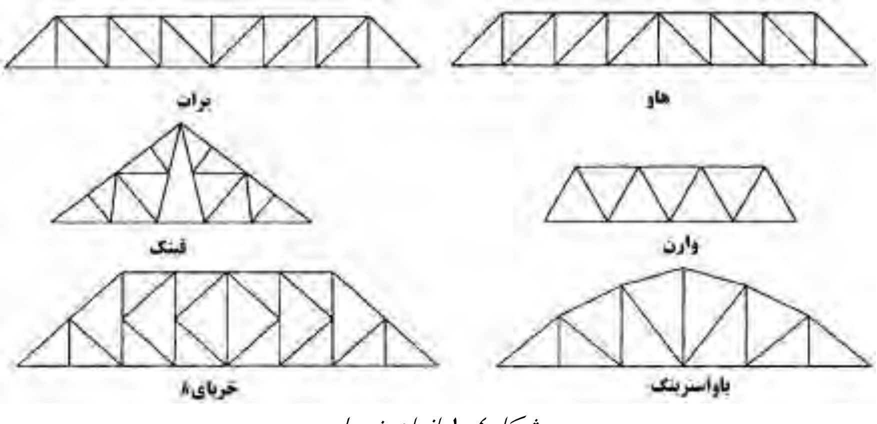
فصل چهارم
تحلیل خرپاها

در فصل اول در مورد انواع سازه‌ها بحث نمودیم و گفتیم که برای پوشش دهانه‌های نسبتاً بلند استفاده از تیر از نظر اقتصادی توجیه پذیر نیست و معمولاً از خرپا استفاده می‌شود. این سازه‌ها شامل اعضایی هستند که در ابتدا و انتهای خود با هم مرتبط هستند.

در ابتدای این فصل در مورد انواع خرپاها و عملکرد آنها و نحوه ایده‌آل سازی آنها برای تحلیل بحث می‌کنیم و در نهایت نحوه بدست آوردن نیروهای داخلی آنها را شرح خواهیم داد.

٤-١ انواع خرپا

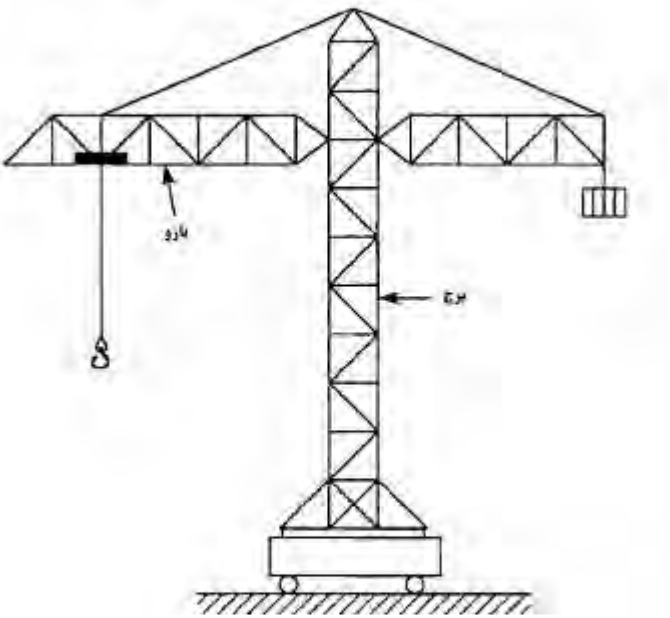
معمولاً شکل خرپا به هدف طراحی آن بستگی دارد. در شکل٤-١ انواع خرپاهای متداول نشان داده شده است.



شکل٤-١ انواع خرپا

اعضای خرپا با اتصال به یکدیگر اشکال سه بعدی ایجاد می‌کنند. برای مثال در شکل٤-٢ بازوی جرثقیل از تعدادی میله تشکیل شده که اتصال آنها به یکدیگر یک شکل جعبه‌ای ایجاد نموده است. اعضای خرپا باید طوری به هم متصل شوند که اشکال مثلثی ایجاد کنند.

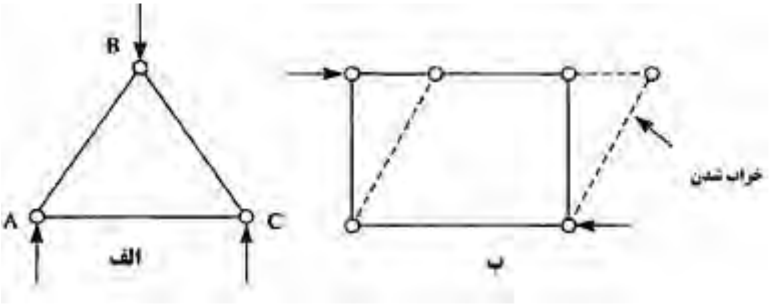
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ٤-٢سازه یک جرثقیل

٤-٢ فرضیات اساسی در تحلیل خرپا

با نگاه به شکل٤-١ دیده می‌شود که خرپا متشکل از یک سری اعضای مثلثی است. اعضای خرپا در انتها توسط مفصل یا پین به یکدیگر متصل شده‌اند این نوع اتصال شکل ٤-٣الف نشان داده شده است. در شکل٤-٣ب یک چهار عضو میله‌ای دیده می‌شوند که در انتهای خود توسط پین به یکدیگر متصل شده‌اند. دیده می‌شود که در صورتی که به این سازه نیرویی وارد شود به راحتی و بدون هیچ مقاومتی خراب می‌شود و پایداری خود را از دست می‌دهد ولی شکل مثلثی همچنان پایدار است.



شکل ٤-٣ واحد اساسی خرپا

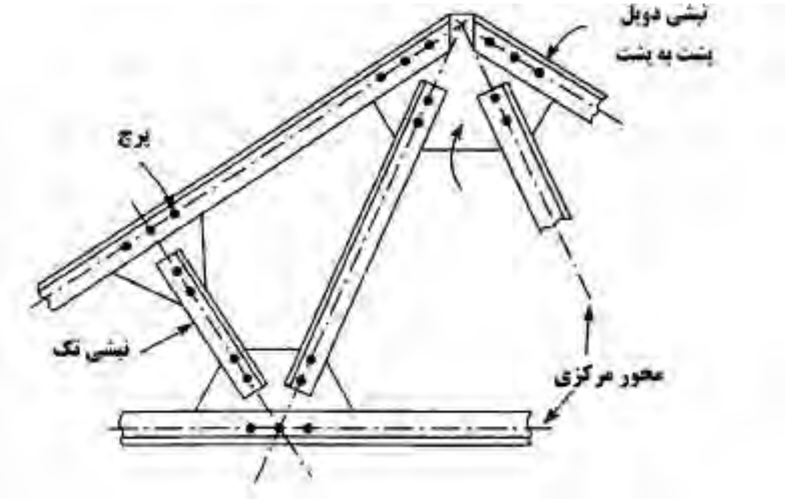
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

این مفصل‌ها در اتصالات اعضا باعث می‌شوند تا نیروهای داخلی بوجود آمده در اعضای خرپا همیشه به صورت دو نیرویی باشند، یعنی فشاری و یا کششی هستند و در آنها هیچ‌گاه خمش یا برش ایجاد نمی‌شود. در تحلیل خرپاها همیشه سه فرض اساس وجود دارد:

- ✓ اعضای خرپا توسط پین یا مفصل به یکدیگر متصل شده‌اند.
- ✓ بارهای اعمال شده به خرپا تنها به محل مفصل‌ها وارد می‌شود.
- ✓ نیروهای درونی در اعضای خرپا همیشه به صورت محوری هستند.

٤-۳ ایده‌آل سازی خرپا

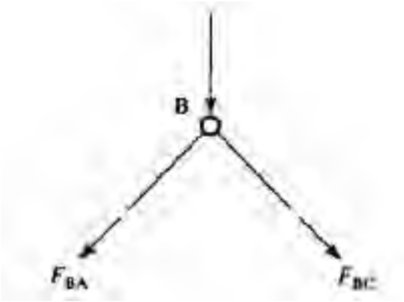
در عمل اعضای خرپا توسط پین یا مفصل به یکدیگر متصل نیستند و اتصال آنها توسط جوش، پرچ یا پیچ مانند شکل ٤-٤ صورت می‌گیرد. در یک سقف چوبی اتصال اعضای خرپای آن توسط میخ صورت می‌گیرد. اتصال در اعضای خرپا به صورت نیمه صلب می‌باشند و می‌توانند لنگر را انتقال دهند. ولی در صورتی که بارهای اعمال شده تنها به محل مفصل‌ها اعمال شود و محور مرکزی اعضای خرپا از روی هم بگذرند رفتار اتصال خرپا بسیار شبیه یک اتصال پینی است.



شکل ٤-٤ ساختمان یک خرپای واقعی

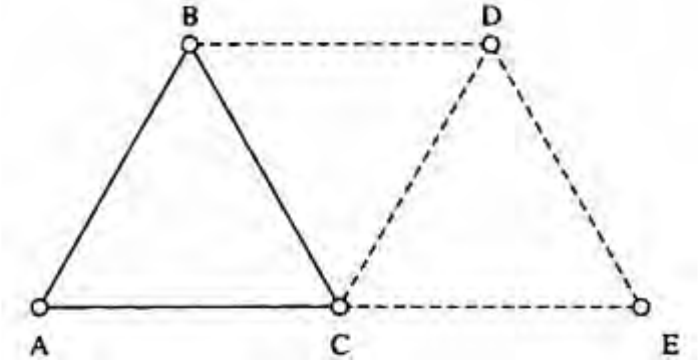
٤-٤ تعیین معینی و نامعینی خرپا

در قسمت ٤-٢ دیدیم که برای اینکه یک خرپا پایدار باشد باید یک مثلث پایه وجود داشته باشد. در شکل٤-٣الف نیروی خارجی اعمال شده در گره B باعث ایجاد نیروی محور در اعضای AB و BC می‌شود.



شکل ٤-٥ گره B

دیاگرام جسم آزاد این سازه در شکل ٤-٥ نشان داده شده است. نیروی داخلی در اعضای AB و BC را با F_{BA} و F_{BC} نشان داده شده است. نیروهای F_{BA} و F_{BC} به صورت کششی فرض شده‌اند به عبارت دیگر جهت پیکان بر روی این نیروها از مفصل دور می‌شوند. حال با نوشتن معادلات تعادل برای این سیستم به راحتی می‌توان نیروهای داخلی را تعیین کرد. از معادلات تعادل، معادله $\sum M = 0$ را در گره نمی‌توانیم استفاده کنیم زیرا که تمام نیروها از یک نقطه می‌گذرد و به طور کلی از این معادله نمی‌توان استفاده کرد. در شکل ٤-٦ یک خرپا را نشان می‌دهد. برای ساختن این خرپا از مثلث پایه ABC استفاده شده و برای گسترش آن در هر مرحله دو عضو و یک مفصل به این خرپا اضافه شده است.



شکل ٤-٦مثلث پایه برای ایجاد خرپا

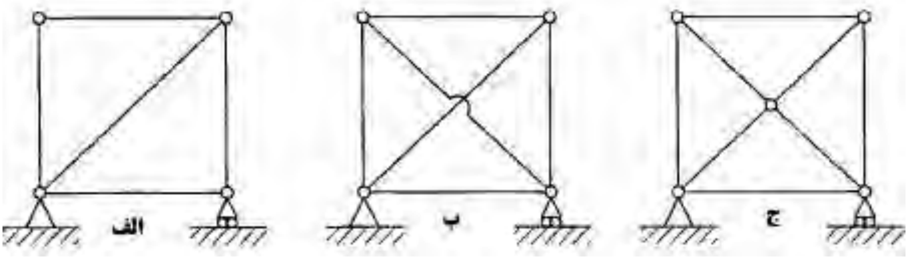
مثلاً اعضای BD و DC و مفصل D به مثلث پایه اضافه شده تا خرپا گسترش یابد. در صورتی که m تعداد کل اعضا و j تعداد مفصل‌ها باشد داریم:

$$m-3=2(j-3)$$

$$m=2j-3 \qquad (۴-۱)$$

در صورتی که معادله ۴-۱ ارضا شود، خرپا به صورت معین می‌باشد. یعنی با استفاده از معادلات تعادل، نیروی اعضاء آن قابل تعیین است همچنین در صورتی که $m<2j-3$ سازه ناپایدار است و اگر $m>2j-3$ خرپا نامعین بوده و با استفاده از معادلات تعادل قابل حل نیست.

مثال۴-۱) معینی و نامعینی خرپاهای نشان داده شده در شکل ۴-۷ الف تا ج را تعیین کنید.



شکل۴-۷ خرپاهای مثال۴-۱

حل) خرپای شکل ۴-۷الف پنج عضو و چهار مفصل دارد. بنابراین

$$m=5 \qquad j=4 \quad \Rightarrow 2j-3=5=m$$

بنابراین معادله ۴-۱ ارضا می‌شود.

در شکل ۴-۷ب یک عضو اضافه شده است. بنابراین

$$m=6 \qquad j=4 \quad \Rightarrow m>2j-3$$

پس خرپا نامعین استاتیکی است.

خرپای شکل ۴-۷ج هشت عضو و پنج مفصل دارد. بنابراین

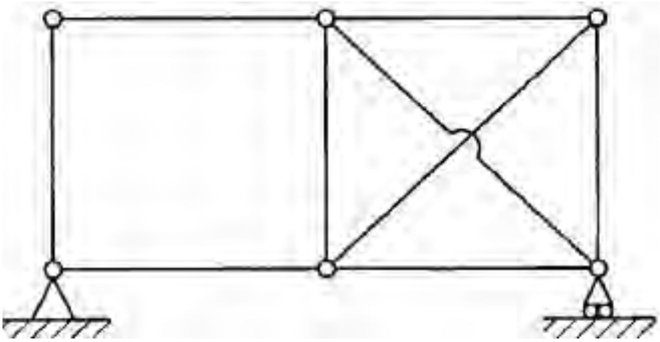
$$m=8 \qquad j=5 \quad \Rightarrow 2j-3=7 \Rightarrow m>2j-3$$

بنابراین معادله ۴-۱ ارضا می‌شود. و خرپا معین است.

متاسفانه معادله ۴-۱ چندان قابل اطمینان نیست و ممکن است به جواب‌های نادرست منجر شود. به عنوان مثال خرپای شکل ۴-۸ دارای نه عضو و شش مفصل می‌باشد، بنابراین

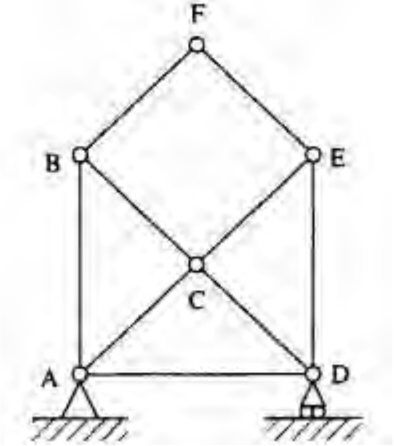
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

معادله ٤-۱ ارضا می‌شود ولی سمت راست این مجموعه نامعین استاتیکی و قسمت سمت چپ آن ناپایدار است.



شکل ٤-۸

دلیل ناپایداری سمت چپ وجود شکل مستطیلی در خرپا است. خرپای شکل ٤-۹ دارای نه عضو و شش مفصل می‌باشد، بنابراین معادله ٤-۱ ارضا می‌شود.



شکل ٤-۹

این خرپا نیز مانند خرپای شکل٤-۸ دارای یک قسمت مستطیل شکل است ولی خرپا پایدار می‌باشد. برای اثبات این قضیه یک مثلث پایه در خرپا در نظر بگیرید و اعضا را به آن مثلث اضافه کنید.

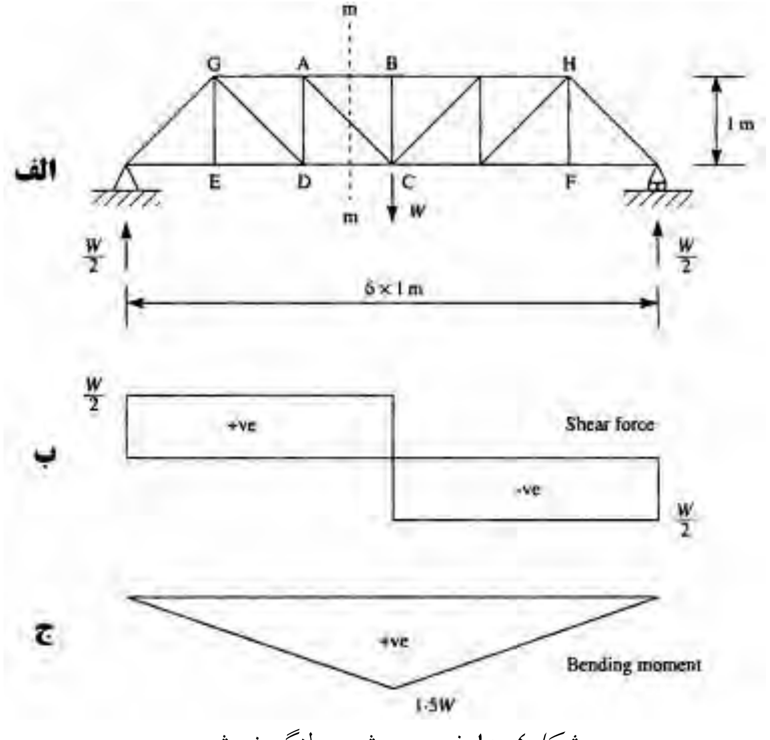
برای خرپاهای فضایی باید معادله زیر برای معینی آن برقرار باشد.

$$m = 3j - 6 \quad (٤-٢)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

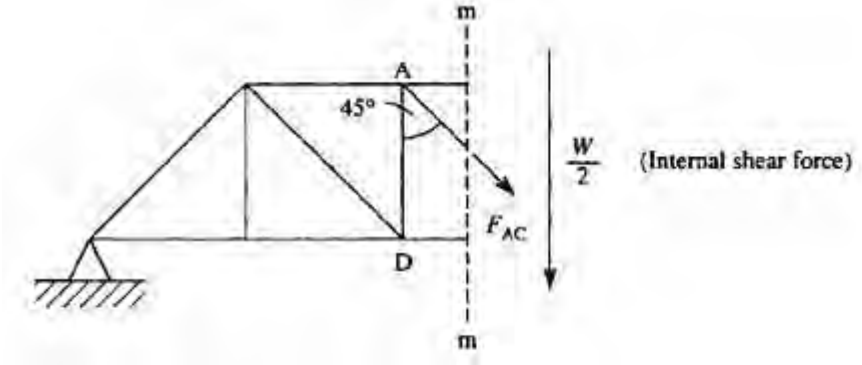
٤-٥ پایداری خرپا در برابر نیروهای برشی و لنگر خمشی

اگرچه اعضای خرپا نیروهای محوری را حمل می‌کنند ولی مقاطع مختلف خرپا تحت خمش و برش قرار می‌گیرند. بنابراین قبل از پرداختن به روش‌های تحلیل خرپاها، ابتدا پایداری آنها را تحت برش و لنگر بررسی می‌کنیم. خرپای پرات نشان داده شده در شکل٤-١٠الف تحت تاثیر یک بار متمرکز به اندازه W در گره C قرار دارد.



شکل٤-١٠ نیروی برشی و لنگر خمشی

با استفاده از روش شرح داده شده در بخش ٣-٤ دیاگرام نیروی برشی و لنگر خمشی در اشکال ٤-١٠ب و ج نشان داده شده است. ابتدا به نیروی برشی پرداخته می‌شود. در دهانه $ABCD$ نیروی برشی برابر $W/2$ با مقدار مثبت است. برش mm بین A و B زده شده است، با استفاده از این برش می‌بینیم که نیروی داخلی برابر $W/2$ در این مقطع وجود دارد. اعضای AB وDC که به صورت افقی هستند در برابر نیروی برشی این مقطع قادر به مقاومت نیستند و این نیروی برشی بایستی توسط عضو قائم یا مورب مانند عضو AC تحمل شود. شکل ٤-١١ نشان می‌دهد که نیروی F_{AC}به صورت کششی است.

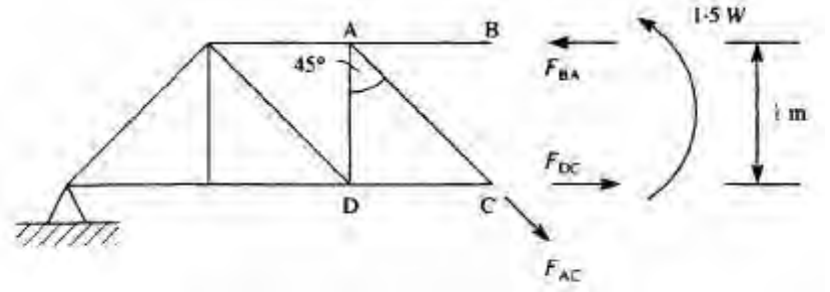


شکل ٤-١١ برشی از خرپا

$$F_{AC}\cos 45^{\circ} = \frac{W}{2}$$

بنابراین اعضایی از خرپا که مولفه‌ای در جهت قائم ندارند، قادر به تحمل نیروی برشی حاصل در آن مقطع نیستند.

در صورتی که عضو AC فشاری بود آنگاه ممکن بود به دلیل طول زیادش دچار کمانش شود. بررسی نیروهای داخلی خرپا این امکان را می‌دهد که نیروی داخلی اعضا را کنترل کنیم تا از حد مجاز آنها بیشتر نشود. حال به بررسی مقدار لنگر در مقطع خرپا می‌پردازیم.



شکل٤-١٢ برشی از خرپا

همان مقطع mm را در نظر بگیرید. مقدار لنگر حداکثر با توجه به شکل ٤-١٠ج در خرپا برابر $1.5W$ با علامت مثبت می‌باشد. در شکل٤-١٢ لنگر داخلی نشان داده شده است. در این شکل خرپا با استفاده از روش مقطع (بخش ٤-٧) تحلیل شده و نیروهای $F_{BA}=1.5W$ فشاری، $F_{AC}=0.707W$ کششی و $F_{DC}=1W$ کششی بدست آمده‌اند.

٤-٦ روش مفصل برای تحلیل خرپا

طراحی خرپا شامل تعیین نیروها در اعضای مختلف و انتخاب اندازه‌ها و شکل‌های ساختمانی مختلف برای مقاومت در برابر این نیروها است.

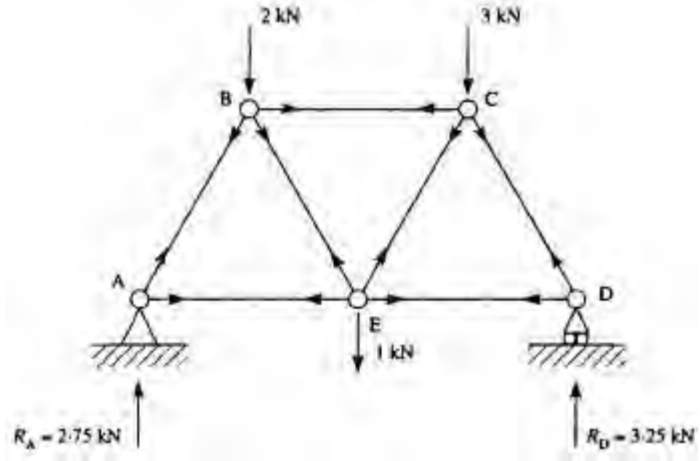
☜ نکته: تحلیل سازه‌های مکانیکی به مانند یک خرپا، براساس بکارگیری قانون سوم نیوتن است. به این معنی که هرگاه قطعه‌ای از یک سازه مکانیکی نیرویی به قطعه دیگر وارد کند قطعه دوم نیرویی مساوی، هم‌راستا، مختلف الجهت به قطعه اول وارد خواهد نمود. اعضایی که در ساخت خرپاها معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرند عبارتند از تیرهای ناودانی]، تیرهایI شکل، نبشی‌ها، میله‌ها و اشکال دیگری که انتهایشان با جوش به هم وصل شده است و یا از اتصالات پیچی استفاده شده است. وقتی که اعضای خرپا اساساً در یک صفحه قرار می‌گیرند آن خرپا را صفحه‌ای می‌نامیم.

خرپاهای صفحه‌ای مثل آنهایی که برای پل به کار می‌روند معمولاً به صورت جفت به کار می‌روند. یک پانل خرپا در طرفین پل گذاشته می‌شوند و با تیرهای عرضی به هم وصل می‌شوند. در روش مفصل که برای پیدا کردن نیروی داخلی ایجاد شده در اثر بارهای وارد بر یک خرپای ساده به کار می‌رود، از طریق برآورد کردن شرایط تعادل برای نیروهای وارد بر مفصل هر اتصال به نتیجه می‌رسد. چون این روش با نیروهای متقارب سروکار دارد و چنین نیروهایی به خودی خود شرایط گشتاور مساوی صفر را ارضا می‌کنند در نتیجه دو معادله مستقل تعادل برای هر مفصل در اختیار ما می‌گذارد. برای شروع از مفصلی آغاز می‌کنیم که حداقل یک نیروی معلوم بر آن وارد شود و بیش از دو نیروی مجهول به آن اعمال نگردد. قبل از هر چیز بایستی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی محاسبه شوند برای این کار با توجه به مطالب ذکر شده در قسمت تعادل می‌توانیم از معادلات $\sum F_x$ و $\sum F_y$ و $\sum M$ استفاده کنیم. با معلوم بودن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی از یک گره به دلخواه شروع می‌کنیم.

مثال٤-۲) نیروهای داخلی در خرپای نشان داده شده در شکل ٤-١٤ را تعیین کنید.

حل) اولین گام در تحلیل خرپاها تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است. با لنگرگیری حول D داریم.

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com



شکل ٤-۱۳ خرپای مثال ٤-۲

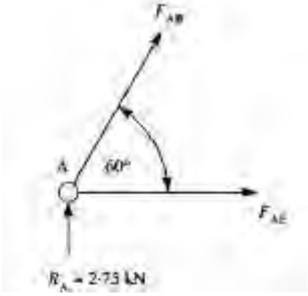
$$R_A \times 2 - 2\times1.5 - 1\times1 - 3\times0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 2.75kN$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_A + R_D - 2 - 1 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_D = 3.25kN$$

عکس‌العمل تکیه‌گاهی افقی A نیز به دلیل اینکه بارهای خارجی اعمال شده در جهت افقی مولفه‌ای ندارند برابر صفر است.

گام بعدی در حل خرپا بیرون کشیدن یکی از مفصل‌ها است. برای شروع از مفصلی آغاز می‌کنیم که حداقل یک نیروی معلوم بر آن وارد شود و بیش از دو نیروی مجهول به آن اعمال نگردد. به عنوان مثال گره A را انتخاب می‌کنیم و این گره به همراه کلیه نیروهای معلوم و مجهول وارد بر آن را بیرون می‌آوریم. در شکل ٤-١٤ این مفصل نشان داده شده است.



شکل٤-١٤ گره A

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

نیروی عکس‌العمل تکیه‌گاهی A معلوم بوده و از گام قبل بدست آمده است. نیروهای F_{AB} و F_{AE} مجهولات مسئله هستند. این نیروهای داخلی را در ابتدا به صورت کششی فرض می‌کنیم در صورتی که مقداری منفی برای آنها بدست آمد به این معنی است که جهت فرضی اشتباه است و نیروی داخلی آنها فشاری است. حال از معادلات $\sum F_x$ و $\sum F_y$ استفاده می‌کنیم و تعادل در گره را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$F_{AB} \sin 60^\circ + 2.75 = 0$$

$$F_{AB} = -3.18kN$$

مقدار علامت منفی بدست آمده نشان می‌دهد که نیروی F_{AB} فشاری است. حال در شکل ۴-۱۴ معادله تعادل $\sum F_x$ را می‌نویسیم.

$$F_{AE} + F_{AB} \cos 60^\circ = 0$$

$$\Rightarrow \quad F_{AE} - 3.18 \cos 60^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{AE} = 1.59kN$$

مقدار علامت مثبت بدست آمده نشان می‌دهد که نیروی F_{AE} کششی است. تمام نیروهای این مفصل بدست آمدند حال به سراغ مفصل بعدی می‌رویم. نیروی داخلی اعضای خرپا در زیر بدست آمده‌اند:

$$F_{AB} = -3.18kN$$

$$F_{AE} = +1.59kN$$

$$F_{BE} = +0.87kN$$

$$F_{BC} = -2.03kN$$

$$F_{DC} = -3.75kN$$

$$F_{CE} = +0.29kN$$

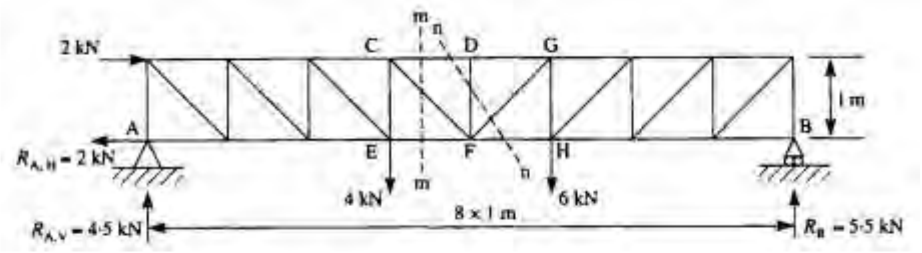
$$F_{DE} = +1.88kN$$

۴-۷ روش مقطع

دو اِشکال در روش تحلیل مفصل وجود دارد. اول آنکه یکی از معادلات تعادل بی‌استفاده می‌ماند (معادله گشتاور) و دوم آنکه برای تعیین نیروی یک عضو خاص را گاه مجبوریم تمام یا اغلب مفصل‌ها را بررسی کنیم. در روش مقطع یک برش فرضی از کل خرپا زده

می‌شود به طوری که عضو مورد نظر نیز بریده شود. سپس با نوشتن هر کدام از معادلات تعادل به بررسی تعادل در یکی از مقاطع زده شده پرداخته می‌شود.

مثال ٤-٣) در خرپای شکل ٤-١٥ نیروی داخلی اعضای CD و CF و EF را تعیین کنید.

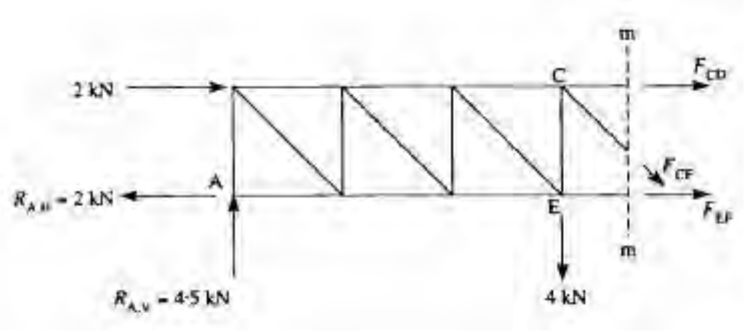


شکل ٤-١٥

حل) اولین گام در تحلیل خرپاها تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است.

$$R_{A.V} = 4.5kN \quad , \quad R_{A.H} = 2kN \quad , \quad R_B = 5.5kN$$

حال با استفاده از برش mm خرپای مذکور را به دو قسمت تقسیم می‌کنیم بطوری که اعضای CD و CF و EF در خط برش قرار گیرند. در شکل ٤-١٦ دوباره قسمت سمت چپ خرپا ترسیم شده است.



شکل ٤-١٦

توجه شود که نیروهای مجهول به صورت کششی در نظر گرفته شده‌اند. همچنین تمام نیروهای معلوم نیز همراه بخش برش خورده آورده شده‌اند. حال در صورتی که در این جزء معادله $\downarrow + \sum F_y = 0$ را نوشته و تعادل در جهت محور y ها را بررسی کنیم. خواهیم داشت:

$$F_{CF}\cos 45^\circ + 4 - 4.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CF} = +0.71kN$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حال با گشتاورگیری حول محل تقاطع نیروهای F_{CF} و F_{EF} داریم:

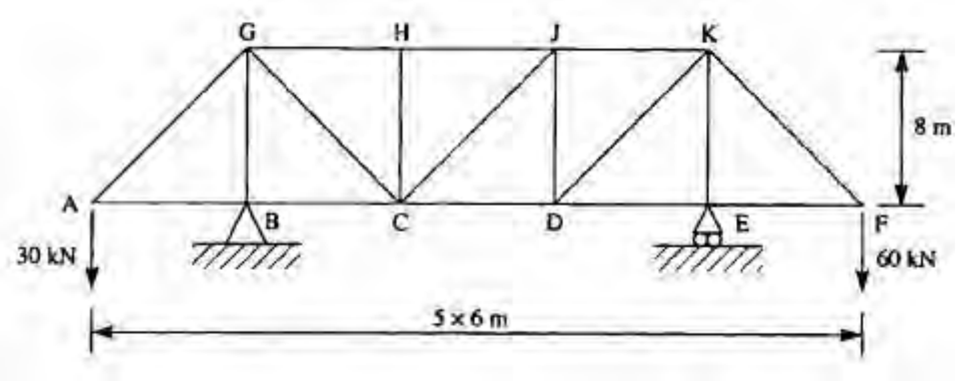
$$F_{CD}\times 1+2\times 1+4.5\times 4-4=0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD}=-16kN$$

در نهایت مقدار نیروی F_{EF} نیز با گرفتن گشتاور حول نقطه C بدست می‌آید.

$$F_{EF}\times 1-4.5\times 3-2\times 1=0 \quad \Rightarrow \quad F_{EF}=+15.5kN$$

مسائل

۱) در خرپای زیر نیروهای داخلی اعضا را توسط روش مفصل بدست آورید و نیروی داخلی اعضای JK و JD و DE را توسط روش مقطع کنترل کنید.



حل) گام نخست در بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا، تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی است. با گشتاورگیری حول E داریم:

$$R_B\times 18-30\times 24+60\times 6=0 \quad \Rightarrow \quad R_B=20kN\uparrow$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_E+R_B-30-60=0 \quad \Rightarrow \quad R_E=70kN\uparrow$$

در ابتدا مانند شکل زیر تمام نیروهای داخلی اعضا به صورت کششی در نظر گرفته می‌شوند.

$$\sin\theta=0.8 \quad , \quad \cos\theta=0.6$$

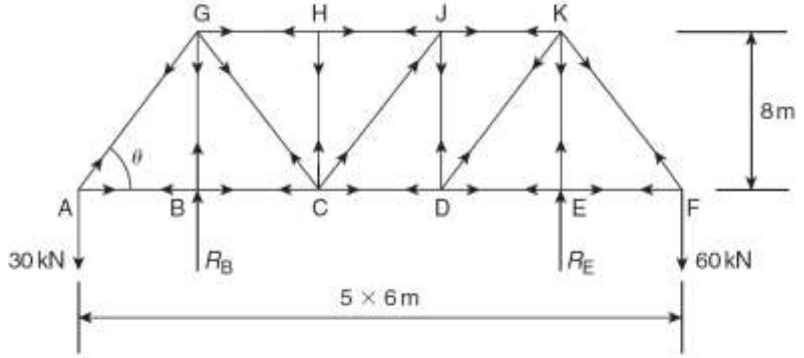
$$HC=0$$

$$BG=-20kN$$

$$EK=-70kN$$

با بیرون آوردن مفصل A تعادل در این مفصل را بررسی می‌کنیم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



$$AG\sin\theta - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad AG = +37.5kN$$

$$AB + AG\cos\theta = 0$$

$$AB = -37.5\times 0.6 = -22.5kN$$

با بیرون آوردن مفصل B تعادل در این مفصل را بررسی می‌کنیم:

$$BC - BA = 0$$

$$BC = BA = -22.5kN$$

با بیرون آوردن مفصل G و بررسی تعادل در آن داریم:

$$GC\sin\theta + GB + GA\sin\theta = 0$$

$$GC\times 0.8 - 20 + 37.5\times 0.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad GC = -12.5kN$$

$$GH + GC\cos\theta - GA\cos\theta = 0$$

$$GH - 12\times 0.6 - 37.5\times 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad GH = 30kN$$

با بررسی تعادل در مفصل H داریم:

$$HJ = HG = 30kN$$

به همین ترتیب در مفصل C :

$$CJ\sin\theta + CG\sin\theta = 0$$

$$CJ\times 0.8 - 12.5\times 0.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad CJ = 12.5kN$$

در مفصل J:

$$JD + JC\sin\theta = 0$$

$$JD + 12.5\times 0.8 = 0 \quad \Rightarrow \quad JD = -10kN$$

$$JK - JH - JC\cos\theta = 0$$

$$JK - 30 - 12.5\times 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad JK = 37.5kN$$

در مفصل D:

$$DK\sin\theta + DJ = 0$$

Web: www.M-Alirezaei.com　استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$DK \times 0.8 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad DK = 12.5kN$$

$$DE + DK\cos\theta - DC = 0$$

$$DE + 12.5 \times 0.6 + 37.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad DE = -45kN$$

در مفصل F:

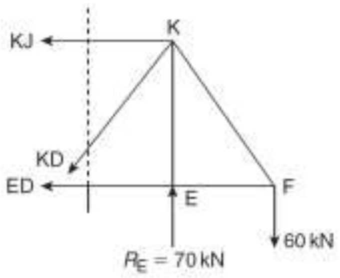
$$FK\sin\theta - 60 = 0$$

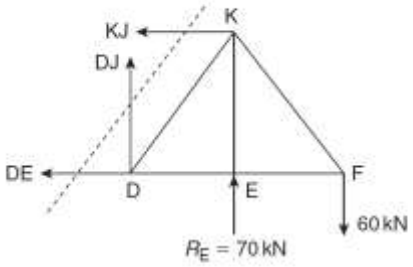
$$FK \times 0.8 - 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad FK = 75kN$$

$$FE + FK\cos\theta = 0$$

$$FE + 75 \times 0.6 = 0 \quad \Rightarrow \quad FE = -45kN$$

حال می‌خواهیم نیروهای داخلی اعضای JK و JD و DE را توسط روش مقطع کنترل کنیم. با زدن دو برش مانند شکل و نوشتن معادلات تعادل برای هر قسمت داریم:





با گشتاورگیری حول گره K:

$$ED \times 8 - 60 \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad ED = 45kN$$

با گشتاورگیری حول گره D:

$$KJ \times 8 - 60 \times 12 + 70 \times 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad KJ = 37.5kN$$

در برش سمت راست با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

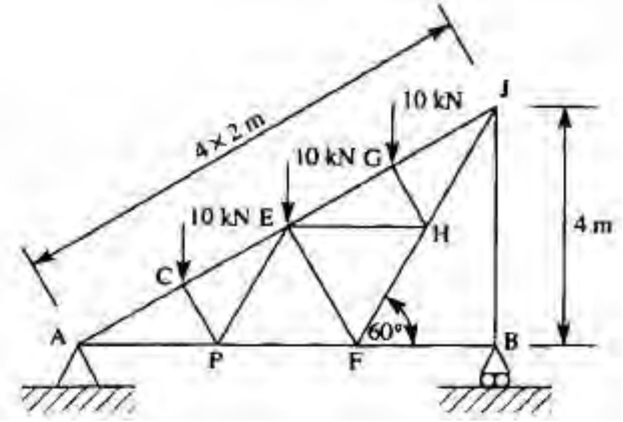
$$DJ + 70 - 60 = 0$$

$$DJ = -10kN$$

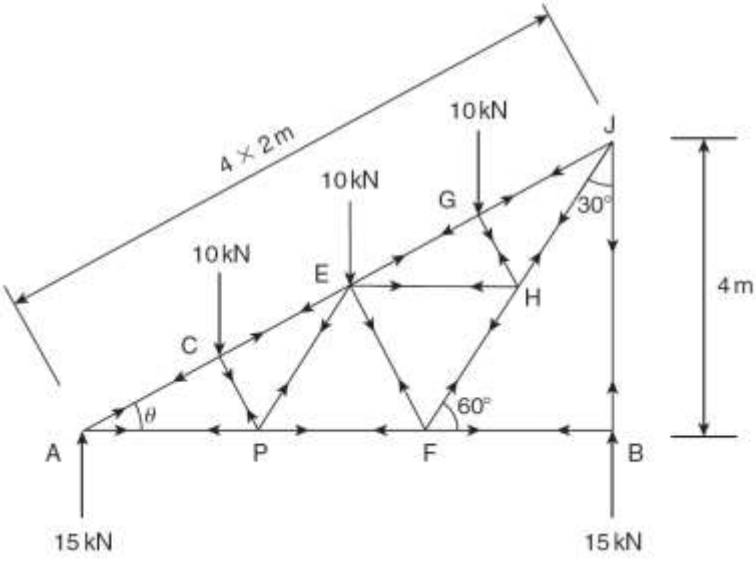
۲) نیروهای داخلی اعضای خرپای نشان داده شده در شکل زیر را تعیین کنید.

حل) گام نخست در بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا، تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel　کانال تلگرام:



در تعیین نیروهای داخلی مانند شکل زیر در گام نخست تمام نیروهای داخلی اعضا به صورت کششی در نظر گرفته می‌شوند.



$$\sin\theta = \frac{4}{8} = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

حال با بیرون آوردن مفصل A، تعادل در این مفصل را بررسی می‌کنیم

$$AC\sin\theta + 15 = 0$$

$$AC \times 0.5 + 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad AC = -30$$

$$AP + AC\cos\theta = 0$$

$$AP - 30 \times 0.866 = 0 \quad \Rightarrow \quad AP = 26.0kN$$

به همین ترتیب با بررسی تعادل در مفصل C داریم:

$$CP + 10\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad CP = -8.7kN$$

$$CE - CA - 10\sin 30^\circ = 0$$

$$CE + 30 - 10\times 0.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad CE = -25kN$$

با بررسی تعادل در مفصل P:

$$PE\cos 30^\circ + PC\cos 30^\circ = 0$$

$$PE = -PC = 8.7kN$$

$$PE + PE\cos 60^\circ - PC\cos 60^\circ - PA = 0$$

$$PF + 8.7\times 0.5 + 8.7\times 0.5 - 26.0 = 0 \quad \Rightarrow \quad PF = 17.3kN$$

با بررسی تعادل در مفصل F:

$$FE\cos 30^\circ + FH\cos 30^\circ = 0$$

$$FE = -FH$$

$$FH\cos 60^\circ - FE\cos 60^\circ - FP = 0$$

$$FH\times 0.5 + FE\times 0.5 - 17.3 = 0$$

$$FH = -FE = 17.3kN$$

با بررسی تعادل در مفصلG:

$$GH + 10\cos 30^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad GH = -8.7kN$$

$$GJ - GE - 10\cos 60^\circ = 0$$

$$GJ - GE - 10\times 0.5 = 0$$

با بررسی تعادل در مفصلH:

$$HE\cos 30^\circ + HG\cos 30^\circ = 0$$

$$HE = -HG = 8.7kN$$

$$HJ - HF + HG\cos 60^\circ - HE\cos 60^\circ = 0$$

$$HJ - 17.3 - 8.7\times 0.5 - 8.7\times 0.5 = 0$$

$$HJ = 26.0kN$$

و در نهایت با بررسی تعادل در مفصل B خواهیم داشت:

$$JG\cos 60^\circ + JH\cos 30^\circ + JB = 0$$

$$JG\times 0.5 + 26.0\times 0.866 - 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad JG = -15.0kN$$

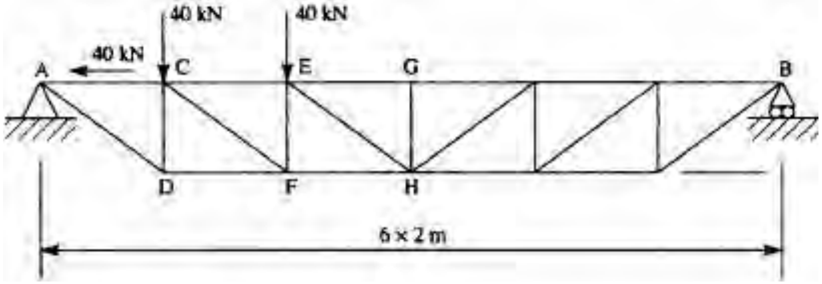
$$GE = -20kN$$

۳) نیروی داخلی در اعضای EF و EG و EH و FH را تعیین کنید. نیروی افقی $40kN$ در نقطه C اعمال می‌شود. ارتفاع خرپا برابر 1.5 متر است.

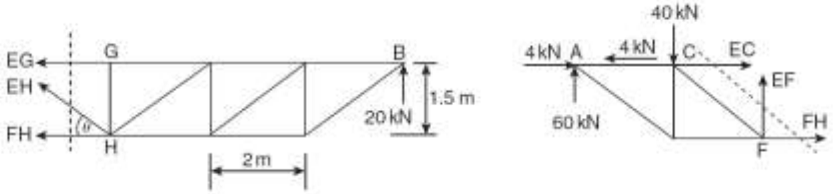
حل) گام نخست در بدست آوردن نیروهای داخلی اعضا، تعیین عکس العمل‌های تکیه‌گاهی است. با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_{A,V}\times 12-40\times 10-40\times 8=0 \quad\Rightarrow\quad R_{A,V}=60kN$$

$$R_B+60-40-40=0 \quad\Rightarrow\quad R_B=20kN$$



حال با زدن برش خرپا به دو قسمت تقسیم شده و با نوشتن معادلات تعادل نیروهای داخلی حساب می‌شوند. توجه شود که نیروی اعضایی که برش می‌خورند به صورت کششی در نظر گرفته می‌شود و در صورتی که مقداری منفی برای آنها بدست آمد به معنی فشاری بودن آنهاست:



$$\tan^{-1}\theta=\frac{1.5}{2} \quad\Rightarrow\quad \theta=36.9^\circ$$

$$EH\sin 36.9^\circ+20=0$$

$$EH=-33.3kN$$

با گشتاورگیری حول H داریم:

$$EH\times 1.5+20\times 6=0 \quad\Rightarrow\quad EG=-80kN$$

$$FH+FH\cos 36.9^\circ+EG=0$$

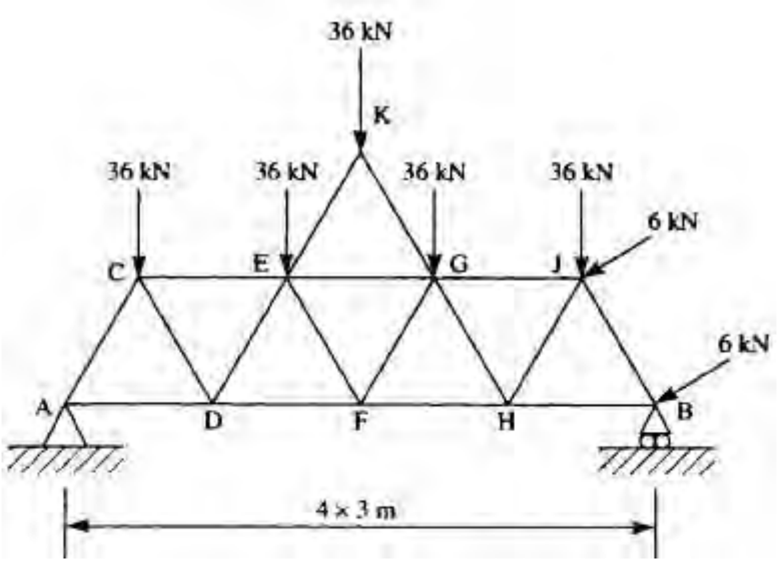
$$FH-33.3\cos 36.9^\circ-80=0$$

$$FH=106.6kN$$

حال در قطعه سمت چپ داریم:

$$EF - 40 + 60 = 0 \quad \Rightarrow \quad EF = -20kN$$

۴) نیروی داخلی در اعضای DF و EF و EG و EK را تعیین کنید.



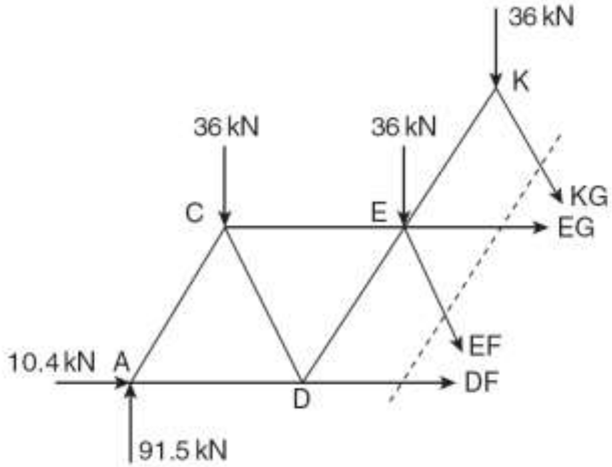
حل) در ابتدا عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم:

$$R_{A,H} - 2 \times 6\cos 30^{\circ} = 0$$

$$R_{A,H} = 10.4kN$$

با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_{A,V} \times 12 - 5 \times 36 \times 6 - 6 \times 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} = 91.5kN$$



$2\times KE\cos 30^\circ + 36 = 0$

$KE = -20.8kN = KG$

$EF\cos 30^\circ + KG\cos 30^\circ + 3\times 36 - 91.5 = 0$

$EF\times 0.866 - 20\times 0.866 + 108 - 91.5 = 0 \quad \Rightarrow \quad EF = 1.7kN$

با گشتاورگیری حول E:

$DF\times 1.5\tan 60^\circ - KG\times 1.5\tan 60^\circ - 36\times 1.5 + 36\times 3$

$-91.5\times 4.5 + 10.4\times 1.5\tan 60^\circ = 0$

$DF\times 2.6 + 20.8\times 2.6 - 54 + 108 - 411.8 + 10.4\times 2.6 = 0$

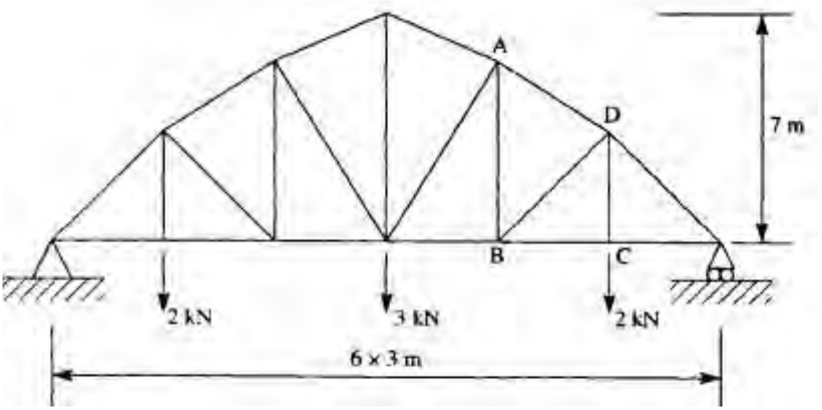
$DF = 106.4kN$

$EG + EF\cos 60^\circ + KG\cos 60^\circ + DF + 10.4 = 0$

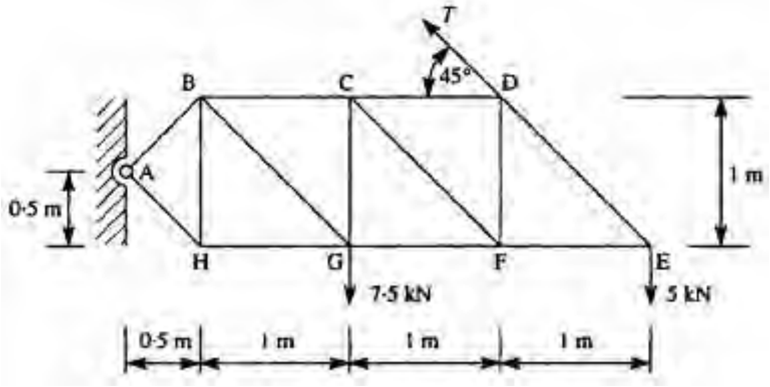
$EG + 1.7\times 0.5 - 20.8\times 0.5 + 106.4 + 10.4 = 0$

$EG = -107.3kN$

۵) یال بالایی در خرپای زیر به صورت سهمی به فرم $y = kx^2$ می‌باشد. نیروهای داخلی در اعضای AD و BD و BC را حساب کنید.



۶) در خرپای زیر که در محل A مفصل شده است را در نظر بگیرید. کشش در کابل T را حساب کرده و نیروی داخلی اعضا را بدست آورید.



فصل پنجم
کابل

کابل‌های انعطاف پذیر چندین دهه است که در سازه‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. عنصر اصلی باربر در یک پل معلق، کابل است. کاربرد مهم دیگر کابل‌ها به عنوان مهارکننده سازه‌های بلند و لاغر نظیر جرثقیل‌ها، دودکش‌ها و دکل‌های مخابراتی است. کابل‌های یک پل معلق[1] وظیفه تحمل بارهای ناشی از بارهای روی عرشه پل را دارند. کاربرد دیگر کابل‌ها در تیرهای پیش تنیده است. سازه‌های کابلی دارای کارایی زیادی هستند و نیروهای وارده را توسط کشش منتقل می‌کنند. در اعضای با لاغری زیاد تحت بار فشاری امکان کمانش وجود دارد، ولی در کابل‌ها تمام نیروها به صورت کششی می‌باشند و لذا مشکل فوق وجود ندارد.

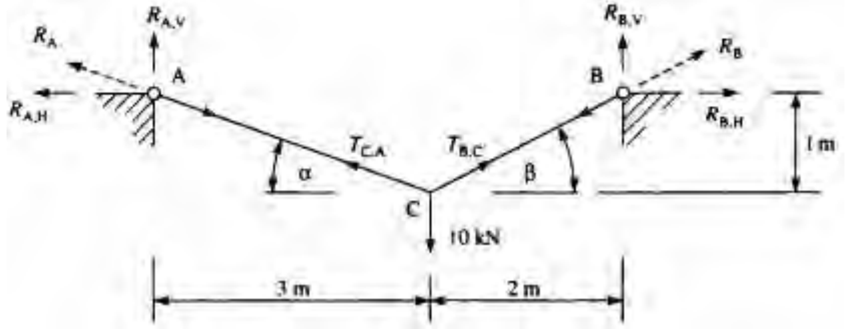
۵-۱ کابل‌های سبک[2] تحت نیروهای متمرکز

در این حالت برای روند تحلیل ما فرض می‌کنیم که وزن خود کابل در مقایسه با بارهای اعمال شده بر آن بسیار کم می‌باشد و می‌توان از وزن کابل صرف نظر کرد و کابل نیز تنها قادر به تحمل بارهای کششی خواهد بود. ما این موضوع را با مثال توضیح می‌دهیم.

مثال۵-۱) کابل نشان داده شده در شکل ۵-۱ به تکیه‌گاه‌های A و B به صورت مفصلی متصل شده است و یک بار متمرکز به اندازه $10kN$ در نقطه C بر آن اعمال می‌شود. مقدار نیرو در هر قسمت کابل و عکس العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید.

حل) هر کدام از کابل‌های AC و BC بدون وزن و بدون خمیدگی و مستقیم هستند. نیروی کششی در کابل‌های AC و BC یا به عبارتی نیروهای F_{AC} و F_{BC} را می‌توان با نوشتن معادلات تعادل در گره C حساب کرد. با توجه به شکل ۵-۱ داریم:

---
[1] Suspension bridge
[2] Lightweight



شکل۵-۱ کابل سبک به همراه بار متمرکز

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{1}{3} = 18.4^\circ \quad , \quad \beta = \tan^{-1}\frac{1}{2} = 26.6^\circ$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی برای گره C داریم:

$$\overset{\rightarrow +}{\sum F_x = 0} \quad T_{BC}\cos 26.6^\circ = T_{CA}\cos 18.4^\circ \quad \Rightarrow \quad T_{BC} = 1.061 T_{CA}$$

$$\overset{\uparrow +}{\sum F_y = 0} \quad T_{CA}\sin 18.4^\circ + 1.061 T_{CA}\sin 26.6^\circ = 10$$

$$\Rightarrow T_{AC} = 12.6, T_{CB} = 13.4$$

معادله لنگر[1] خمشی در تمام طول کابل برابر صفر است، لذا با لنگرگیری در هر نقطه آن می‌توان عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را حساب نمود.

$$R_{A.V}\times 5 - 10\times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} = 4kN$$

$$R_{A.V} + R_{B.V} - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{B.V} = 6kN$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی افقی حساب می‌شوند. به راحتی می‌توان اثبات کرد که $R_{A.H} = R_{B.H}$. با گشتاورگیری حولC

$$R_{A.H}\times 1 - R_{A.V}\times 3 = 0$$

$$R_{A.H} = 12kN (= R_{B.H})$$

مقدار نیروی محوری درون کابل را می‌توان با بدست آوردن برآیند عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی حساب کرد.

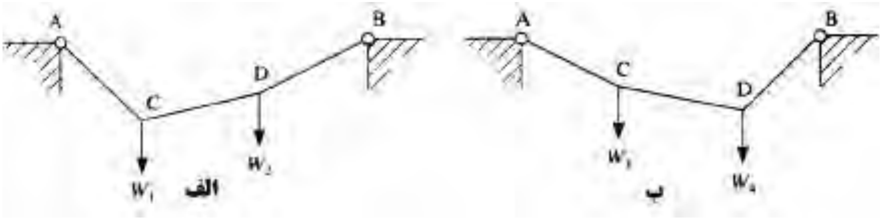
$$T_{AC} = R_A = \sqrt{4^2 + 12^2} = 12.6kN$$

[1] Moment equation

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

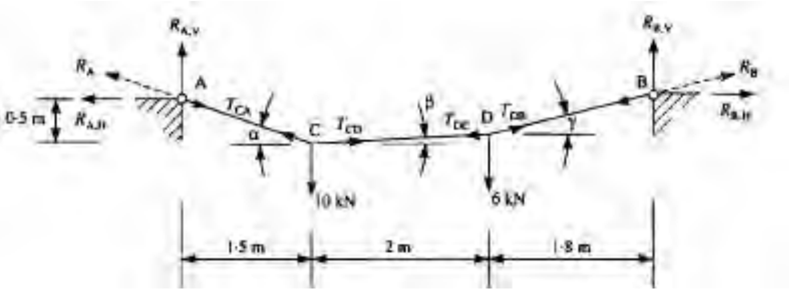
$$T_{CB} = R_B = \sqrt{6^2 + 12^2} = 13.4kN$$

در مثالی که در بالا ارئه شد، تنها یک بار بر روی کابل قرار داشت. شکل۵-۲الف را در نظر بگیرید که بارهای W_1 و W_2 بر یک کابل در نقاط C و D اثر می‌کنند. در شکل ۵-۲ب نیز دو بار به کابل اعمال شده که دارای شکل متفاوتی با حالت الف است.



شکل ۵-۲ اثر هندسه کابل بر توزیع بار

مثال ۵-۲) در شکل نشان داده شده در شکل ۵-۳ مقدار کشش در هر یک از کابل‌های AC و CD را محاسبه کنید.



شکل۵-۳ کابل مثال۵-۲

حل) روش‌های مختلفی برای حل این نوع مسائل وجود دارد. به عنوان مثال می‌توان با نوشتن معادلات تعادل[1] برای نقطه C تعادل در این گره را مورد بررسی قرار دهیم و مقادیر T_{CA} و T_{CD} را تعیین نمود. مقادیر α و β از روی هندسه شکل قابل تعیین هستند.

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{0.5}{1.5} = 18.4^\circ$$

در مثال ۵-۱ ذکر شد که برآیند[1] عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی معادل نیروهای کششی در کابل هستند بنابراین با تعیین $R_{A.V}$ و $R_{A.H}$ می‌توانیم T_{CA} را بدست آوریم. با گشتاورگیری حول B:

[1] Equilibrium

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$R_{A.V}\times 5.3-10\times 3.8-6\times 1.8=0 \quad\Rightarrow\quad R_{A.V}=9.2kN$$

از آنجا که کابل کاملاً انعطاف پذیر[2] است مقدار لنگر در تمام نقاط آن برابر صفر است. با گشتاورگیری حول C:

$$R_{A.H}\times 0.5-R_{A.V}\times 1.5=0 \quad\Rightarrow\quad R_{A.H}=27.6kN$$

$$T_{CA}=R_A=\sqrt{R_{A.H}^2+R_{A.V}^2}=\sqrt{27.6^2+9.2^2}=29.1kN$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم در نقطه C:

$$T_{CD}\sin\beta+T_{CA}\sin\alpha-10=T_{CD}\sin\beta+29.1\sin 18.4^\circ-10=0$$
$$\Rightarrow T_{CD}\sin\beta=0.815$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی برای گره C:

$$T_{CD}\cos\beta-T_{CA}\cos\alpha=T_{CD}\cos\beta-29.1\cos 18.4^\circ=0$$
$$\Rightarrow T_{CD}\cos\beta=27.612$$

با ترکیب دو معادله بدست آمده از بالا:

$$\tan\beta=0.0295 \quad\Rightarrow\quad \beta=1.69^\circ$$
$$\Rightarrow T_{CD}=27.6kN$$

با روشی مشابه ما می‌توانیم کشش در DB را نیز محاسبه کنیم. با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم برای گره D داریم:

$$T_{DB}\sin\gamma-T_{CD}\sin\beta-6=T_{DB}\sin\gamma-27.6\sin 1.69^\circ-6=0$$
$$\Rightarrow T_{DB}\sin\gamma=6.815$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی برای گره D داریم:

$$T_{DB}\cos\gamma-T_{CB}\cos\beta=T_{DB}\cos\gamma-27.6\cos 1.69^\circ=0$$
$$\Rightarrow T_{DB}\cos\gamma=27.618$$

با ترکیب دو معادله اخیر داریم:

$$\tan\gamma=0.2468 \quad\Rightarrow\quad \gamma=13.86^\circ$$
$$\Rightarrow T_{DB}=28.4kN$$
$$T_{DB}=R_B=\sqrt{R_{B.H}^2+R_{B.V}^2}$$

---

[1] Resultant
[2] Perfectly flexible

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

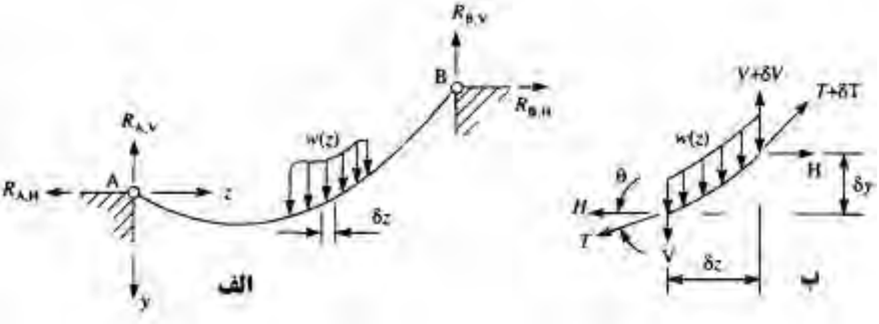
$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{R_{B.V}}{R_{B.H}}\right)$$

۵-۲ کابل‌های سنگین[1]

در این قسمت به بررسی تحلیل کابل‌هایی پرداخته می‌شود که وزنشان قابل توجه است.

معادلات حاکم در تغییر شکل

کابل نشان داده شده در شکل ۵-٤ وزن خودش را به میزان w_s که در واحد طول آن گسترده شده است را نشان می‌دهد. یک المان از این کابل در شکل ۵-٤ب نشان داده شده است که دارای طول δz می‌باشد. از آنجا که طول δz بسیار کوچک می‌باشد می‌توان بار روی آن را به صورت یک بار گسترده ثابت در نظر گرفت. کشش در کابل و در نقطه z برابر با T می‌باشد و همچنین کشش در کابل در نقطه $z+\delta z$ برابر $T+\delta T$ می‌باشد. مولفه‌های افقی و قائم کشش T برابر H و V می‌باشند که در شکل نشان داده شده است. به سادگی می‌توان اثبات کرد که برای هر نوع بارگذاری خارجی مقدار H ثابت است.



شکل ۵-٤ کابل در معرض بار گسترده خطی

با استفاده از معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$V+\delta V - w(z)\delta z - V = 0$$

وقتی که $\delta z \to 0$ میل کند:

$$\frac{dV}{dz} = w(z) \qquad (۱-۵)$$

---

[1] Heavy cables

از شکل ۵-٤ب داریم:

$$\frac{V}{H} = \tan\theta = -\frac{dy}{dz}$$

که در آن y مقدار خیز در طول محور z می‌باشد.

$$V = -H\frac{dy}{dz}$$

$$\frac{dV}{dz} = -H\frac{d^2y}{dz^2} \qquad (۵-۲)$$

با قرار دادن dy/dz از معادله ۵-۱ در معادله۵-۲، رابطه حاکم بر تغییر مکان کابل حاصل می‌شود

$$H\frac{d^2y}{dz^2} = -w(z) \qquad (۵-۳)$$

کابل تحت وزن خودش

در این حالت کابلی را در نظر بگیرید که تحت وزن خودش است. شکل۵-۵ جزئی از یک کابل را نشان می‌دهد و وزن واقعی آن را به صورت بار گسترده w_s در نظر گرفته شده است.

$$w(z)\delta z = w_s\delta s \qquad (۵-٤)$$

حال حد $\delta s \to 0$ برابر $ds = \left(dz^2 + dy^2\right)^{1/2}$ می‌شود

$$w(z) = w_s\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (۵-۵)$$

با قرار دادن $w(z)$ از معادله ۵-۵ در معادله ۵-۳ داریم:

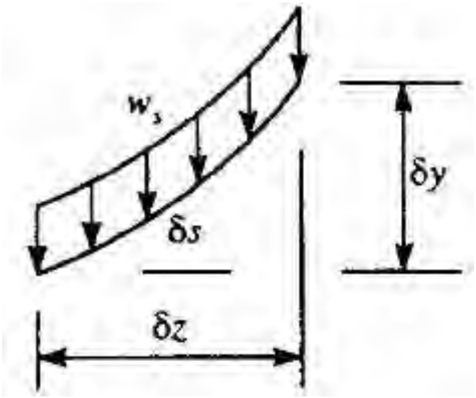
$$H\frac{d^2y}{dz^2} = -w_s\left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (۵-٦)$$

که $dy/dz = p$ و معادله ۵-٦ را می‌توان به این صورت بازنویسی نمود:

$$H\frac{dp}{dz} = -w_s\left[1 + p^2\right]^{1/2}$$

با ساده سازی و انتگرال گیری از معادله فوق داریم:

$$\int \frac{dp}{\left(1+p^2\right)^{1/2}} = -\int \frac{w_s}{H} dz \qquad (۵-۷)$$



شکل۵-۵ کابل در معرض وزن خودش

سمت چپ معادله یک انتگرال استاندارد است:

$$\sinh^{-1} p = -\frac{w_s}{H} z + C_1$$

که C_1 ثابت انتگرال‌گیری است. برای مقدار $dy/dz = p$

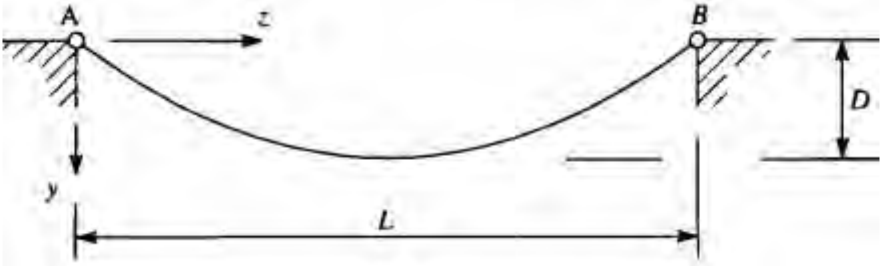
$$\frac{dy}{dz} = \sinh\left(-\frac{w_s}{H} z + C_1\right)$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$y = -\frac{H}{w_s} \cosh\left(-\frac{w_s}{H} z + C_1\right) + C_2 \qquad (۵-۸)$$

که C_2 ثابت دوم انتگرال‌گیری است. مقادیر ثابت‌های انتگرال‌گیری از شرایط مرزی مسئله حاصل می‌شوند.

مثال۵-۳) معادله تغییرشکل کابل متقارن نشان داده شده در شکل ۵-۶ را تعیین کنید. کابل تحت اثر وزن خود می‌باشد.



شکل ۵-۶ شکل خیز یک کابل با تکیه‌گاه‌های متقارن

با استفاده از معادله ۵-۸ داریم

$$y=-\frac{H}{w_s}\cosh\left(-\frac{w_s}{H}z+C_1\right)+C_2$$

با مشتق گیری از آن نسبت به z داریم:

$$\frac{dy}{dz}=\sinh\left(-\frac{w_s}{H}z+C_1\right)$$

مقدار شیب در وسط دهانه برابر صفر است. به عبارت دیگر در $z=L/2$ مقدار $dy/dz=0$ است.

$$0=\sinh\left(-\frac{w_s}{H}\frac{L}{2}+C_1\right)$$

$$\Rightarrow C_1=\frac{w_s}{H}\frac{L}{2}$$

معادله به صورت زیر به دست می‌آید:

$$y=-\frac{H}{w_s}\cosh\left(-\frac{w_s}{H}\left(z-\frac{L}{2}\right)\right)+C_2$$

مقدار تغییرمکان در محل تکیه‌گاه‌ها برابر صفر است، به عبارتی در $z=0, z=L$ مقدار $y=0$ است.

$$0=-\frac{H}{w_s}\cosh\left(-\frac{w_s}{H}\frac{L}{2}\right)+C_2$$

$$C_2=\frac{H}{w_s}\cosh\left(-\frac{w_s}{H}\frac{L}{2}\right)$$

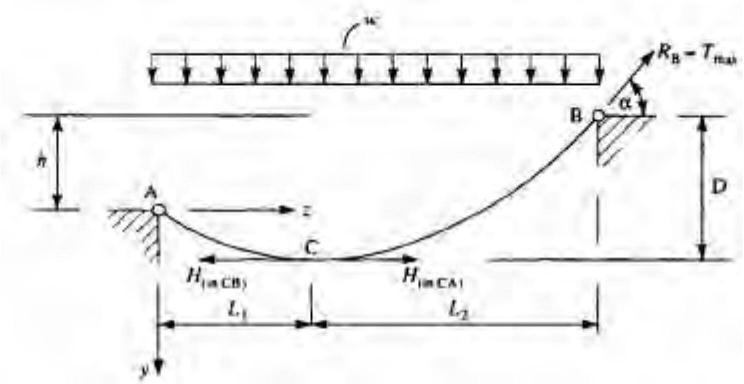
یا به عبارتی :

$$y=-\frac{H}{w_s}\left\{\cosh\left(-\frac{w_s}{H}\left(z-\frac{L}{2}\right)\right)-\cosh\frac{w_s}{H}\frac{L}{2}\right\}$$

معادله اخیر مقدار خیز کابل را می‌دهد که H مقدار مولفه افقی کشش کابل است.

کابل تحت یک بار گسترده یکنواخت

این حالت در بسیاری از سازه‌های کابلی دیده می‌شود. با توجه به شکل ۵-۷ داریم:



شکل۵-۷ کابل در معرض یک بار گسترده یکنواخت

$$H\frac{d^2y}{dz^2}=-w \qquad (۹-۵)$$

با انتگرال‌گیری از معادله ۵-۹ بر حسب z داریم:

$$H\frac{dy}{dz}=-wz+C_1 \qquad (۱۰-۵)$$

$$Hy=-w\frac{z^2}{2}+C_1z+C_2 \qquad (۱۱-۵)$$

در $y=0$ مقدار $z=0$ و در $y=-h$ مقدار $z=L$ خواهد بود. از شرط مرزی اول مقدار $C_2=0$ بدست می‌آید و از دومی:

$$H(-h)=-w\frac{L^2}{2}+C_1L$$

$$C_1=\frac{wL}{2}-H\frac{h}{L}$$

از معادلات ۵-۱۰ و ۵-۱۱ داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\frac{dy}{dz}=-\frac{w}{H}z+\frac{wL}{2H}-\frac{h}{L} \qquad (۵-۱۲)$$

$$y=-\frac{w}{2H}z^2+\left(\frac{wL}{2H}-\frac{h}{L}\right)z \qquad (۵-۱۳)$$

مقدار حداکثر خیز[1] در شیب صفر اتفاق می‌افتد:

$$0=-\frac{w}{H}z+\frac{wL}{2H}-\frac{h}{L}$$

$$z=\frac{L}{2}-\frac{Hh}{wL}=L_1$$

مقدار تغییرمکان افقی در کابل نیز به صورت زیر است:

$$L_2=L-L_1=\frac{L}{2}+\frac{Hh}{wL}$$

با لنگرگیری حول B مقدار نیروی CB بدست خواهد آمد:

$$HD-w\frac{L_2^2}{2}=0$$

$$HD-\frac{w}{2}\left(\frac{L}{2}+\frac{Hh}{wL}\right)^2=0 \qquad (۵-۱٤)$$

معادله ۵-۱٤ یک معادله درجه دو بر حسب H می‌باشد. برای تعیین H بایستی مقادیر AC و BC را با انتگرال‌گیری حول A و C تعیین کرد.

$$H(D-h)-w\frac{L_1^2}{2}=0$$

$$H=\frac{wL_1^2}{2(D-h)} \qquad (۵-۱۵)$$

برای CB داریم:

$$HD-\frac{wL_2^2}{2}=0$$

$$H=\frac{wL_2^2}{2D} \qquad (۵-۱٦)$$

از معادلات۵-۱۵ و ۵-۱٦ داریم:

[1] Maximum deflection

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\frac{wL_1^2}{2(D-h)}=\frac{wL_2^2}{2D}$$

$$L_1=\sqrt{\frac{D-h}{D}}L_2$$

اما

$$L_1+L_2=L$$

$$\Rightarrow L_2\left[\sqrt{\frac{D-h}{D}}+1\right]=L$$

$$L_2=\frac{L}{\left(\sqrt{\frac{D-h}{D}}+1\right)} \qquad (۵-۱۷)$$

از معادله ۵-۱۶ داریم:

$$H=\frac{wL^2}{2D\left(\sqrt{\frac{D-h}{D}}+1\right)^2} \qquad (۵-۱۸)$$

در کابل شکل۵-۷ حداکثر کشش کابل در B اتفاق می‌افتد.

$$T_{\max}=\sqrt{(wL_2)^2+H^2} \qquad (۵-۱۹)$$

که L_2 از معادله ۵-۱۷ و H نیز از معادلات ۵-۱۴ و ۵-۱۶ و یا ۵-۱۸ بدست می‌آید

در B شیب کابل به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{wL^2}{H} \qquad (۵-۲۰)$$

لذا از معادله ۵-۱۲ داریم:

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)_{z=L}=-\frac{w}{H}L+\frac{wL}{2H}-\frac{h}{L}=-\frac{wL}{2H}-\frac{h}{L} \qquad (۵-۲۱)$$

برای یک کابل که تکیه‌گاه‌ها در یک سطح باشند مقدار $h=0$ می‌باشد و معادلات بالا به صورت زیر در می‌آیند:

$$\frac{dy}{dz}=\frac{w}{H}\left(\frac{L}{2}-z\right) \qquad (۵-۲۲)$$

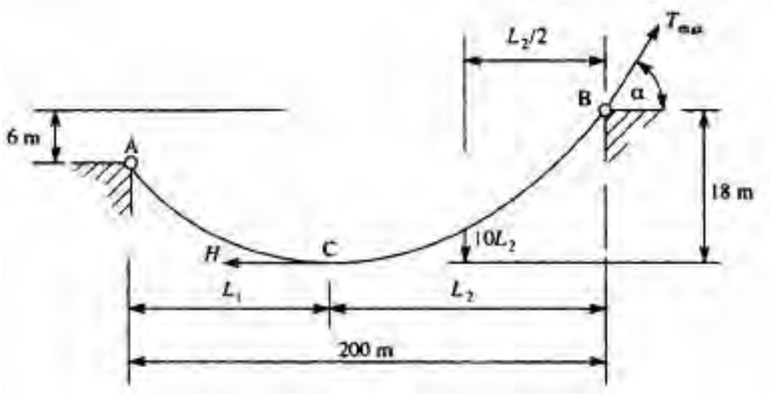
کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$y=\frac{w}{2H}\left(Lz-z^2\right) \qquad (۵-۲۳)$$

$$H=\frac{wL^2}{8D} \qquad (۵-۲۴)$$

$$T_{max}=\frac{wL}{2}\sqrt{1+\left(\frac{L}{4D}\right)^2} \qquad (۵-۲۵)$$

مثال۵-٤) در شکل ۵-۸ مقدار حداکثر کشش و حداکثر شیب را تعیین کنید. کابل تحت اثر یک بار گسترده به شدت *10kN/m* است.



شکل ۵-۸ کابل معلق مثال۵-٤

از معادله ۵-۱۷ داریم:

$$L_2=\frac{200}{\left(\sqrt{\frac{18-6}{18}}+1\right)}=110.1m$$

از معادله ۵-۱٦ داریم:

$$H=\frac{10\times110.1^2}{2\times18}=3367.2kN$$

حداکثر کشش از معادله ۵-۱۹ بدست می‌آید:

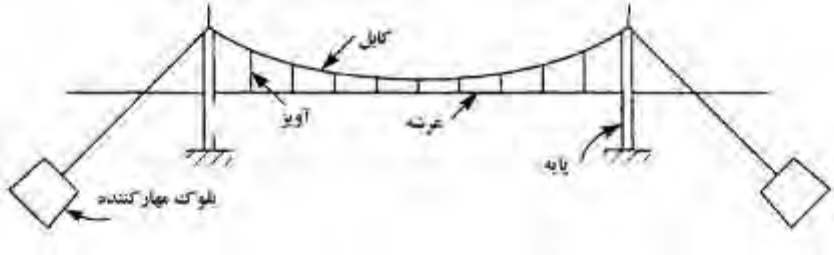
$$T_{max}=\sqrt{(10\times110.1)^2+3367.2^2}=3542.6kN$$

با استفاده از معادله ۵-۲۰ داریم:

$$\alpha_{max}=\tan^{-1}\frac{10\times110.1}{3367.2}=18.1^\circ$$

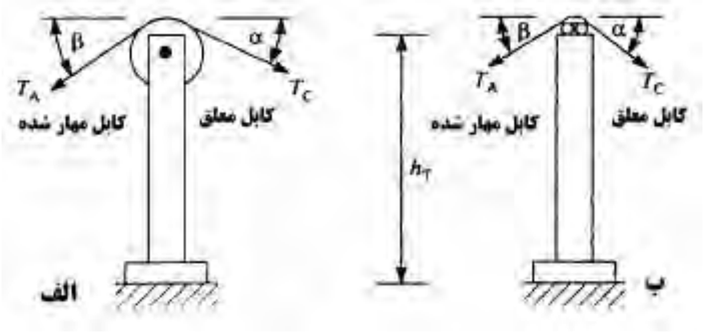
پل‌های معلق

در شکل ۵-۹ یک شکل متداول از پل‌های معلق نشان داده شده است.



شکل۵-۹ شماتیک یک پل معلق

عرشه پل به صورت معلق بوده و توسط کابل‌هایی به سمت بالا کشیده می‌شوند. اتصال کابل‌ها به عرشه به صورت مفصلی است. همچنین برای غلبه بر کشش زیاد کابل از دو طرف توسط بلوک‌هایی محفوظ در خاک نگهداری می‌شوند. مهمترین مزیت این نوع کابل‌ها در این سازه‌ها پوشش دهانه‌های بلند است. پل‌های معلق برای دهانه‌های کوچک نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. مهمترین قسمت باری که کابل‌ها تحمل می‌کند ناشی از وزن عرشه است که در مقایسه با وزن خود کابل می‌توان از وزن کابل صرف نظر نمود. بنابراین می‌توان فرض کرد که کابل‌ها یک بار گسترده یکنواخت را منتقل می‌کنند. کابل نشان داده شده شکل ۵-۹ یک کابل در بالای برج را نشان می‌دهد. برای روند تحلیل نیاز به ساده سازی داریم. شکل ۵-۱۰الف یک نمونه از حالات ساده شده را که کابل بدون اصطکاک بر روی یک چرخ قرار دارد نشان می‌دهد. کشش در کابل T_C با کشش T_A برابر است.



شکل۵-۱۰ شکل ایده

مقدار شیب α و β ممکن است با هم برابر نباشند. مقدار برآیند نیروهای افقی H_T:

$$H_T = T_C \cos\alpha - T_A \cos\beta \quad \Rightarrow \quad T_A = T_C$$

$$H_T = T_C(\cos\alpha - \cos\beta) \qquad (۵-۲۶)$$

مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده در پای برج برابر است با:

$$M_{T(\max)} = H_T h_T = T_C(\cos\alpha - \cos\beta)h_T \qquad (۵-۲۷)$$

همچنین مولفه قائم نیروها برابر است با:

$$V_T = T_C(\sin\alpha + \sin\beta) \qquad (۵-۲۸)$$

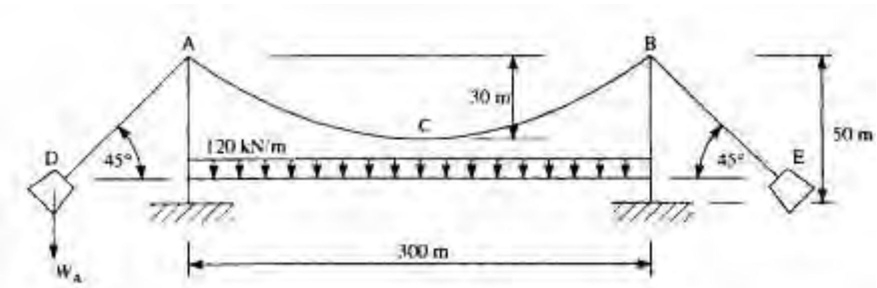
در شکل ۵-۱۰ ب کابل در بالا توسط غلتک‌هایی متصل شده است. در این حالت تکیه‌گاه نمی‌تواند در برابر نیروهای افقی مقاومت کند:

$$T_A \cos\beta = T_C \cos\alpha \qquad (۵-۲۹)$$

$$V_T = T_C \sin\alpha + T_A \sin\beta \qquad (۵-۳۰)$$

مثال۵-۵) کابل نشان داده شده در شکل۵-۱۱ توسط قرقره‌هایی بدون اصطکاک در نقاط A وB به برج متصل شده است. همچنین کابل‌ها در نقاط D وE به زمین مهار شده‌اند. کابل نیروی گسترده خطی به شدت *120kN/m* را حمل می‌کند. میزان قطر کابل‌ها را طوری تعیین کنید که میزان تنش در آنها از میزان $600N/mm^2$ تجاوز نکند. همچنین میزان لنگر پای برج را برای اینکه بتواند نیروی بلوک‌های مهاری را تحمل کند را حساب کنید.

حل) مقدار کشش حداکثر در کابل از معادله ۵-۲۵ تعیین می‌شود:



شکل ۵-۱۱ پل معلق مثال۵-۵

$$T_{\max} = \frac{120\times300}{2}\sqrt{1+\left(\frac{300}{4\times30}\right)^2} = 48466.5kN$$

حداکثر تنش برابر است با:

$$\sigma_{max} = \frac{T_{max}}{\frac{\pi \times d^2}{4}}$$

$$600 = \frac{58466.5 \times 10}{\frac{\pi \times d^2}{4}} \quad \Rightarrow \quad d = 320.7$$

مقدار زاویه در بالای برج از معادله ۵–۲۰ تعیین می‌شود که در آن $L_2=L/2$ بنابراین:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{wL}{2H} = \tan^{-1}\frac{120\times 300}{2H}$$

که در آن H از معادله ۵–۲٤ بدست می‌آید:

$$H = \frac{120\times 300^2}{8\times 30} = 45000kN$$

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{120\times 300}{2\times 45000} = 21.8^\circ$$

بنابراین از معادله ۵–۲۷ مقدار لنگر در پای برج بدست می‌آید:

$$M_T = 48466.5\left(\cos 21.8^\circ - \cos 45^\circ\right)\times 50 \quad \Rightarrow \quad M_T = 536000\, kN.m$$

از معادله ۵–۲۸ داریم:

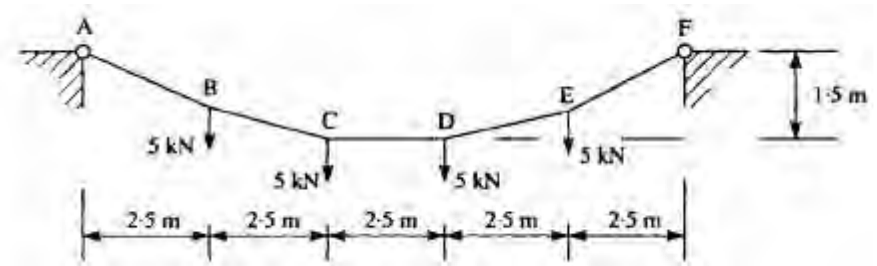
$$V_T = 48466.5\left(\sin 21.8^\circ + \sin 45^\circ\right) \quad \Rightarrow \quad V_T = 52269.9kN$$

در نهایت W_A وزن بلوک است:

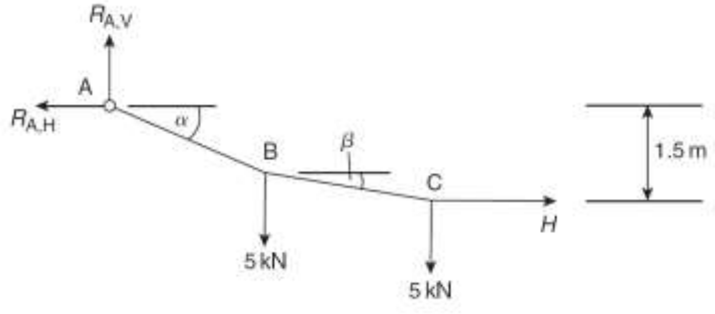
$$W_A = T_A \cos 45^\circ = 48466.5 \cos 45^\circ \quad \Rightarrow \quad W_A = 34271.0kN$$

مسائل

۵–۱) مقدار نیروی داخل هر قسمت از کابل نشان داده شده در شکل زیر را بیابید. همچنین مقدار تغییرمکان قائم محل B و E را بیابید.



حل) با مراجعه به شکل زیر و با گشتاورگیری حول A داریم:

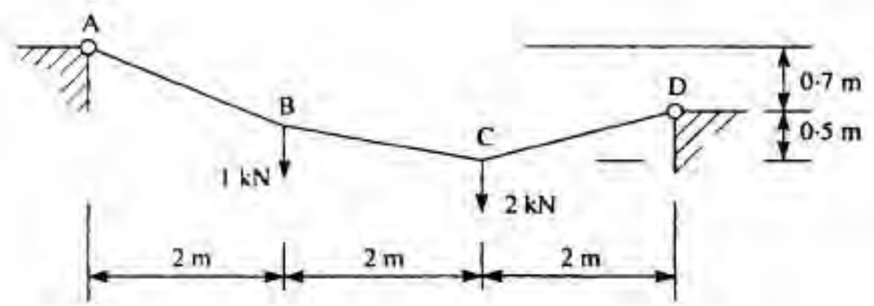


$$H \times 1.5 - 5 \times 5 - 5 \times 2.5 = 0$$
$$H = 25kN = T_{CD}$$
$$R_{A,H} - H = 0$$
$$R_{A,H} = 25kN$$
$$R_{A,V} = 10kN$$
$$T_{AB} = \sqrt{10^2 + 25^2} = 26.9kN$$

با توجه به شکل بالا داریم:

$$\tan\alpha = \frac{10}{25} = 0.4 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 21.8^\circ$$
$$\tan\beta = \frac{0.5}{2.5} = 0.2 \quad \Rightarrow \quad \beta = 11.3^\circ$$
$$T_{CB} = \cos 11.3^\circ = T_{CD} = 25kN \quad \Rightarrow \quad T_{CB} = 25.5kN$$

۵-۲) مقدار خیز در B و همچنین مقدار کشش در هر قسمت از کابل زیر را تعیین کنید.



حل) با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم و سپس گشتاورگیری حول C داریم:

$$R_{A,V} + R_{D,V} = 1+2 = 3kN$$

$$R_{D,H} \times 0.5 - R_{D,V} \times 2 = 0$$

$$R_{D,H} - 4R_{D,V} = 0$$

با گشتاورگیری حول A داریم:

$$R_{D,H} + 8.57R_{D,V} - 14.29 = 0$$

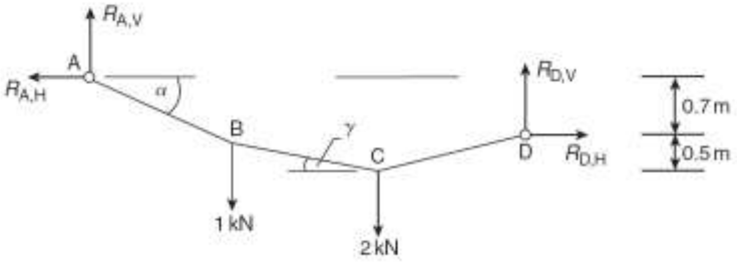
$$-12.57R_{D,V} + 14.29 = 0$$

$$R_{D,V} = 1.14kN$$

$$R_{D,H} = 4.56kN = R_{A,H}$$

$$R_{A,V} = 1.86kN$$

$$\tan\alpha = \frac{R_{A,V}}{R_{A,H}} = \frac{1.86}{4.56} = 0.41 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 22.19^\circ$$



$$\gamma = \tan^{-1}\frac{(1.2-0.81)}{2} = 11.03^\circ$$

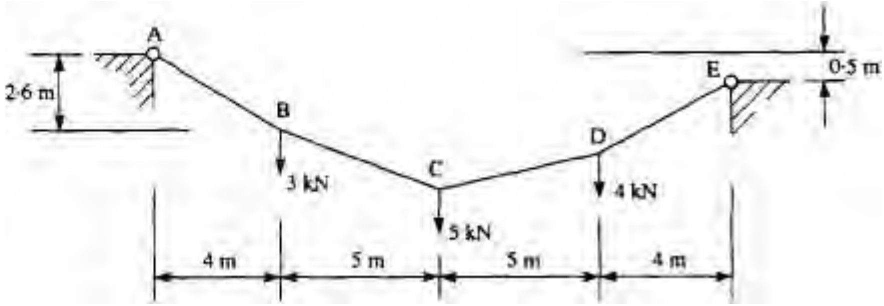
$$T_{AB} = \sqrt{4.56^2 + 1.86^2} = 4.9kN$$

$$T_{DC} = \sqrt{4.56^2 + 1.14^2} = 4.7kN$$

$$T_{BC}\cos 11.03^\circ - T_{BA}\cos 22.19^\circ = 0 \quad \Rightarrow \quad T_{BC} = 4.6kN$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۵-۳) در کابل زیر مقدار خیز در D و C را نسبت به A تعیین کنید.



۵-٤) یک کابل نیروی گسترده‌ای به شدت $10kN/m$ و به طول $80m$ می‌باشد. در صورتی که حداکثر نیروی قابل حمل توسط کابل برابر $1000kN$ باشد، مقدار خیز کابل را تعیین کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

فصل ششم

قوس‌ها

اولین بار قوس‌ها در ایران و روم مورد استفاده قرار گرفتند. قوس‌ها در گذشته جزو مهمترین اجزاء یک سازه بودند و برای پوشش دهانه‌ها بلند پل‌ها و سقف‌ها و عموماً به شکل نیمدایره مورد استفاده قرار می‌گرفتند. علت به کارگیری شکل نیمدایره برای این قوس‌ها راحتی در اجرا بوده است. همانطور که بعداً خواهیم دید این نوع از قوس‌ها نیروهای وارده را به صورت فشاری منتقل کرده بنابراین برای ساخت آنها از مصالح بنایی مانند شفته استفاده می‌شده. در قرون وسطی استفاده از قوس در اروپا رواج زیادی یافت. در قرن ۱۸ میلادی از قوس‌ها برای پوشش دهانه پل‌ها استفاده می‌شد و عموماً مصالح مصرفی در آنها از نوع بنایی بودند. امروزه در ساخت قوس‌ها از فولاد، بتن و بتن پیش تنیده استفاده می‌شود که علاوه بر مقاومت فشاری دارای مقاومت خوبی در برابر کشش می‌باشند.

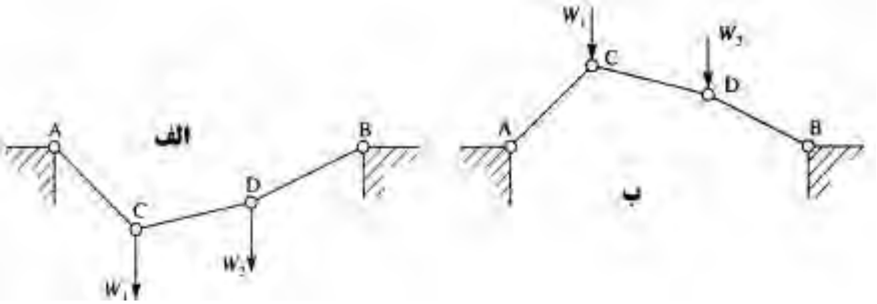
۶-۱ قوس‌های خطی[1]

انتقال نیرو در قوس‌ها قابل تشبیه به کابل‌های انعطاف پذیر می‌باشد. در بخش ۵-۱ ما نیروهای کششی داخل یک کابل که تحت بارهای متمرکز بود را تعیین کردیم و دیدیم که هندسه کابل در میزان این بارهای داخلی موثر است.

حال فرض کنید که به جای کابل شکل ۵-۲الف سه میله AC و CD و DB توسط مفصل در نقاط C و D به یکدیگر متصل شده‌اند، همچنین تکیه‌گاه‌های A و B نیز به صورت پین شده کل بارها را تحمل می‌کنند. تحت یک بارگذاری یکسان، تغییر مکان کابل نشان داده شده در شکل۵-۲ با شکل ۶-۱الف برابر است. بعلاوه مقادیر نیروهای ایجاد شده در این اعضاء با مقادیر نیروی کابل برابر است. حال شکل ۶-۱ب را ببینید که قوس ۶-۱الف برعکس شده است ولی بارهای W_1 و W_2 به همان صورت بر آن اعمال می‌شوند. به طور آشکار پیداست که تمام اعضا در این حالت در فشار کار می‌کنند که می‌توان آنها را از طریق

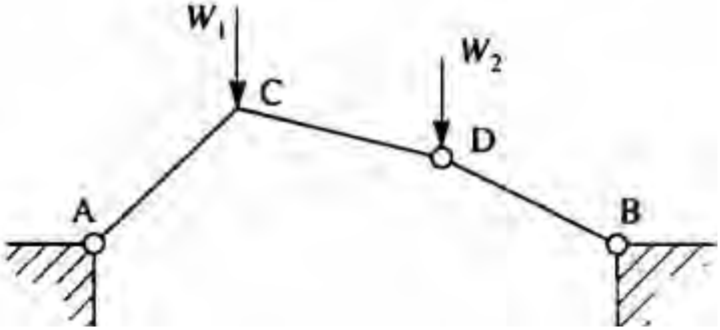
[1] Linear arch

تحلیل بدست آورد. چنین سیستمی تحت تاثیر نیروهای برشی و خمشی نیست و تمام نیروهای داخلی آن به صورت محوری هستند. به این نوع سیستم‌ها قوس‌های خطی گویند.



شکل۶-۱هم ارزی کابل و قوس

همچنین از بخش ۵-۲ می‌توان این نتیجه را استنباط نمود که نیروهای داخلی یک قوس که تحت بار گسترده ثابتی می‌باشد به شکل سهمی و محوری است. در شکل ۶-۱ب با تغییر مقادیر بارهای W_1 و W_2 مقدار نیروی ایجاد شده در سیستم تغییر می‌کند. برای جلوگیری از فروریزش و ناپایداری سازه بایستی تکیه‌گاه‌های A وB به صورت پین باشند تا از لغزش سیستم جلوگیری شود. در صورتی که مفصل C (یا D)به یک گره صلب تغییر کند، باز سیستم معین و پایدار خواهد بود، به این نوع سیستم، سیستم سه مفصلی گفته می‌شود. اگر مفصل D نیز از آن حذف شود و به جای آن یک گره صلب قرار داده شود تنها دو مفصل باقی می‌ماند و بقیه اعضا بدون تغییر بماند به آن یک قوس دو مفصلی گفته می‌شود. در صورتی که مفصل D به یک گره صلب تبدیل می‌شد در این حالت سیستم تنها دارای دو مفصل خواهد بود. در این حالت سیستم معین ایستایی می‌باشد.



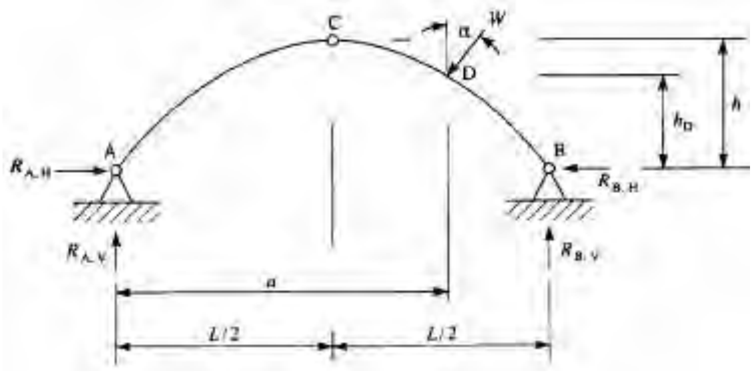
شکل۶-۲ قوس سه مفصلی خطی

۶-۲ قوس‌های سه مفصلی

در تحلیل قوس‌های سه مفصلی[1] اولین گام تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است.

تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی – تکیه‌گاه‌ها در یک سطح

با توجه به شکل ۶-۳ قوس مورد بررسی در حال حمل بار متمرکز W در نقطه D به فاصله a از بر تکیه‌گاه A می‌باشد.



شکل۶-۳ قوس سه مفصلی

هر دو تکیه‌گاه A و B برای پایداری سازه و معین بودن آن باید به صورت مفصلی باشند. بنابراین تکیه‌گاه‌ها دارای دو مولفه قائم و افقی می‌باشند. مفصل C قادر به انتقال خمش نیست ولی می‌تواند برش را انتقال دهد. با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_{A.V} + R_{B.V} - W\cos\alpha = 0 \qquad (۶-۱)$$

و برای معادله تعادل در جهت افق خواهیم داشت:

$$R_{A.H} - R_{B.H} - W\sin\alpha = 0 \qquad (۶-۲)$$

با گرفتن لنگر حول B داریم:

$$R_{A.V} \times L - W\sin\alpha \times h_D - W\cos\alpha \times (L-a) = 0 \qquad (۶-۳)$$

با توجه به اینکه نقطه C مفصل می‌باشد، مقدار لنگر در آن صفر است. حال با گشتاورگیری حول این نقطه داریم:

$$R_{A.V} \times \frac{L}{2} - R_{A.H} \times h = 0 \qquad (۶-۴)$$

[1] Three-pinned arch

با استفاده از چهار معادله ٦-٣ تا ٦-٤ ما می‌توانیم چهار مجهول مسئله را تعیین کنیم و با تعیین این عکس‌العمل‌ها قادر خواهیم بود نیروی برشی و لنگر خمشی را در هر نقطه از آن بدست آوریم.

مثال٦-١) مقدار برش، نیروی محوری و لنگرخمشی را در نقطه X در شکل ٦-٤ را تعیین نمایید.

حل) در تحلیل قوس‌های سه مفصلی اولین گام تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی است. برای تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی قائم در A وB می‌توان به راحتی با گشتاورگیری حول یکی از آنها دیگری را تعیین کرد به عنوان مثال با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_{A.V}\times 12-60\left(6\cos 30^{\circ}+6\right)-100\left(6\sin 30^{\circ}+6\right)=0$$

$$\Rightarrow R_{A.V}=131.0kN$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

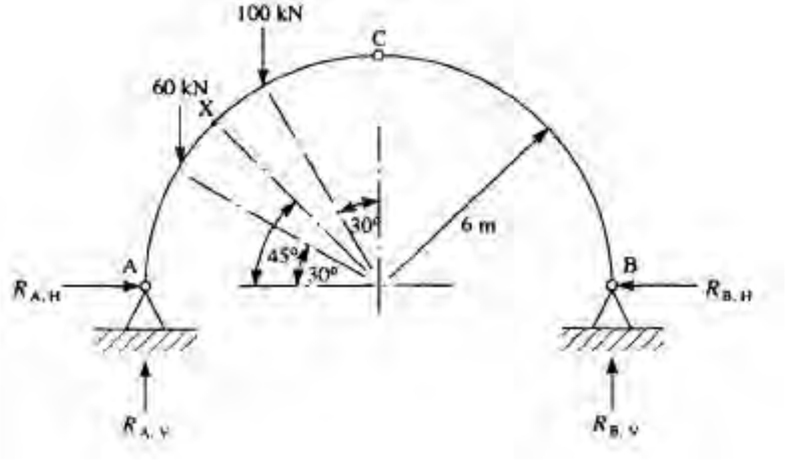
$$R_{B.V}+R_{A.V}-60-100=0 \quad \Rightarrow \quad R_{B.V}=29.0kN$$

همچنین با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی داریم:

$$R_{A.H}=R_{B.H}$$

با گشتاور گیری حول نقطه C در قطعه سمت راست C داریم:

$$R_{B.H}\times 6-R_{B.V}\times 6=0 \quad \Rightarrow \quad R_{B.H}=29.0kN=R_{A.H}$$



شکل ٦-٤ قوس سه مفصلی مثال٦-١

برای تعیین نیروهای داخلی[1] در X می‌توان با یک مقطع به بررسی آن پرداخت. نیروی محوری در این مقطع به صورت زیر است:

$$N_X = R_{A.V}\cos 45^\circ - R_{A.H}\sin 45^\circ + 60\cos 45^\circ \quad \Rightarrow \quad N_X = -70.7kN$$

برای تعیین نیروی برشی در X با ایجاد یک برش نیروی داخلی برشی در این مقطع به صورت عمود بر مقطع می‌باشد.

$$S_X = R_{A.V}\sin 45^\circ - R_{A.H}\cos 45^\circ - 60\sin 45^\circ \quad \Rightarrow \quad S_X = +29.7kN$$

حال با نوشتن معادله تعادل برای قطعه سمت چپ مقطع زده شده از X مقدار لنگر موجود در آن را نیز تعیین می‌کنیم.

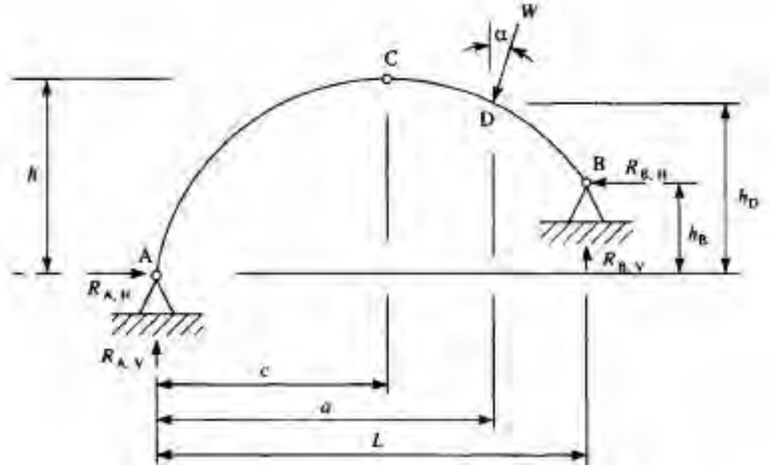
$$M_X = R_{A.V}\left(6 - 6\cos 45^\circ\right) - R_{A.H}\times 6\sin 45^\circ - 60\left(6\cos 30^\circ - 6\cos 45^\circ\right)$$

$$\Rightarrow M_X = +50.0kN.m$$

توجه شود که علامت نیروهای بدست آمده در روابط بالا بر اساس فرضیات فصل سوم می‌باشد.

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی[2] - تکیه‌گاه‌ها در سطوح مختلف

در شکل٦-٥ تکیه‌گاه‌های A و B در یک سطح نیستند و تکیه‌گاه B به اندازه h_B بالاتر از A قرار دارد. با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:



شکل٦-٥ قوس سه مفصلی با تکیه‌گاه در دو سطح

[1] Internal forces
[2] Support reactions

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$R_{A.V} + R_{B.V} - W\cos\alpha = 0 \qquad (٦\text{–}٥)$$

و با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی داریم:

$$R_{A.H} - R_{B.H} - W\sin\alpha = 0 \qquad (٦\text{–}٦)$$

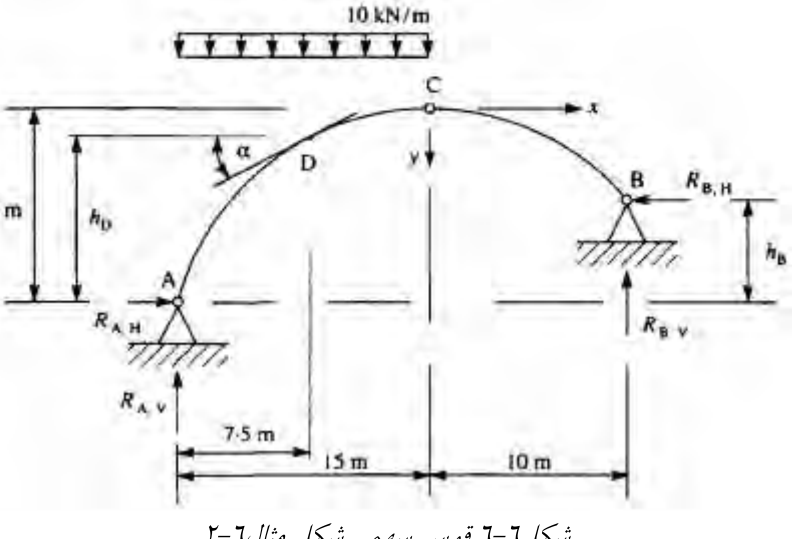
همچنین با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_{A.V}\times L - R_{A.H}\times h_B - W\cos\alpha(L-a) - W\sin\alpha(h_D - h_B) = 0 \qquad (٦\text{–}٧)$$

با توجه به اینکه نقطه C مفصل می‌باشد، مقدار لنگر در آن صفر است. با جدا کردن قوس از مفصل C و گشتاور گیری حول نقطه C می‌توان مولفه‌های قائم تکیه‌گاه‌ها را تعیین کنیم. با نوشتن معادلات تعادل لنگر برای قطعه سمت چپ مفصل C و حول C داریم:

$$R_{A.V}\times c - R_{A.H}\times h = 0 \qquad (٦\text{–}٨)$$

مثال٦–۲) در قوس سهمی[1] شکل ٦–٦ نشان داده شده در شکل ٦–٦ یک بار به شدت *10kN/m* با به صورت افقی حمل می‌کند که این بار بر روی قسمت AC اعمال می‌شود. مقدار نیروی محوری، نیروی برشی و لنگر خمشی را در نقطه D تعیین کنید.



شکل٦–٦ قوس سهمی شکل مثال٦–۲

---

1 Parabolic arch

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

در ابتدا بایستی موقعیت نقطه B و D را تعیین کنیم برای اینکار معادله سهمی را به صورت $y = kx^2$ فرض می‌کنیم. که k ثابت می‌باشد. در A مقدار $y=7m$ و $x=-15m$ می‌باشد. با توجه به معادله $y = kx^2$ داریم:

$$7 = k \times (-15)^2 \quad \Rightarrow \quad k = 0.0311$$

$$y = 0.0311 x^2$$

$$y_B = 0.0311 \times (10)^2 = 3.11m$$

$$h_B = 7 - 3.11 = 3.89m$$

$$y_D = 0.0311 \times (-7.5)^2 = 1.75m$$

$$h_D = 7 - 1.75 = 5.25m$$

با گشتاورگیری حول A داریم:

$$R_{B.V} \times 25 + R_{B.H} \times 3.89 - 10 \times 15 \times 7.5 = 0$$

با ساده سازی داریم:

$$R_{B.V} + 0.16 R_{B.H} - 45.0 = 0$$

با گشتاورگیری حول نقطه C :

$$R_{B.V} \times 10 - R_{B.H} \times 3.11 = 0$$

$$R_{B.V} - \times 3.11 R_{B.H} = 0$$

با حل معادلات بالا به صورت همزمان:

$$R_{B.V} = 29.7kN \quad , \quad R_{B.H} = 95.5kN$$

با نوشتن معادلات تعادل در جهت افقی داریم:

$$R_{A.H} = R_{B.V} = 95.5kN$$

با نوشتن معادلات تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_{A.V} + R_{B.V} - 10 \times 15 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.V} = 120.3kN$$

برای بدست آوردن نیروی محوری در مقطع C به مقدار شیب در این قسمت نیاز داریم:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_D = 2 \times 0.0311 \times (-7.5) = -0.4665 = -\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = 25^\circ$$

$$N_D = -R_{A.V} \sin 25^\circ - R_{A.H} \cos 25^\circ + 10 \times 7.5 \sin 25^\circ$$

$$\Rightarrow N_D = -105.7kN \text{ compression}$$

نیروی برشی در مقطع D برابر است با:

$$S_D = R_{A.V}\cos 25^\circ - R_{A.H}\sin 25^\circ - 10\times 7.5\cos 25^\circ$$

$$\Rightarrow S_D = +0.7kN$$

در نهایت لنگر ایجاد شده در مقطع D برابر است با:

$$M_D = R_{A.V}\times 7.5 - R_{A.H}\times 5.25 - 10\times 7.5\times\frac{7.5}{2}$$

$$\Rightarrow M_D = +119.6kN.m$$

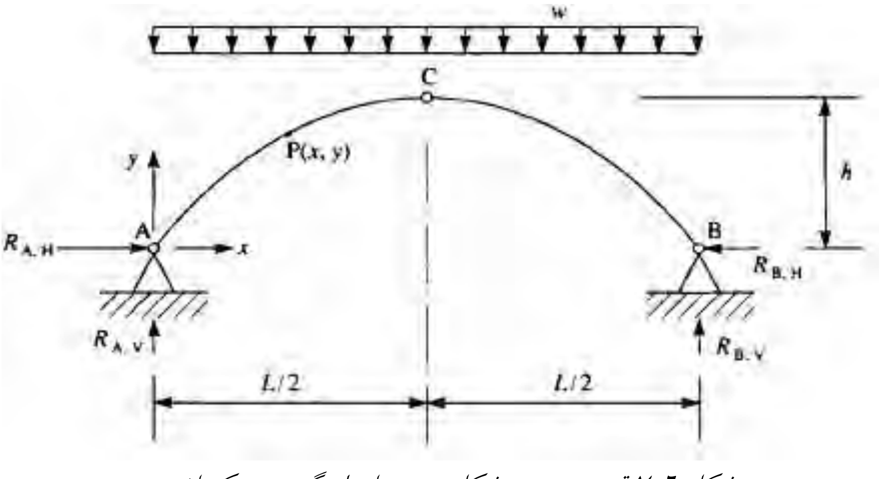
۶-۳ قوس‌های سه مفصلی سهمی شکل تحت بار گسترده یکنواخت

در بخش ۵-۲ کابل‌هایی که به صورت سهمی بودند و بارهای یکنواختی را حمل می‌کردند مورد بحث قرار گرفتند. حال یک قوس سه مفصلی به صورت متقارن مطابق شکل ۶-۷ را در نظر بگیرید. مقدار مولفه‌های قائم در تکیه‌گاه‌ها برابر است با:

$$R_{A.H} = R_{B.H}$$

حال با گشتاورگیری حول نقطه C در سمت چپ این قطعه داریم:

$$R_{A.H}\times h - R_{A.V}\frac{L}{2} + \frac{wL}{2}\frac{L}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A.H} = \frac{wL^2}{8h}$$



شکل ۶-۷ قوس سهمی شکل به همراه بار گسترده یکنواخت

معادله سهمی با فرض مبداء مختصات در A، برابر است با:

$$y=\frac{4h}{L^2}\left(Lx-x^2\right)$$

مقدار لنگرخمشی در هر نقطه $P(x,y)$ برابر است با:

$$M_P=R_{A.V}x-R_{A.H}y-\frac{wx^2}{2}$$

با جایگذاری در معادله لنگر:

$$M_P=\frac{wL}{2}x-\frac{wL^2}{8h}\frac{4h}{L^2}\left(Lx-x^2\right)-\frac{wx^2}{2}=0$$

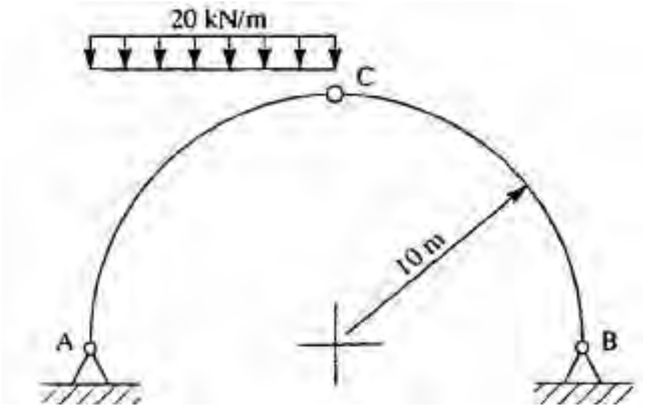
مقدار برش در تمام مقطع برابر صفر است.

مسائل

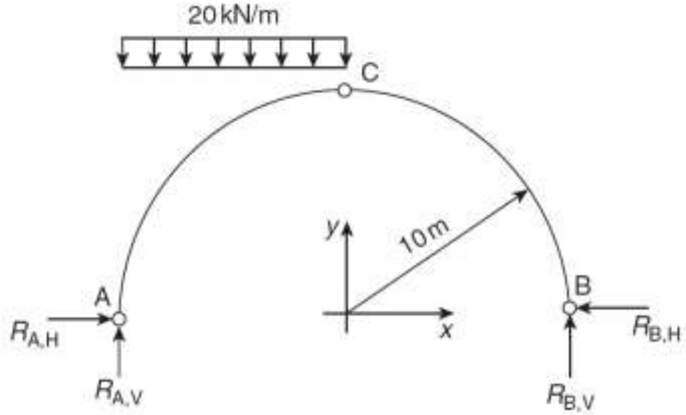
۶-۱) در شکل نیم‌دایره زیر، مقدار حداکثر لنگر ایجاد شده را تعیین کنید.

$$R_{A,V}\times 20-20\times 10\times 15=0$$

$$R_{A,V}=150\,kN$$



با توجه به دیاگرام جسم آزاد نشان داده شده در شکل زیر و با گشتاورگیری حول C:



$$R_{A,H}\times 10 - R_{A,H}\times 10 + \frac{20\times 10^2}{2} = 0$$
$$R_{A,H} = 50kN$$

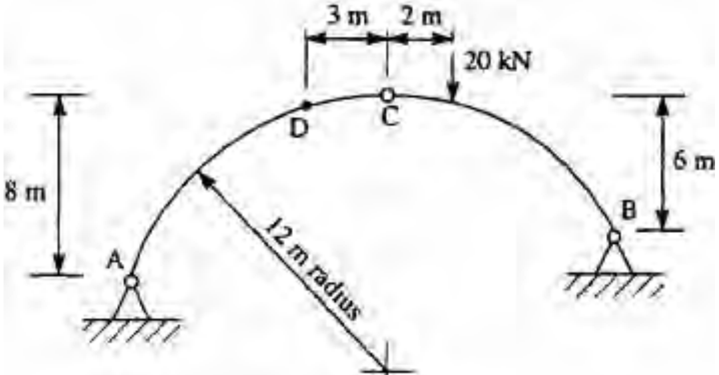
معادله قوس به صورت زیر است:

$$x^2 + y^2 = 10^2$$

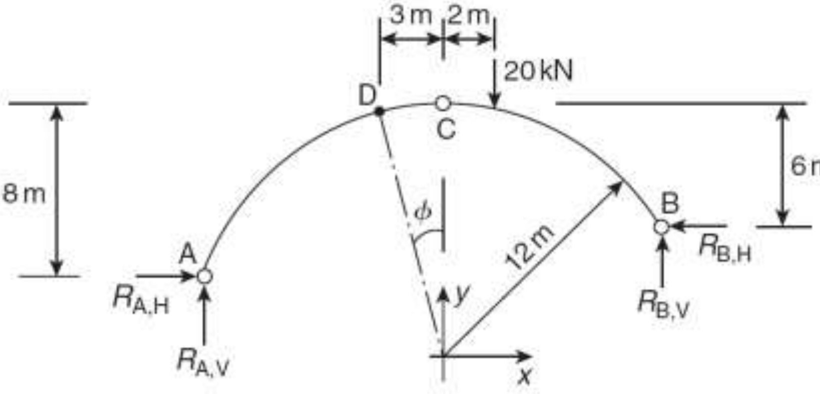
لذا خواهیم داشت:

$$M = R_{A,H}\times 5 - R_{A,H}\times 8.66 - \frac{20\times 5^2}{2}$$
$$= 150\times 5 - 50\times 8.66 - 250 = 67kN.m$$

۶-۲) شکل نشان داده شده در زیر یک قوس سه مفصلی می‌باشد که دارای شعاع ۱۰متر است. مقدار نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری در D را تعیین کنید.



حل) دیاگرام جسم آزاد سیستم در شکل زیر نمایش داده شده است:



معادله قوس به صورت زیر است:

$$x^2+y^2=12^2$$

با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_{A,V}\times 21.7-R_{A,H}\times 2-20\times 8.39=0$$

$$10.85R_{A,V}-R_{A,H}-83.9=0$$

$$R_{A,V}\times 11.31-R_{A,H}\times 8=0$$

$$1.41R_{A,V}-R_{A,H}=0$$

$$9.44R_{A,V}-83.9=0$$

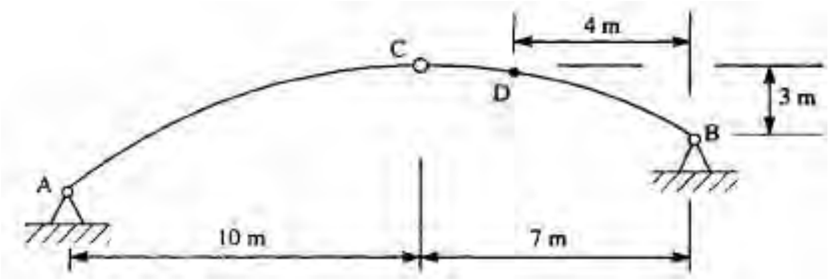
$$R_{A,V}=8.89kN \quad , \quad R_{A,H}=12.53kN$$

$$\phi=\sin^{-1}\frac{3}{12}=14.48^\circ$$

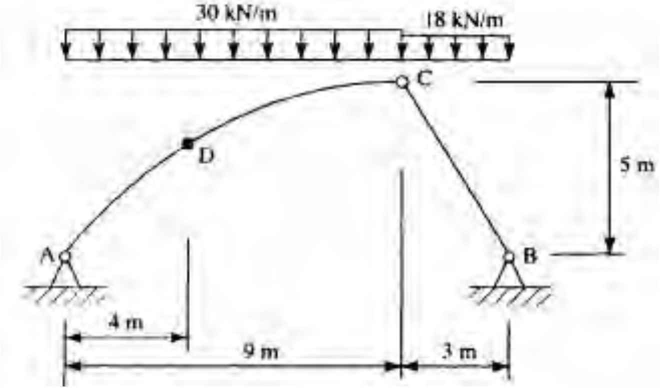
$$NF=12.53\cos\phi+8.89\sin\phi=14.35kN$$

$$SF=8.89\cos\phi-12.53\sin\phi=5.48kN$$

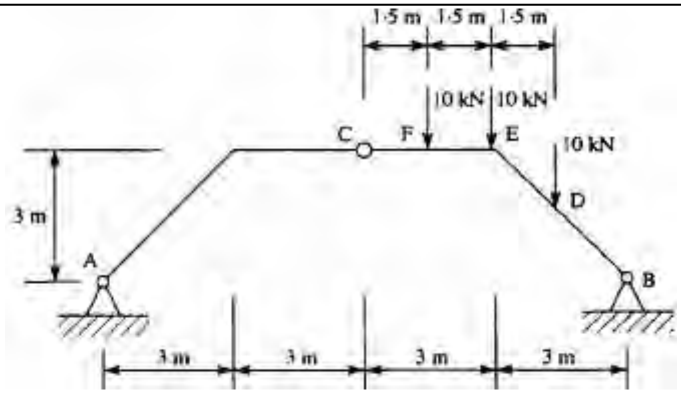
۶-۳) شکل صفحه بعد یک قوس سه مفصلی می‌باشد. در صورتی که یک بار گسترده به شدت *40kN/m* بر روی قسمت CB اعمال شود، مقدار لنگر موجود در مقطع D را تعیین کنید.



۶–۴) در قوس نشان داده شده در شکل زیر قسمت AC به صورت سهمی شکل به مبداء C بوده در حالی که CB مستقیم می‌باشد. در صورتی که یک بار گسترده به شدت $30kN/m$ بر روی قسمت AC اعمال شود و یک بار گسترده به شدت $18kN/m$ بر روی قسمت CB اعمال شود، مقدار نیروی برشی، لنگر خمشی و نیروی محوری در مقطع D را تعیین نمایید.



۶–۵) در شکل زیر دیاگرام نیروی محوری، لنگر خمشی و نیروی برشی را ترسیم کنید.


1.5 m
1.5 m
1.5 m
10 kN
10 kN
10 kN
C
F
E
D
A
B
3 m
3 m
3 m
3 m
3 m

فصل هفتم

تنش[1] و کرنش[2]

با توجه به مطالب ارائه شده در فصول قبل، قادریم نیروهای داخلی را برای سازه‌ها با شکل‌های مختلف تعیین نماییم. به عنوان مثال می‌توانیم نیروهای داخلی محوری، برشی و لنگر خمشی در تیر، نیروهای محوری در خرپاها و همچنین نیروهای داخلی کابل‌ها و قوس‌ها را تعیین کنیم. این نیروها در کل مقطع عضو وجود دارد. به طور کلی چهار نوع نیروی داخلی را می‌توان تصور کرد: محوری، برشی، خمشی و پیچشی. این نیروها باعث ایجاد تنش و کرنش در مقاطع عضو می‌شود که در ادامه معرفی و مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۷-۱ تنش نرمال در اعضای کششی و فشاری

در سازه‌های مهندسی اندازه‌های فیزیکی تمام اجزای باربر سازه‌ها باید تعیین و تعریف شوند. این اجزا باید طوری طراحی شوند که بتوانند در مقابل نیروهای واقعی و یا احتمالی که ممکن است بر آنها تاثیر نمایند، مقاومت کنند. به طور مثال جدار نازک یک مخزن تحت فشار باید مقاومت کافی برای مقابله با فشارهای داخلی را داشته باشد و یا یک سقف ساختمان باید به قدر کافی قوی باشد تا بتواند مقاصد مورد نظر را برآورده نماید و یا یک محور ماشین باید ابعاد کافی برای انتقال لنگر پیچشی موثر را داشته باشد. در کنار موضوع فوق قسمت‌های مختلف یک سازه مهندسی باید به قدر کافی صلب باشند تا تحت تاثیر بارهای وارده تغییرشکل زیاد از خود نشان ندهند. مثلاً ممکن است سقف یک ساختمان مقاومت کافی در مقابل بارهای وارده را داشته باشد ولی تحت تاثیر این بارها، آنچنان افت نماید که باعث صدمه و آسیب به نازک کاری‌های زیر خود و یا از لحاظ روانی پریشانی استفاده کنندگان را فراهم آورد. توانایی محاسبه بار فشاری حداکثری که یک ستون لاغر قبل از کمانه کردن می‌تواند تحمل کند، از اهمیت عملی زیادی برخوردار است.

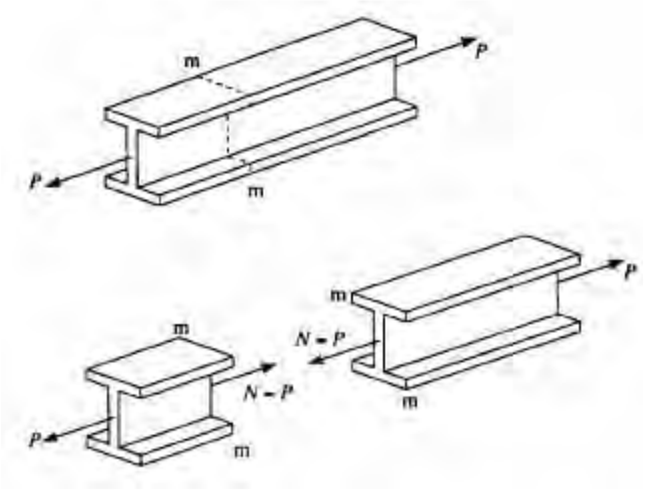
---

[1] Stress
[2] Strain

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

آن بخشی از علم مکانیک که با استفاده از روش‌های تحلیلی به بررسی و تعیین مقاومت، صلبیت و پایداری ارتجاعی اعضای باربر می‌پردازد به مکانیک جامدات و یا مقاومت مصالح معروف است.

ساده‌ترین نوع تنش، تنش‌های عمودی ناشی از بارهای محوری هستند. فرض کنید که یک عضو سازه دارای مقطع I شکل و مساحت A و در معرض نیروی محوری P مانند شکل ۷-۱الف باشد.



شکل۷-۱ عضو سازه‌ای با نیروی محوری

در هر مقطعی از عضو معرفی شده مقدار نیروی داخلی آن با توجه به فصل سوم برابر P است. در شکل ۷-۱ب دیده می‌شود که نیروی داخلی در هر مقطعی از عضو ثابت است ولی نیروی P در یک نقطه از تیر اعمال شده و به صورت متمرکز است اما ما می‌توانیم فرض کنیم که در فاصله دورتر از محل اعمال نیروی P نیرو به صورت گسترده بر کل مقطع اثر می‌کند. مقدار تنش که معمولاً با σ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعیین می‌شود.

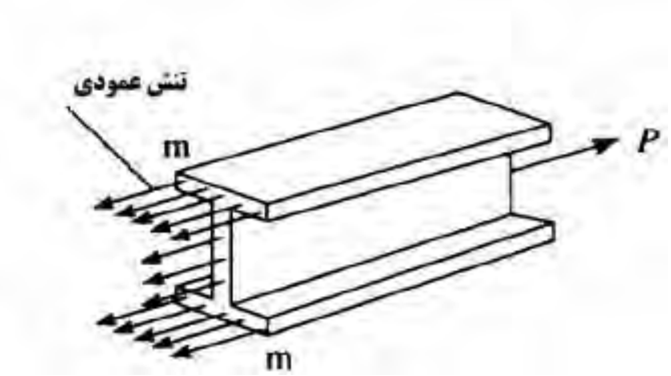
$$\sigma = \frac{P}{A} \qquad (۷-۱)$$

تنش عمودی یا نرمال در این مقطع در شکل ۷-۲ نشان داده شده است. جهت نیروی P نشان داده شده در شکل به صورت کششی است و در صورتی که برعکس باشد به صورت فشاری خواهد بود. علامت قراردادی برای نیروهای محوری مانند قبل است، به عبارت

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

دیگر برای نیروهای محوری کششی علامت مثبت و برای نیروهای محوری فشاری علامت منفی در نظر گرفته می‌شود.

در شکل۷–۱ مقطع *mm* به فاصله کمی از محل اعمال نیرو زده شده است.

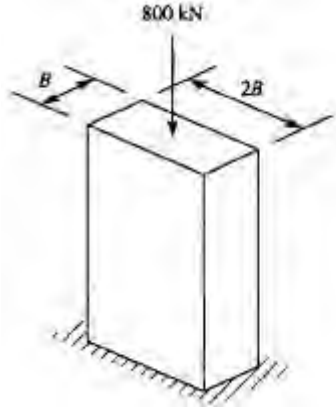


شکل ۷–۲ توزیع نیروهای داخلی[1] در یک تیر

مسئله اصلی مکانیک جامدات بررسی مقاومت و تغییرشکل اجسام تحت اثر بارهای خارجی است. این امر مستلزم مطالعه ماهیت نیروهایی است که در داخل جسم بوجود می‌آیند تا همراه نیروهای خارجی موثر بر جسم، تعادل آن را تضمین کنند. میزان تنش‌های داخلی در اعضا نمی‌تواند بیش از مقدار ظرفیت مقطع شود و در صورتی از آن بیشتر شود تخریب عضو را به همراه خواهد داشت. به عنوان مثال فولاد قادر است تنش کششی تا حدود $300N/mm^2$ را تحمل کند. توجه شود که این تنش‌ها به شکل مقطع بستگی ندارد و تنها مساحت مقطع مهم می‌باشد. در مقاطع سازه‌ای برای اینکه بارهای اعمال شده بر آنها از حد ظرفیت آنها بیشتر نشود بایستی مساحت مقطع به نحو مناسبی منظور شود.

مثال۷–۱) ابعاد مقطع یک ستون کوچک با مقطع مستطیلی شکل که نسبت عرض به طول آن ۱ به۲ است را تعیین نمایید، در صورتی که مقدار بار اعمال شده بر آن برابر *800kN* باشد و حداکثر تنش قابل تحمل برای ستون برابر $400N/mm^2$ باشد.

[1] Internal force



شکل۷-۳ ستون مثال۷-۱

حل) با توجه به معادله ۷-۱ حداقل مساحت مقطع ستون برابر است با:

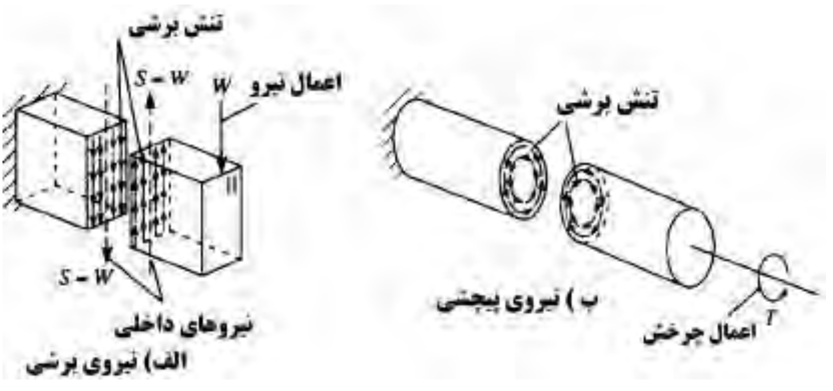
$$A_{\min} = \frac{P}{\sigma_{\max}} = \frac{800\times10^3}{400} = 2000mm^2$$

$$A_{\min} = 2B^2 = 2000\,mm^2 \quad \Rightarrow \quad B = 31.6mm$$

بنابراین حداقل ابعاد مقطع برای ستون نشان داده شده ۳۱/۶ در ۶۳/۲ میلیمتر است. در عمل مقادیر این مساحت‌ها را گرد کرده و مقدار ۳۲ در ۶۴ میلیمتر را انتخاب کرده که مساحت کمی بیشتر از ۲۰۰۰ میلیمتر مربع می‌شود.

۷-۲ تنش برشی به علت نیروی برشی و پیچشی[1]

بارهای برشی به صورت مماس بر مقطع عمل می‌کنند.



شکل۷-٤ ایجاد تنش برشی در مقطع تیر

[1] Torsion

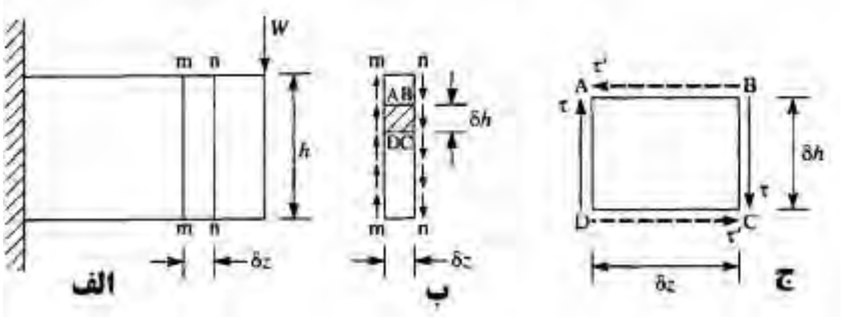
شکل ۷-۴الف یک تیر کنسولی را نشان می‌دهد که نیروی W در انتهای آن اعمال می‌شود. نیروی W اعمال شده بر انتهای تیر باعث ایجاد لنگر خمشی و نیروی برشی به اندازه W در مقطع تیر می‌شود. مقدار متوسط تنش برشی در مقطع این تیر برابر است با:

$$\tau_{av} = \frac{P}{A} \qquad (۷-۲)$$

که در آن A سطح مقطع تیر می‌باشد. شکل ۷-۴ نیز یک مقطع تیر را نشان می‌دهد که تحت پیچش دورانی است این پیچش باعث تولید تنش برشی در مقطع می‌شود. در مورد تنش بوجود آمده تحت لنگر پیچشی در فصل ۱۱ بحث خواهد شد.

۷-۳ تنش برشی متمم

تیر کنسول نشان داده شده در شکل۷-۵الف را در نظر بگیرید. مقطع این تیر به صورت مستطیلی بوده و دارای ارتفاع h و ضخامت واحد است، در انتهای خود باری متمرکز به اندازه W را حمل می‌کند



شکل۷-۵

مقدار برش در طول عضو ثابت و مقدار آن مثبت است. در شکل۷-۵ب تنش برشی در مقاطع nn و mm نشان داده شده است. این قطعه را در نظر بگیرید و حال فرض کنید جزء کوچک $ABCD$ را به ارتفاع δh از این قطعه جدا کرده‌ایم و به صورت بزرگ شده در شکل۷-۵ج نشان داده‌ایم. از آنجا که این المان بسیار کوچک است می‌توانیم میزان تنش τ را در سمت AD و BC ثابت فرض کنیم. میزان این تنش‌ها باید معادله تعادل در جهت قائم را ارضا نماید. همچنین این دو نیرو باعث ایجاد یک کوپل چرخشی به صورت ساعتگرد خواهد شد که این کوپل توسط کوپل دیگری که ناشی از نیروهای روی ضلع AB و DC

است جبران شده و تعادل برقرار می‌شود. نیروهای روی ضلع AB و DC باعث تولید لنگری به صورت پادساعتگرد می‌شوند. مقدار تنش برشی بر روی وجه‌ها AB و DC برابر τ'است. حال با گشتاورگیری حول نقطه D داریم:

$$\tau' \times \delta z \times 1 \times \delta h = \tau \times \delta h \times 1 \times \delta z$$

$$\tau' = \tau \qquad (۳-۷)$$

لذا می‌توان نتیجه گرفت که همیشه تنش برشی همراه با یک تنش متمم دیگری عمل خواهد کرد تا تعادل در هر جزء از جسم برقرار گردد.

۴-۷ کرنش محوری

از آنجایی که تمام مصالح کاملاً صلب[1] نیستند با اعمال نیروی خارجی بر آنها تغییر شکل می‌دهند. مثلاً در صورتی که به یک عضو سازه‌ای نیرویی کششی اعمال شود در اثر این کشش طول عضو افزایش یافته و در صورتی که عضوی فشرده شود از طول آن کاسته می‌شود.

فرض کنید که δ میزان کاهش یا افزایش طول جسم در اثر نیروهای کششی یا فشاری محوری باشد. کرنش محوری ε به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L_0} \qquad (۴-۷)$$

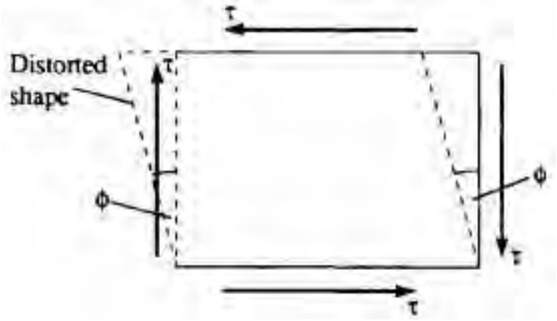
کمیت کرنش ε بدون بعد بوده و به صورت تغییرات طول به طول اولیه تعریف می‌شود. کمیت L_0 طول اولیه عضو است. بوضوح روشن است که مقدار کرنش ε می‌تواند در اثر کشش یا فشار بوجود آید که در صورتی که کششی باشد با علامت مثبت و در صورتی که فشاری باشد با علامت منفی نشان داده می‌شود.

۵-۷ کرنش برشی

در اثنای تغییر شکل یک جسم، تغییر در زاویه بین دو امتداد عمود بر هم کرنش برشی نامیده می‌شود و با γ بر حسب رادیان نشان می‌دهند. در صورتی که کوچکتر از $\pi / 2$

[1] Completely rigid

باشد کرنش برشی مثبت و در صورتی که بزرگتر از $\pi / 2$ باشد کرنش برشی منفی خواهد بود. در شکل ۷-٦ نمونه‌ای از المان به کار رفته نشان داده شده است.



شکل ۷-٦کرنش برشی در یک المان

در واقع کرنش برشی تغییر در زاویه اضلاع عمود بر هم المان است.

$$\gamma = \phi \text{ radians} \qquad (۵-۷)$$

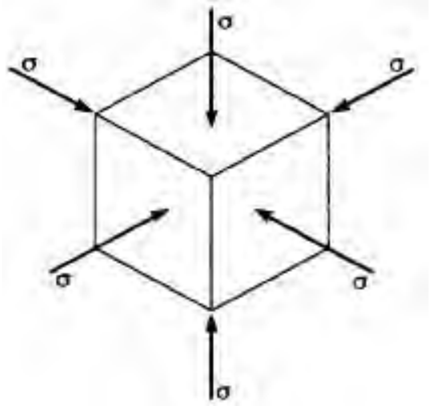
۷-٦ اندازه‌گیری کرنش حجمی به سبب فشار هیدرواستاتیک

یکی از حالاتی که بایستی به آن بپردازیم، حالتی است که یک ماده به شکل مکعب از هر شش وجه خود مانند شکل ۷-۷ تحت فشار هیدرواستاتیک[1] σ قرار گیرد. این حالت اعمال تنش به عضو مانند حالتی است که یک قطعه‌ای به شکل مکعب در سیالی غرق شده باشد. در این حالت به تمام وجوه این مکعب فشار یکنواخت σ اعمال می‌شود. البته این تنش‌ها می‌توانند به صورت کششی نیز اعمال شوند. در صورتی که طول هر یک وجوه این مکعب برابر L_0 و δ نیز کاهش در ابعاد این مکعب به سبب اعمال تنش بر آن باشد، کرنش حجمی (تغییرات حجم به حجم اولیه) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\text{کرنش حجمی} = \frac{L_0^3 - \left(L_0 - \delta\right)^3}{L_0^3}$$

[1] Hydrostatic pressure

Web: www.M-Alirezaei.com　　استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۷-۷ مکعب در معرض فشار هیدرواستاتیک

با بسط رابطه فوق و صرف نظر از توان‌های بزرگ δ، به صورت زیر در می‌آید.

$$\text{کرنش حجمی} = \frac{3L_0^2\delta}{L_0^3} = \frac{3\delta}{L_0} \qquad (۷-٦)$$

بنابراین در این حالت کرنش حجمی سه برابر کرنش خطی در هر سه جهت می‌باشد.

۷-۷ روابط بین تنش و کرنش

قانون هوک و مدول یانگ[1]

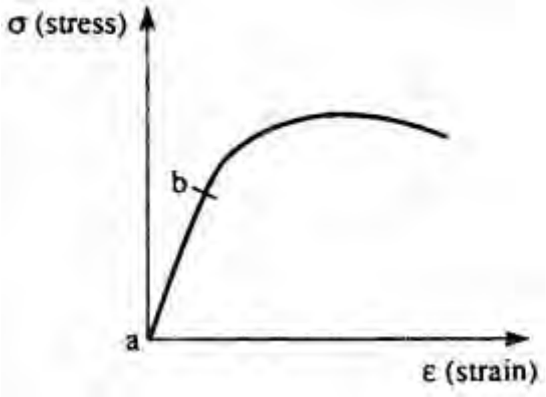
رابطه بین تنش و کرنش برای هر ماده‌ای را می‌توان به صورت تجربی و با استفاده از آزمایش کشش و فشار تعیین نمود. آزمایش کشش به این صورت است که نمونه‌ای را بین دو فک یک دستگاه کششی که قادر است کشش کنترل شونده‌ای را اعمال کند قرار می‌دهند. در هر لحظه مقدار کشش اندازه‌گیری شده و با استفاده از فرمول۷-۱ مقدار تنش در آن لحظه برآورد می‌شود همچنین مثدار تغییر مکان آن لحظه توسط دستگاه قرائت شده و بر طول آن تقسیم شده تا مقدار کرنش بدست آید. این روند برای تعداد متناوب انجام می‌شود تا اینکه نمونه گسیخته شود.

در صورتی که مقادیر بدست آمده از هر گام را پشت سر هم در یک نمودار گذاشته شود به طوری که محور قائم را تنش و محور افقی را کرنش مانند شکل۷-۸ باشد، یک منحنی تشکیل می‌دهد. قسمت اولیه این نمودار یعنی قسمت ab در شکل۸-۷ دارای شیبی به

[1] Hooke’s law and Young’s modulus

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel　　کانال تلگرام:

صورت خطی است ولی قسمت‌های جلوتر نمودار دارای حالت غیرخطی می‌باشد. شیب قسمت خطی را مدول یانگ یا مدول الاستیسیته گویند و با حرف E نمایش می‌دهند.



شکل ۷-۸ نمودار تنش- کرنش

قانون هوک به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\sigma = E\varepsilon \qquad (۷-۷)$$

مدول یانگ برای مصالح اندازه‌گیری شده و برای هر مصالحی ثابت است. برای فولاد نرمه مقدار مدول یانگ تقریباً برابر $200kN/mm^2$ است. معادله۷-۷ ممکن است به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = E \qquad (۸-۷)$$

برای اکثر مصالح مقدار E در کشش و فشار ثابت است.

مدول برشی[1]

با مقایسه معادله ۷-۸ می‌توان مدول برشی یا ضریب صلابت G را بر مبنای کرنش برشی و تنش کرنشی به صورت زیر تعیین نمود:

$$\frac{\tau}{\gamma} = G \qquad (۹-۷)$$

[1] Shear modulus

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مدول بالک یا مدول حجمی[1]

مدول بالک K به صورت نسبت بین تنش حجمی به کرنش حجمی نشان داده می‌شود.

$K=$(کرنش حجمی/ تنش حجمی) (۷-۱۰)

برای فشار هیدرواستاتیک داریم

$$\frac{\sigma}{3\varepsilon}=K \qquad (۷\text{-}۱۱)$$

مثال۷-۲) یک ستون ساخته شده از فولاد نرمه به صورت دایره توخالی و به قطر خارجی *350mm* و قطر داخلی *300mm* را در نظر بگیرید. این ستون یک بار محوری و به صورت فشاری به میزان *2000kN* را تحمل می‌کند. مقدار تنش داخلی و همچنین میزان کوتاه‌شدگی ستون را که دارای ارتفاع *5* متر است، تعیین کنید. فرض کنید $E=200kN/mm^2$ باشد.

حل) سطح مقطع ستون برابر است با:

$$A=\frac{\pi}{4}\left(350^2-300^2\right)=25525.4mm^2$$

مقدار تنش داخلی در این ستون با استفاده از رابطه ۷-۱:

$$\sigma=-\frac{2000\times10^3}{25525.4}=-78.4 \qquad \text{فشاری}$$

با استفاده از رابطه ۷-۷ یا ۷-۸ میزان کرنش برابر است با:

$$\varepsilon=\frac{-78.4}{200000}=-0.00039$$

در نهایت میزان کوتاه شدگی δ ستون با استفاده از رابطه ۷-٤ بدست می‌آید

$$\delta=0.00039\times5\times10^3=1.95mm$$

مثال۷-۳) یک تیر کنسول کوتاه به طول *500mm* و عمق *200mm* و ضخامت *2mm* را در نظر بگیرید. این تیر یک بار متمرکز به میزان *10kN* را در انتهای خود حمل می‌کند. فرض کنید که تنش برشی موجود در تیر به صورت یکنواخت است. مقدار خیز تیر در اثر نیروی برشی در انتهای تیر را بدست آورید. مقدار $G=25000N/mm^2$ است.

[1] Volume or bulk modulus

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

حل) با استفاده از رابطه ۷-۲ مقدار متوسط تنش برشی برابر است با:

$$\tau_{av} = \frac{W}{A} = \frac{10\times10^3}{200\times2} = 25\frac{N}{mm^2}$$

مقدار کرنشی برشی نیز برابر است با:

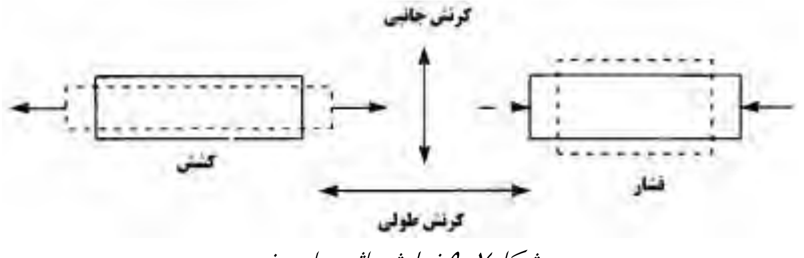
$$\gamma = \frac{\tau_{av}}{G} = \frac{25}{25000} = 0.001rad$$

این مقدار بدست آمده برای کرنشی برشی در واقع میزان زاویه تیر با افق است. میزان خیز Δ_s به سبب نیروی برشی در انتهای آزاد تیر برابر است با:

$$\Delta_s = 0.001\times500 = 0.5$$

۷-۸ ضریب پواسون

وقتی که شما یک لاستیک را می‌کشید، متوجه می‌شوید که مقداری به طول آن اضافه شده ولی از عرض مقطع آن کاسته می‌شود. این اثر به عنوان ضریب پواسون[1] مشهور است و در مورد فشار نیز صادق است. یعنی در صورتی که جسمی را فشرده کنید، از طول آن کاسته ولی به عرض مقطع افزوده می‌شود. این ضریب را با حرف ν نشان می‌دهند. این اثر در شکل ۷-۹ نشان داده شده است.



شکل۷-۹ نمایش اثر پواسون

حال یک المان مکعبی شکل مطابق شکل۷-۱۰ را در نظر بگیرید. تنش‌های موجود در این شکل به صورت کششی هستند. در شکل۷-۱۰الف تنش اعمال شده در جهت محور z اعمال شده بنابراین مقدار کرنش موجود در این قطعه برابر است با:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

مقادیر کرنش در جهات x و y برابر است با:

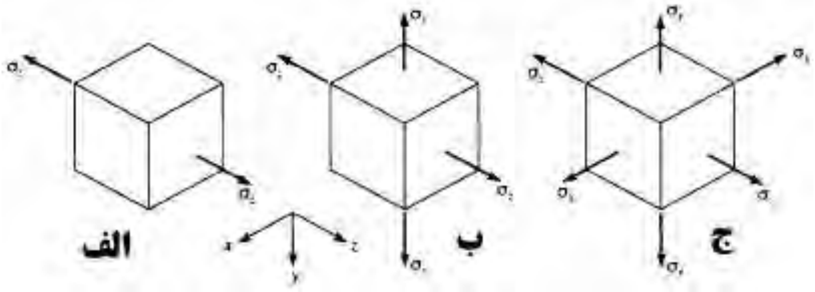
[1] Poisson effect

$$\varepsilon_x = -\nu\varepsilon_z \quad , \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z$$

با قرار دادن ε_z در رابطه σ_z داریم:

$$\varepsilon_x = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \quad , \quad \varepsilon_y = -\nu\frac{\sigma_z}{E} \qquad (۱۲-۷)$$

مقادیر بدست آمده برای کرنش در جهات x و y منفی است زیرا که در این جهات جسم با کاهش طول مواجه است.



شکل۷-۱۰ اثر پواسون بر مواد

در شکل۷-۱۰ب تنش‌های σ_z و σ_y بر مکعب وارد می‌شود. بنابراین:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} \quad , \quad \varepsilon_x = -\frac{\nu\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} \qquad (۱۳-۷)$$

به طور مشابه کرنش برای شکل۷-۱۰ج به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} \qquad (۱٤-۷)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}$$

در صورت که در شکل۷-۱۰ج مقدار تنش اعمال شده در تمام جهات دارای مقداری مساوی باشند و یا به عبارتی $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$ باشد. مقدار کرنش در هر سه جهت با استفاده از رابطه۷-۱٤ برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}(1-2\nu)$$

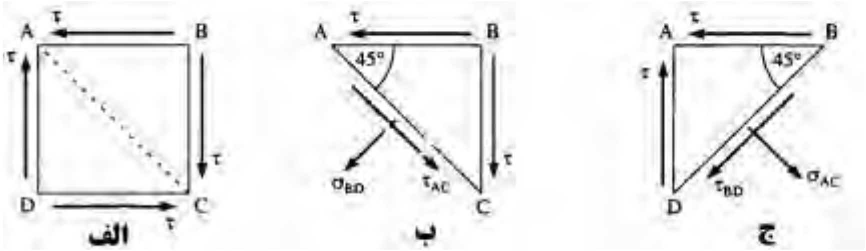
در بخش ۷-۶ نشان خواهیم داد که کرنش حجمی در یک ماده به شکل مکعب برابر مجموع کرنش‌ها آن در سه وجه می‌باشد.

$$\text{کرنش حجمی} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\nu) \qquad (۱۵-۷)$$

مقدار ν همیشه کمتر از ۰/۵ است. مقدار ضریب پواسون برای فولاد در حدود ۰/۳ و برای بتن کمتر از ۰/۲ است.

۹-۷ ارتباط بین ثابت‌های ارتجاعی

در شکل ۷-۱۱ الف المان $ABCD$ که به صورت مربعی است نشان داده شده است. این المان به شکل مربع و به ضخامت واحد است. المان مورد بحث تحت تنش‌های برشی τ اعمال شده بر روی آن در تعادل است. حال فرض کنید که المان را در امتداد AC مانند شکل۷-۱۱ب برش دهیم.



شکل۷-۱۱ روابط بین روابط ثابت‌های ارتجاعی

با نوشتن معادلات تعادل برای مقطع برش خورده ABC یک نیروی برشی و یک نیروی محوری در سطح AC وجود خواهد داشت. از آنجا که المان مورد نظر بسیار کوچک است می‌توان تنش‌های اعمال شده بر روی آنها را به صورت یکنواخت در نظر گرفت. با ضرب تنش‌های موجود در سطح اعمال شده آنها می‌توان نیروهای موجود در مقطع را بدست آورد و در نهایت با نوشتن معادله تعادل برای نیروهای اعمال شده داریم:

$$\sigma_{BD} AC \times 1 = -\tau AB \times 1 \times \cos 45^\circ - \tau BC \times 1 \times \cos 45^\circ$$

توجه شود که ضخامت المان واحد است. حال با تقسیم بر AC داریم:

$$\sigma_{BD} = -\tau \frac{AB}{AC}\cos 45^\circ - \tau \frac{BC}{AC}\cos 45^\circ$$

$$\sigma_{BD} = -\tau \cos^2 45^\circ - \tau \cos^2 45^\circ$$

$$\sigma_{BD} = -\tau \qquad (۱۶-۷)$$

علامت منفی موجود نشان می‌دهد که σ_{BD} تنش فشاری است. به طور مشابه:

$$\tau_{AC} AC \times 1 = -\tau AB \times 1 \times \cos 45^\circ - \tau BC \times 1 \times \cos 45^\circ$$

باز با تقسیم روابطه بالا بر AC داریم:

$$\tau_{AC} = -\tau \cos^2 45^\circ - \tau \cos^2 45^\circ = 0$$

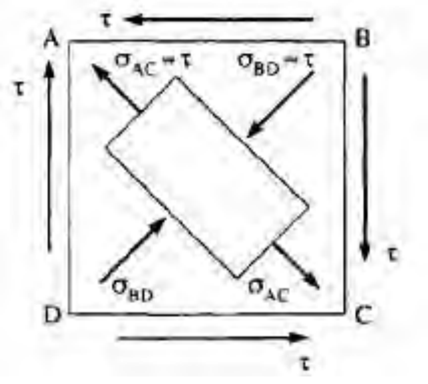
به طور مشابه برای المان مثلثی شکل۷-۱۱ج داریم:

$$\sigma_{AC} = \tau \qquad (۱۷-۷)$$

$$\tau_{BD} = 0$$

با توجه به روابط بدست آمده در بالا دیدیم که تنش‌های مستقیم σ_{BD} به صورت فشاری و σ_{AC} به صورت کششی و معادل τ نشان داده شده در شکل ۷-۱۲ هستند. با استفاده از مفاهیم ارائه شده در بخش ۷-۸ مقدار کرنش در امتداد AC برابر است با:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} + \frac{\nu \sigma_{BD}}{E} = \frac{\tau}{E}(1+\nu) \qquad (۱۸-۷)$$

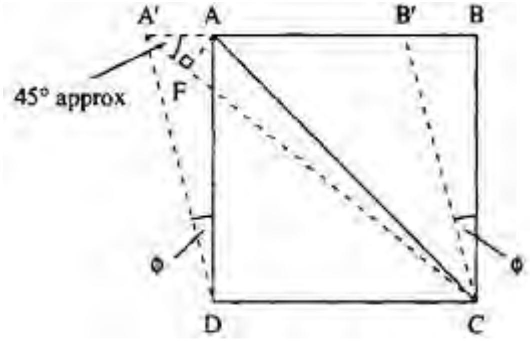


شکل۷-۱۲ تنش در قطر یک المان

دیده می‌شود که مقدار تنش فشاری σ_{BD} باعث ایجاد کرنش مثبت ε_{AC} شده است. در شکل۷-۱۱الف مقدار کرنش برشی برای المان $ABCD$ در شکل ۷-۱۳ نشان داده شده است. کرنش برشی γ ناشی از تنش برشی ε برابر است با:

$$\gamma = \phi \text{ radians} = \frac{B'B}{BC} \qquad (۱۹-۷)$$

زاویه ϕ بسیار کوچک است. مقدار افزایش در طول AC به $A'C$ تقریباً معادل $A'F$ است که AF عمود بر $A'C$ است. بنابراین



شکل ۷-۱۳ اعوجاج در اثر برش در عضو

$$\varepsilon_{AC} = \frac{A'C - AC}{AC} = \frac{A'F}{AC}$$

$$A\hat{A}'F \approx 45^\circ$$

$$A'F = A'A\cos 45^\circ$$

$$AC = \frac{BC}{\cos 45^\circ}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{A'A\cos^2 45^\circ}{BC} = \frac{B'B\cos^2 45^\circ}{BC} = \frac{1}{2}\frac{B'B}{BC}$$

با توجه به رابطه۷-۱۹:

$$\varepsilon_{AC} = \frac{1}{2}\gamma \qquad (۷-۲۰)$$

با جانشانی ε_{AC} از رابطه ۷-۱۸ داریم:

$$\frac{1}{2}\gamma = \frac{\tau}{E}(1+\nu)$$

با توجه به رابطه۷-۹ که $\tau / \gamma = G$ داریم:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (۷-۲۱)$$

رابطه بین مدول الاستیسیته E و مدول برشی G به طور مستقیم از معادله ۷-۱۰ و ۷-۱۵ بدست می‌آید.

$$\text{کرنش حجمی} = \frac{\sigma}{K}$$

که در آن σ تنش حجمی است. با جانشانی در رابطه ۷-۱۵ داریم:

$$\frac{\sigma}{K} = \frac{3\sigma}{E}(1-2\nu)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (۷-۲۲)$$

با برداشتن E از روابط ۷-۲۱ و ۷-۲۲ داریم:

$$K = \frac{2(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \qquad (۷-۲۳)$$

مثال۷-٤) یک مکعب تحت تنشی به میزان σ در تمام وجوه خود قرار گرفته است. اگر $\nu = 0.3$ باشد و $E=200000N/mm^2$ باشد مقدار تنش را در صورتی که میزان حجم مکعب به میزان *0.1%* کاهش یابد حساب کنید. همچنین درصد کاهش طول در هر یک از اضلاع را بدست آورید.

حل) از معادله ۷-۲۲ داریم:

$$K = \frac{200000}{3(1-2\times 0.3)} = 167000\frac{N}{mm^2}$$

مقدار کرنش حجمی برابر *0.001* است. بنابراین از رابطه ۷-۱۰ داریم:

$$0.001 = \frac{\sigma}{K}$$

$$\sigma = 0.001\times 167000 = 167\, N/mm^2$$

با توجه به بخش ۷-٦ برای کرنش خطی داریم:

$$\text{کرنش خطی} = \frac{1}{3}\times 0.001 = 0.00033$$

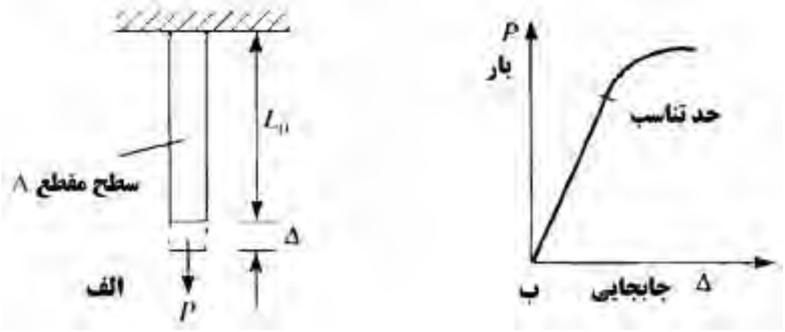
هر کدام از اضلاع مکعب به میزان *0.033%* کاهش می‌یابد.

۷-۱۰ انرژی کرنشی در کشش یا فشار مستقیم

یکی از مفاهیم مهم در تحلیل سازه‌ها، مفهوم انرژی کرنشی[1] است. انرژی کرنشی کل در اعضای سازه‌ای می‌تواند به علت نیروهای محوری، لنگر خمشی و یا برش و پیچش ایجاد

[1] Strain energy

شود. در این قسمت به معرفی انرژی کرنشی ناشی از نیروهای کششی یا فشاری می‌پردازیم. در مورد بقیه انرژی‌های تولید شده در فصل‌های آتی صحبت خواهیم کرد. شکل۷–۱٤الف یک میله را نشان می‌دهد که بر روی آن نیروی P به صورت افزاینده اثر می‌کند.



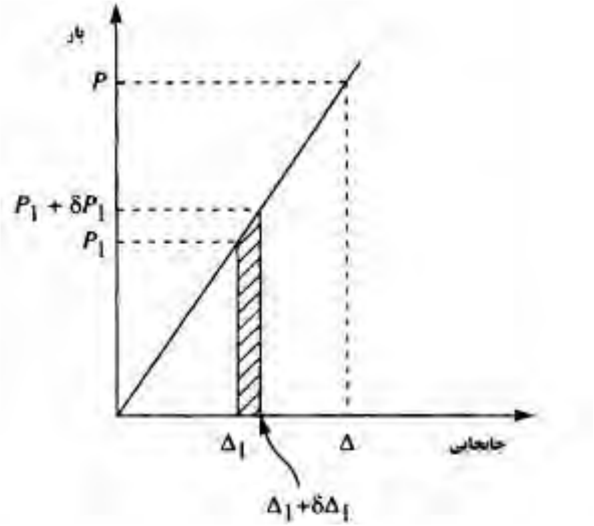
شکل۷–۱٤ منحنی بار – تغییرمکان

در شکل۷–۱٤ب نمودار نیرو – تغییرمکان میله نشان داده شده است. دیده می‌شود که نیرو به تدریج اضافه شده و مقدار تغییرمکان نیز متناسب با نیرو به صورت خطی اضافه می‌شود. این حالت خطی در نقطه‌ای از بین می‌رود و مقدار نیرو – تغییرمکان دیگر به صورت غیر خطی خواهد بود. به نقطه‌ای که این حد از حالت خطی به حالت غیرخطی تبدیل می‌شود، حد تناسب[1] گویند. اضافه شدن نیرو و تغییرمکان باعث انباشته شدن انرژی کرنشی در درون مصالح خواهد شد. در صورتی که مقدار جابجایی ایجاد شده در میله تا حد تناسب مصالح باشد و نیرو از روی میله حذف شود، مقدار تغییرمکان ایجاد شده در میله به حالت اولیه خود بر می‌گردد ولی در صورتی که تغییر مکان بیش از حد تناسب باشد، با بار برداری مقداری تغییرمکان ماندگار در میله ایجاد می‌شود. در شکل۷–۱٤الف فرض کنید که مقدار بار P کمتر از مقدار حد تناسب است و باعث ایجاد تغییرمکان[2] Δ می‌شود.

حال در صورتی که فرض کنیم که میزان بار از مقدار حد تناسب ماده تجاوز نکند دیده می‌شود که نسبت بین بار و تغییرمکان به صورت خطی است. در شکل۷–۱۵ این نسبت نشان داده شده است. مقدار بار P_1 معادل Δ_1 است. مقدار اضافه بار δP_1 باعث ایجاد

[1] Limit of proportionality
[2] Displacements

تغییرمکان $\delta\Delta_1$ در میله می‌شود. مقدار کار انجام شده در طی این فرآیند را می‌توان معادل متوسط بار در تغییرمکان رخ داده خلاصه کرد.



شکل۷-۱۵ کار انجام شده در اثر اعمال بار تدریجی

$$\text{کار انجام شده} = \left[\frac{P_1 + (P_1 + \delta P_1)}{2}\right]\delta\Delta_1$$

با صرف نظر کردن از توان دوم جمله‌ها داریم:

$$\text{کار انجام شده} = P_1\delta\Delta_1$$

کل کار[1] انجام شده برابر مجموع کارهای انجام شده در هر لحظه است:

$$\text{کل کار انجام شده} = \int_0^\Delta P_1\delta\Delta_1 \qquad (۷-۲۴)$$

رابطه بین نیرو و تغییرمکان به صورت خطی است بنابراین:

$$P_1 = K\Delta_1 \qquad (۷-۲۵)$$

که در رابطه بالا K سختی عضو می‌باشد که به مشخصات مواد[2] بستگی دارد. با جایگذاری در رابطه۷-۲۵ داریم:

$$P_1 = \frac{P}{\Delta}\Delta_1$$

[1] Total work
[2] Material properties

حال با جایگذاری در رابطه ۷-۲۴ داریم:

$$\text{کل کار انجام شده} = \int_0^{\Delta} \frac{P}{\Delta} \Delta_1 d\Delta_1$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق داریم:

$$\text{کل کار انجام شده} = \frac{1}{2} P\Delta \qquad (۷-۲۶)$$

مشاهده می‌شود که مقدار کل کار انجام شده همان سطح زیر منحنی است. کل کار انجام شده معادل انرژی کرنشی U ذخیره شده در ماده می‌باشد. بنابراین:

$$U = \frac{1}{2} P\Delta \qquad (۷-۲۷)$$

مقدار تنش نرمال از شکل۷-۱۴الف برابر است با نیرو تقسیم بر سطح مقطع:

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

همچنین مقدار کرنش نرمال با استفاده از رابطه ۷-۴ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{L_0}$$

به علاوه از آنجایی که رابطه بین بار و تغییرمکان به صورت خطی است بنابراین با استفاده از رابطه ۷-۷ می‌توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\frac{P}{A} = E\frac{\Delta}{L_0}$$

$$\Delta = \frac{PL_0}{AE} \qquad (۷-۲۸)$$

در رابطه ۷-۲۸ کمیت L_0 / AE بیان کننده بزرگی تغییرمکان در اثر بار است که به عنوان نرمی عضو نامیده می‌شود. با معکوس کردن رابطه ۷-۲۸ داریم:

$$P = \frac{AE}{L_0}\Delta$$

در این رابطه مقدار کمیت AE / L_0 بیان کننده بزرگی باری است که برای ایجاد تغییرمکان به آن نیاز است. کمیت AE / L_0 به عنوان سختی عضو شناخته می‌شود. با جایگذاری تغییرمکان در رابطه ۷-۲۷ داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$U=\frac{P^2L_0}{2AE} \qquad (۲۹-۷)$$

در صورتی که رابطه بالا را با استفاده از تنش محوری بازنویسی کنیم:

$$U=\frac{1}{2}\frac{P^2}{A^2}\frac{AL_0}{E}$$

$$U=\frac{\sigma^2}{2E}\times AL_0 \qquad (۳۰-۷)$$

که AL_0 حجم جسم می‌باشد. بنابراین انرژی کرنشی بر واحد حجم جسم برابر است با:

$$\frac{\sigma^2}{2E}$$

انرژی کرنشی U ممکن است بر حسب تغییرمکان یا کرنش نیز بیان شود.

$$U=\frac{EA\Delta^2}{2L_0} \qquad (۳۱-۷)$$

با جایگذاری تنش در رابطه۷-۳۰ داریم:

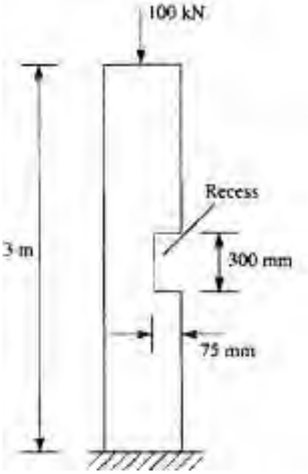
$$U=\frac{1}{2}E\varepsilon^2\times AL_0 \qquad (۳۲-۷)$$

مثال۷-۵) یک ستون بتنی به ارتفاع ۳ متر دارای مقطع مربع شکل به ضلع ۲۰۰ میلیمتر است. این ستون باری به اندازه *100kN* را به صورت محوری تحمل می‌کند. در شکل ۷-۱۶ شکل این ستون نشان داده شده است. این ستون در وسط خود دارای یک پس نشستگی است. مقدار انرژی کرنش را در این ستون قبل و بعد از ایجاد قطعه بریده شده حساب کنید. فرض کنید که مدول یانگ برای قطعه برابر $E=20000N/mm^2$ باشد.

مقدار انرژی کرنشی U_1 قبل از برش قطعه نشان داده شده به صورت مستقیم با استفاده از رابطه ۷-۲۹ قابل محاسبه است:

$$U_1=\frac{\left(100\times10^3\right)^2\times3\times10^6}{2\times200^2\times20000\times10^6}=18.75N.m$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل ۷-۱۶ ستون مثال ۷-۵

مقدار انرژی کرنشی در محل پس نشستگی U_2 را می‌توان با استفاده از رابطه ۷-۲۹ بدست آورد:

$$U_2 = \frac{(100\times10^3)^2}{2\times20000\times10^6}\left(\frac{2.7\times10^6}{200^2}+\frac{0.3\times10^6}{200\times125}\right)=19.88N.m$$

متناوباً می‌توان مقدار تنش را در محل پس نشستگی و در دیگر جاها نیز حساب کرد:

$$\sigma=\frac{100\times10^3}{200^2}=2.5N/mm^2$$

مقدار تنش در محل پس نشستگی برابر است با:

$$\sigma=\frac{100\times10^3}{200\times125}=4.0N/mm^2$$

بنابراین:

$$U_2=\frac{1}{2\times20000\times10^6}$$

$$\times\left[(2.5\times10^6)^2\times\frac{200^2}{10^6}\times2.7+(4\times10^6)^2\times\frac{200\times125}{10^6}\times0.3\right]$$

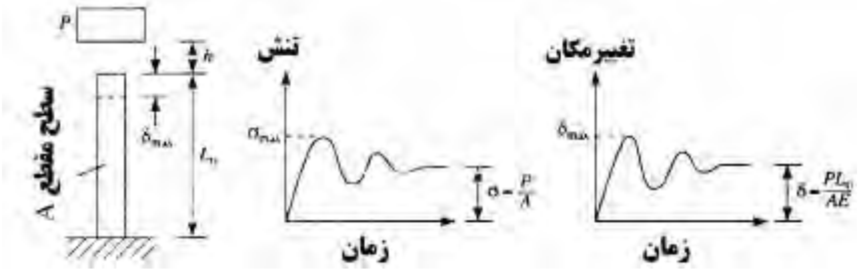
$$\Rightarrow U_2=19.88N.m$$

دیده می‌شود که انرژی کرنشی موجود در مقطع با کاهش سطح مقطع افزایش می‌یابد

۷-۱۱ بارهای ضربه‌ای بر روی اعضای سازه‌ای

شاید یکی از جاهایی که بارهای ضربه‌ای دارای مقدار قابل توجه‌ای هستند و در مهندسی عمران زیاد به کار می‌روند اجرای شمع‌ها به صورت شمع کوبی است که در آن برای کار گذاشتن شمع از ضربه برای فرو کردن آن در خاک استفاده می‌شود. با استفاده از مفاهیم ارائه شده در بخش قبل برای انرژی کرنشی می‌توان مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در شمع را بدست آورد.

فرض کنید که یک وزنه به اندازه P از ارتفاع h بر روی یک ستون به طول اولیه L_0 سقوط کند. مقدار حداکثر تغییرمکان این ستون در شکل۷-۱۷الف نشان داده شده است. ما در اینجا از انرژی‌های تلف شده در حین ضربه مانند نویز و گرمای حاصله صرف نظر می‌کنیم.



شکل۷-۱۷ تغییرمکان و تنش ایجاد شده بر روی یک شمع در اثر بار ضربه‌ای

فرض می‌کنیم که حداکثر مقدار تنش ایجاد شده در میله σ_{max} در حد تناسب آن اتفاق می‌افتد. مقدار تنش و تغییرمکان ایجاد شده در ستون در طی زمان در شکل۷-۱۷ب و ج نشان داده شده است. وزنه P از ارتفاع $h+\delta_{max}$ سقوط می‌کند و مقدار کار زائل شده برابر $P(h+\delta_{max})$ است. بنابراین با استفاده از معادله ۷-۳۰ داریم:

$$P(h+\delta_{max}) = \frac{\sigma_{max}^2}{2E} \times AL_0 \qquad (۳۳-۷)$$

مقدار کرنش حداکثر در جسم با مقدار تنش موجود دارای رابطه مستقیم هستند.

$$\varepsilon_{max} = \frac{\sigma_{max}}{E}$$

با استفاده از معادله ۷-٤ داریم:

$$\delta_{max} = \varepsilon_{max} L_0 = \frac{\sigma_{max}}{E} L_0 \qquad (۳٤-۷)$$

با جایگذاری تغییرمکان حداکثر در رابطه۷-۳۳ داریم:

$$P\left(h+\frac{\sigma_{\max}}{E}L_0\right)=\frac{\sigma_{\max}^2}{2E}\times AL_0$$

با بازنویسی رابطه بدست آمده بر حسب تنش داریم:

$$\sigma_{\max}^2-\frac{2P}{A}\sigma_{\max}-\frac{2PhE}{AL_0}=0$$

$$\sigma_{\max}=\frac{P}{A}\left(1+\sqrt{1+\frac{2AEh}{PL_0}}\right) \qquad (۳۶-۷)$$

بارهای ناگهانی

مقدار تنش ایجاد شده در اثر بارهای ضربه‌ای با $h=0$ بدست می‌آید. بنابراین با قرار داده مقدار $h=0$ در رابطه ۷-۳۶ داریم:

$$\sigma_{\max}=2\frac{P}{A} \qquad (۳۷-۷)$$

رابطه ۷-۳۷ نشان می‌دهد که مقدار تنش ایجاد شده در اثر بارهای ناگهانی دو برابر تنش ایجاد شده در اثر بارهای استاتیکی هستند.

مثال۷-۶) یک ستون به شکل استوانه توخالی به ارتفاع ۳متر و قطر خارجی ۲۰۰ میلیمتر و ضخامت ۲۵ میلیمتر موجود است. فرض کنید که تنش حداکثر قابل تحمل برای این ستون برابر $270N/mm^2$ باشد. بعد از نصب، یک وزنه $10kN$ از ارتفاع ۸۰ سانتیمتری بر روی ستون سقوط کرده است. مقدار تغییرمکان ستون را محاسبه کنید. همچنین مقدار حداکثر باری که ستون قادر به تحمل آن است را تعیین کنید. مدول الاستیسیته برابر $E=200000N/mm^2$ است.

حل) مقدار سطح مقطع ستون به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$A=\frac{\pi}{4}\left(200^2-150^2\right)=13744.5mm^2$$

از معادله ۷-۳۶ داریم:

$$\sigma_{\max}=\frac{10\times10^3}{13744.5}\left(1+\sqrt{1+\frac{2\times13744.5\times200000\times800}{10\times10^3\times3\times10^3}}\right)=279.3N/mm^2$$

مقدار حداکثر کوتاه‌شدگی ستون از معادله ۷-۳۴ بصورت زیر بدست می‌آید.

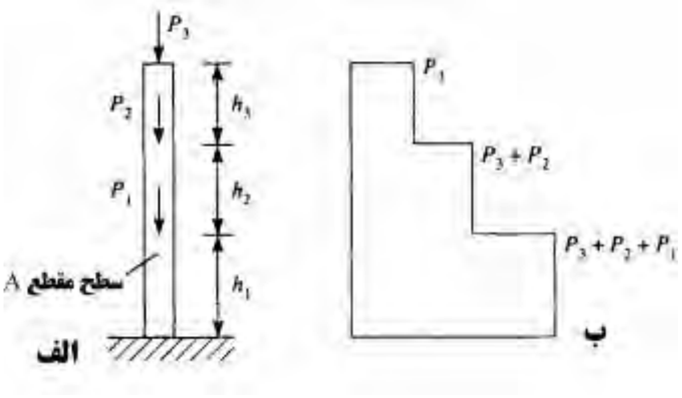
$$\delta_{\max} = \frac{279.3\times 3\times 10^3}{200000} = 4.2mm$$

در نهایت با استفاده از رابطه ۷-۳۷ مقدار بار ناگهانی حداکثر قابل قبول بدست می‌آید:

$$P = \frac{270\times 13744.5}{2\times 10^3} = 1855.5kN$$

۷-۱۲ تغییرطول محوری اعضای سازه

از معادله۷-۲۸ می‌توان برای تعیین تغییر طول محوری اعضای سازه استفاده نمود. به عنوان مثال ستون نشان داده شده در شکل۷-۱۸ نیروهای P_1 و P_2 و P_3 را به صورت محوری بر روی خود تحمل می‌کند. دیاگرام نیروهای محوری با استفاده از روش مقطع نشان داده شده در بخش ۳-۳ تعیین شده‌اند و در شکل۷-۱۸ب نشان داده شده‌اند. از وزن خود میله صرفنظر شده است. میزان تغییر طول h_3 برابر است با:



شکل۷-۱۸ تغییرمکان ایجاد شده در ستون تحت بار محوری

$$\frac{P_3 h_3}{AE}$$

به همین ترتیب تغییرمکان‌های h_1 و h_2 نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\frac{(P_2+P_3)h_2}{AE} \quad \text{و} \quad \frac{(P_1+P_2+P_3)h_1}{AE}$$

مقدار نهایی کوتاه‌شدگی در ستون برابر است با:

$$\frac{1}{AE}\left[P_3h_3+(P_1+P_2)h_2+(P_1+P_2+P_3)h_1\right]$$

برای بدست مقدار نهایی کوتاه‌شدگی در ستون از اصل جمع آثار قوا[1] استفاده شده است مقدار نهایی کوتاه‌شدگی در بالای ستون برابر است با:

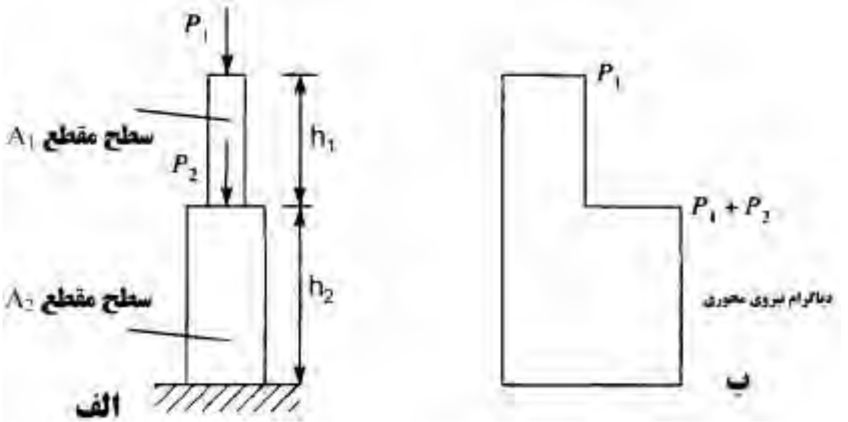
$$\frac{1}{AE}\left[P_1h_1+P_2\left(h_1+h_2\right)+P_3\left(h_1+h_2+h_3\right)\right]$$

با بازنویسی رابطه بالا:

$$\frac{1}{AE}\left[P_3h_3+\left(P_1+P_3\right)h_2+\left(P_1+P_2+P_3\right)h_1\right]$$

در صورتی که مقطع عضو به صورت شکل ۷-۱۹الف تغییر داشته باشد به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{1}{E}\left[\frac{P_1h_1}{A_1}+\frac{\left(P_1+P_2\right)h_2}{A_2}\right]$$



شکل۷-۱۹تغییرمکان ستون با مقطع متغییر

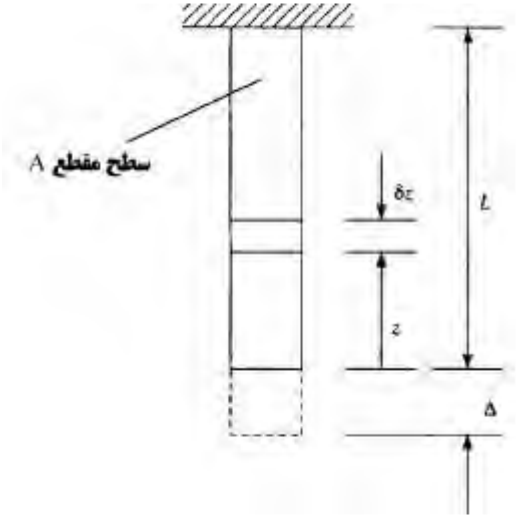
در این رابطه نیز از وزن ستون صرف نظر شده است. شکل ۷-۲۰ میله‌ای را نشان می‌دهد که در اثر وزن خودش به اندازه Δ تغییر طول پیدا کرده است. جرم واحد حجم جسم برابر ρ است و یک جزء سطحی کوچک به اندازه δz در امتداد محورzها در نظر گرفته شده است. کل وزن میله تا جزء انتخاب شده برابر ρAz است. از معادله ۷-۲۸ داریم:

$$\delta\Delta=\frac{\rho\times A\times z\times\delta z}{A\times E}$$

[1] Principle of superposition

$$\Rightarrow \Delta = \int_0^L \frac{\rho \times A}{A \times E} dz = \frac{\rho A}{A \times E}\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^L$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{\rho A L^2}{2A \times E}$$



شکل۷-۲۰ تغییرمکان ستون تحت وزن خودش

به هر حال $\rho AL = W$ برابر وزن کل میله است

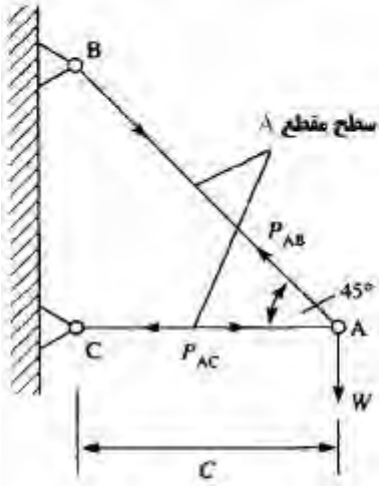
$$\Rightarrow \Delta = \frac{WL}{2AE} \qquad (۳۸-۷)$$

معادله ۷-۳۸ مقدار کوتاه شدگی یا بلندشدگی یک ستون در اثر وزن خودش را نشان می‌دهد.

۷-۱۳ خیز در خرپای ساده

برای تعیین خیز در یک خرپای ساده[1] می‌توان از مساوی قرار دادن کار انجام شده توسط نیروهای خارجی[2] با کار انجام شده توسط نیروهای داخلی استفاده کرد. شکل۷-۲۱ یک خرپای ساده را نشان می‌دهد که تحت نیروی W در نقطه A قرار گرفته است.

[1] Deflection of a simple truss
[2] Externally



شکل۷-۲۱ خیز در یک خرپای ساده

اعمال نیروی W در گره A باعث ایجاد نیروهای محوری به صورت P_{AB} در عضو AB و نیروی P_{AC} در عضو AC می‌شود. با تجزیه نیرو مقدار هر یک از نیروهای P_{AB} و P_{AC} بدست می‌آید.

$P_{AB} = 1.41W$ کششی

$P_{AC} = W$ فشاری

مقدار انرژی کرنشی از رابطه ۷-۲۹ برابر است با:

$$U_{AB} = \frac{(1.41W)^2 \times a.41L}{2AE} = \frac{1.41W^2L}{AE}$$

$$U_{AC} = \frac{W^2L}{2AE}$$

در صورتی که مقدار تغییرمکان قائم گره A برابر Δ_v باشد، مقدار کار انجام شده توسط نیروی W برابر است با:

$$\frac{1}{2}W\Delta_v$$

حال با مساوی قرار دادن کارخارجی با کار داخلی داریم:

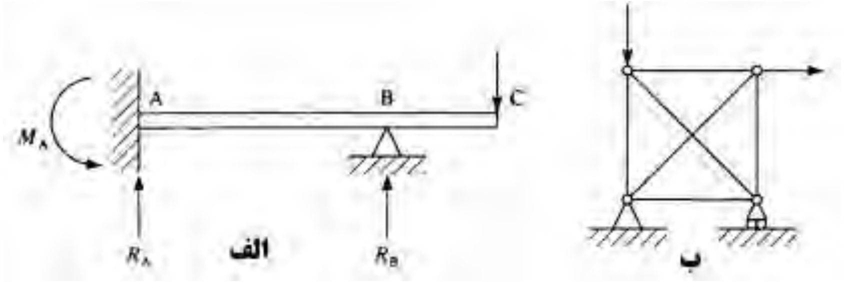
$$\frac{1}{2}W\Delta_v = \frac{1.41W^2L}{AE} + \frac{W^2L}{2AE}$$

$$\Rightarrow \Delta_v = \frac{3.82WL}{AE}$$

در این مثال ما تغییرمکان در جهت قائم را بدست آوردیم. ولی با استفاده از این روش می‌توانیم تغییرمکان در هر جهتی را محاسبه کنیم.

۱۴-۷ سیستم‌های نامعین استاتیکی

در سیستم‌های معین[1] ما قادر بودیم با نوشتن معادلات تعادل در داخل صفحه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن را محاسبه کنیم ولی در سیستم‌های نامعین استاتیکی[2] ما قادر به تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با استفاده از معادلات تعادل نخواهیم بود. به عنوان مثال تیر کنسول شکل۷-۲۲الف از نظر تئوری برای پایداری نیازی به تکیه‌گاه B ندارد.



شکل۷-۲۲ سازه‌های نامعین استاتیکی

تکیه‌گاه B باعث ایجاد یک عکس‌العمل تکیه‌گاهی اضافی شده و این سیستم را از نظر استاتیکی نامعین می‌کند. در سیستم‌های معین تعداد معلومات برابر با تعداد مجهولات[3] است. شکل۷-۲۲ به علت زیاد بودن تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن نامعین شده است که به آن نامعین خارجی گویند. در حالی که خرپای شکل ۷-۲۲ب به علت زیاد بودن اعضای داخلی آن نامعین شده است که به آن نامعین داخلی گویند.

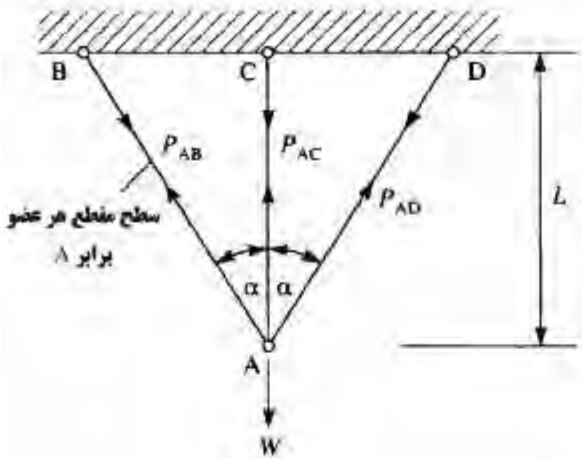
سیستم‌های مفصلی

سیستم نشان داده شده در شکل۷-۲۳ شامل سه میله است که در انتهای خود مفصل شده است. بار W بر مفصل A اعمال می‌شود. اعضای AD و AB قادر به تحمل نیروها و تغییرمکان‌های جانبی می‌باشند. در صورتی که عضو AC قادر به تحمل نیروها و

[1] Statically determinate
[2] Statically indeterminate
[3] Unknowns

تغییرمکان‌های جانبی نمی‌باشند. بار W اعمال شده بر گره A باعث ایجاد نیروهای کششی در اعضای AD و AC و AB می‌شود. با نوشن معادله تعادل در جهت قائم برای گره A داریم:

$$P_{AB}\cos\alpha + P_{AC} + P_{AD}\cos\alpha = W \qquad (۳۹-۷)$$



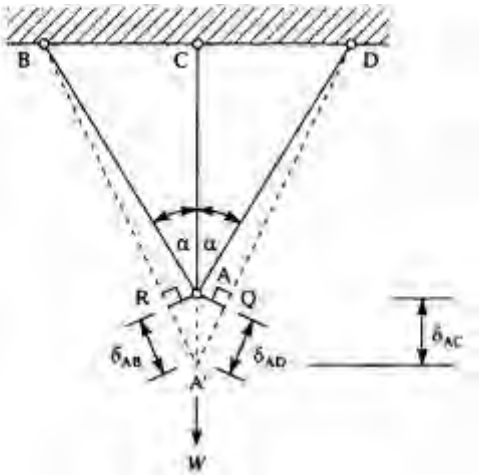
شکل ۷-۲۳

بعلاوه با نوشتن معادله تعادل در جهت افقی برای گره A داریم:

$$P_{AB}\sin\alpha = P_{AD}\sin\alpha$$

$$P_{AB} = P_{AD} \qquad (۴۰-۷)$$

برای تعیین مجهول سوم این مسئله ما نیاز به یک معادله دیگر نیز داریم. مجهولات مسئله شامل P_{AD} و P_{AC} و P_{AB} هستند. در شکل ۷-۲۴ تغییرشکل سیستم نشان داده شده است.



شکل۷-۲۴ رابطه سازگاری

در شکل۷-۲۴ زاویه $AA'R$ و $AA'Q$ معادل α هستند

$$\frac{\delta_{AB}}{\delta_{AC}}=\cos\alpha \qquad (۴۱-۷)$$

از معادله ۷-۲۸ داریم:

$$\delta_{AB}=\frac{P_{AB}\left(\dfrac{L}{\cos\alpha}\right)}{AE} \quad , \quad \delta_{AC}=\frac{P_{AC}L}{AE}$$

با جایگذاری δ_{AB} و δ_{AC} در رابطه ۷-۴۱ داریم

$$P_{AB}\frac{L}{AE\cos\alpha}=P_{AC}\frac{L}{AE}\cos\alpha \qquad (۴۲-۷)$$

بنابراین

$$P_{AB}=P_{AC}\cos^2\alpha \qquad (۴۳-۷)$$

همچنین با استفاده از رابطه ۷-۴۰ داریم:

$$P_{AD}=P_{AC}\cos^2\alpha \qquad ۴۴-۷$$

حال با جایگذاری مقادیر بدست آمده برای P_{AD} و P_{AB} در رابطه ۷-۳۹ داریم:

$$P_{AC}=\frac{W}{1+2\cos^3\alpha} \qquad (۴۵-۷)$$

با استفاده از رابطه ۷-۴۳ و ۷-۴۴ داریم:

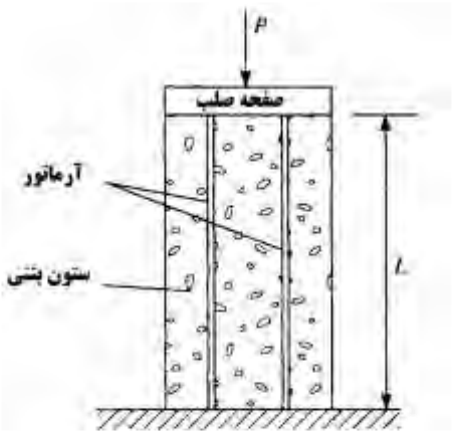
$$P_{AB} = P_{AD} = \frac{W\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha} \qquad (۴۶-۷)$$

اعضای سازه‌ای مرکب

ستون‌های بتنی که با استفاده از آرماتورهای فولادی مسلح شده‌اند یکی از نمونه‌های بارز در اعضای مرکب هستند که به صورت مکرر در ساختمان‌ها و در کارهای عمرانی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل۷-۲۵ یک ستون بتنی به سطح مقطع A_c را نشان می‌دهد که دارای دو میلگرد مسلح کننده به سطح مقطع A_s می‌باشد. مدول الاستیسیته بتن استفاده شده برای ستون E_c و مدول الاستیسیته فولاد استفاده شده برای ستون E_s می‌باشد. یک بار به اندازه P بر روی یک صفحه صلب اعمال می‌شود به طوری که تغییرمکان‌ها در تمام نقاط زیر این صفحه با هم برابر است، یعنی تغییرمکان و کرنش در بتن و فولاد برابر است. از آنجایی که E_s و E_c با هم برابر نیستند بنابراین با استفاده از رابطه ۷-۷ دیده می‌شود تنش‌های موجود در فولاد و بتن با هم برابر نیست. بانوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$P_c = P_s = P \qquad (۴۷-۷)$$

با استفاده از رابطه۷-۲۸ و نوشتن معادل همسازی تغییرمکان‌ها داریم:



شکل۷-۲۵ ستون مرکب از بتن و فولاد

$$\frac{P_c L}{A_c E_c} = \frac{P_s L}{A_s E_s} \qquad (۴۸-۷)$$

با جایگذاری P_c از رابطه ۷-۴۸ در ۷-۴۷ داریم:

$$P_s\left(\frac{A_cE_c}{A_sE_s}+1\right)=P$$

$$P_s=\frac{A_sE_s}{A_cE_c+A_sE_s}P \qquad (۴۹-۷)$$

بطور مشابه برای P_c نیز داریم:

$$P_c=\frac{A_cE_c}{A_cE_c+A_sE_s}P \qquad (۵۰-۷)$$

تغییرمکان قائم ستون براحتی قابل محاسبه است:

$$\delta=\frac{PL}{A_cE_c+A_sE_s} \qquad (۵۱-۷)$$

تنش‌های موجود در بتن و فولاد نیز با استفاده از رابطه ۷-۴۹ و ۷-۵۰ حاصل می‌شوند:

$$\sigma_c=\frac{E_c}{A_cE_c+A_sE_s}P \quad , \quad \sigma_s=\frac{E_s}{A_cE_c+A_sE_s}P \qquad (۵۲-۷)$$

حا با بازنویسی رابطه ۷-۴۷ داریم:

$$\sigma_cA_c+\sigma_sA_s=P \qquad (۵۳-۷)$$

یا

$$\frac{\sigma_cL}{E_c}=\frac{\sigma_sL}{E_s} \qquad (۵۴-۷)$$

مثال۷-۷) یک ستون بتنی به ارتفاع ۵متر با مقطع نشان داده شده در شکل۷-۲٦ توسط چهار آرماتور به قطر *20mm* مسلح شده است. این ستون بار *1000kN* را تحمل می‌کند. در صورتی که مدول یانگ فولاد برابر $200000N/mm^2$ و برای بتن برابر $15000N/mm^2$ باشد، میزان تنش در فولاد و بتن و همچنین مقدار کوتاه شدگی در ستون را محاسبه کنید.

حل) مقدار مساحت میلگردهای مسلح کننده ستون برابر است با:

$$A_s=4\times\frac{\pi}{4}\times20^2=1257mm^2$$

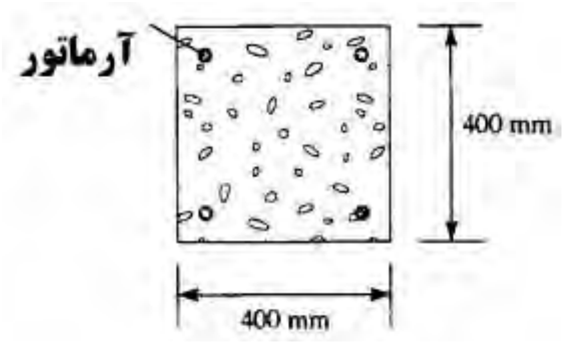
مقدار سطح مقطع بتن ستون برابر مساحت کل منهای مساحت میلگردها است:

$$A_c=400^2-1257=158743\,mm^2$$

با استفاده از رابطه ۲-۵۲ داریم:

$$\sigma_s = \frac{200000\times1000\times10^3}{158743\times15000+1257\times200000} = 76.0\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_c = \frac{15000\times1000\times10^3}{158743\times15000+1257\times200000} = 5.7\frac{N}{mm^2}$$



شکل ۷-۲۶ ستون مسلح مثال ۷-۷

مقدار تغییرمکان قائم با استفاده از رابطه ۷-۵۴ بدست می‌آید:

$$\delta = \frac{\sigma_c L}{E_c} = \frac{5.7\times5\times10^3}{15000} = 1.9mm$$

اثرات حرارتی[1]

حرارت ایجاد شده ممکن است باعث ایجاد نیروهای بزرگی در اعضا شود. فرض کنید که یک میله به طول L_0 تحت تغییرحرارتی معادل ΔT در طول خود قرار گرفته است. در اثر این اختلاف دما عضو دچار انبساط[2] و یا انقباض[3] می‌شود. طول ثانویه عضو برابر L_T است.

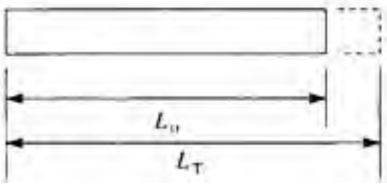
$$L_T = L_0(1+\alpha\Delta T)$$

که در این رابطه α ضریب انبساط حرارتی[4] ماده تشکیل دهنده عضو است. با توجه به شکل ۷-۲۷ دیده می‌شود که عضو به راحتی اجازه دارد که از اطراف منبسط شود. مقدار اضافه طول ایجاد شده در عضو برابر است با:

$$L_T - L_0 = L_0\alpha\Delta T$$

---
[1] Thermal effects
[2] Expansion
[3] Contraction
[4] Coefficient of linear expansion

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است   Web: www.M-Alirezaei.com



شکل۷-۲۷ انبساط به علت تغییرات درجه حرارت

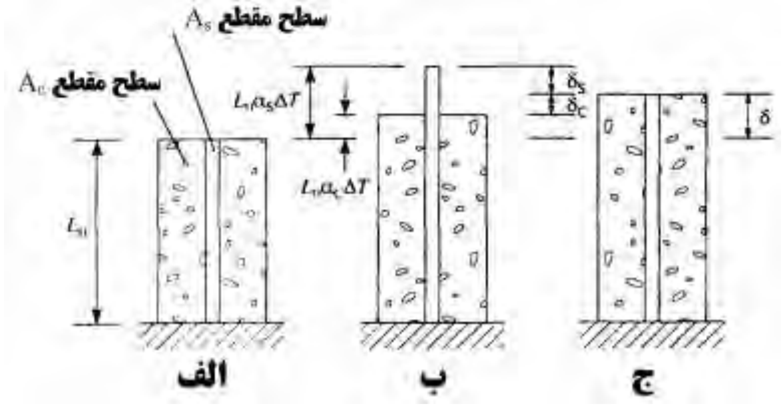
مقدار کرنش ایجاد شده را نیز با استفاده از مفاهیم اولیه کرنش می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\varepsilon = \frac{L_0 \alpha \Delta T}{L_0} = \alpha \Delta T \qquad (۷-۵۵)$$

با استفاده از رابطه ۷-۷ مقدار تنش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma = E \alpha \Delta T \qquad (۷-۵۶)$$

اختلاف دمای ایجاد شده در مقاطع مرکب با مقاطع دیگر فرق دارد زیراکه این مقاطع در اثر اختلاف دما قادر به جابجایی به صورت آزاد نیستند. ستون بتن مسلح نشان داده شده در شکل۷-۲۸الف تحت افزایش دمایی معادل ΔT قرار گرفته است. برای سادگی مسئله ما فرض می‌کنیم که فولاد مسلح کننده به صورتی تکی و در مرکز ستون و به مساحت A_s متمرکز شده‌اند. مقدار مساحت بتن ستون برابر A_c است. مقدار مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی بتن برابر E_c و α_c و مقدار مدول الاستیسیته و ضریب انبساط حرارتی فولاد برابر E_s و α_s می‌باشند. فرض می‌کنیم که $\alpha_s > \alpha_c$ باشد.



شکل۷-۲۸ ستون بتن مسلح

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در شکل ۷-۲۸ب نمونه در حالتی که هر دو ماده به صورت جدا می‌باشند نشان داده شده است. هر کدام از مواد می‌توانند آزادانه حرکت کنند. فولاد به اندازه $L_0\alpha_s\Delta T$ و بتن به اندازه $L_0\alpha_c\Delta T$ جابجا می‌شوند. در شکل ۷-۲۸ج هر دو ماده به یک اندازه جابجا شده‌اند و برآیند نیروها برابر صفر است. در این حالت بتن به کشش و فولاد به فشار افتاده است. برای تعادل داریم:

$$P_c(\text{کششی}) = P_s(\text{فشاری}) \qquad (۷-۵۷)$$

همچنین با توجه به شکل‌های ۷-۲۸ب و ج داریم:

$$\delta_c + \delta_s = L_0\alpha_s\Delta T - L_0\alpha_c\Delta T$$

$$\delta_c + \delta_s = L_0\Delta T(\alpha_s - \alpha_c) \qquad (۷-۵۸)$$

از رابطه ۷-۲۸ داریم:

$$\delta_c = \frac{P_c L_0}{A_c E_c} \quad , \quad \delta_s = \frac{P_s L_0}{A_s E_s} \qquad (۷-۵۹)$$

با جایگذاری δ_c و δ_s در رابطه ۷-۵۸ داریم

$$\frac{P_c}{A_c E_c} + \frac{P_s}{A_s E_s} = \Delta T(\alpha_s - \alpha_c) \qquad (۷-۶۰)$$

با حل همزمان معادلات ۷-۵۷ و ۷-۶۰ داریم:

$$P_c(\text{کششی}) = P_s(\text{فشاری}) = \frac{\Delta T(\alpha_s - \alpha_c)}{\left(\dfrac{1}{A_c E_c} + \dfrac{1}{A_s E_s}\right)} \qquad (۷-۶۱)$$

یا به عبارتی

$$P_c(\text{کششی}) = P_s(\text{فشاری}) = \frac{\Delta T(\alpha_s - \alpha_c)A_c E_c A_s E_s}{A_c E_c + A_s E_s} \qquad (۷-۶۲)$$

مقدار تنش کششی بتن و تنش فشاری فولاد به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$\sigma_c = \frac{P_c}{A_c} = \frac{\Delta T(\alpha_s - \alpha_c)A_s E_c E_s}{A_c E_c + A_s E_s}$$

$$\sigma_s = \frac{P_s}{A_s} = \frac{\Delta T(\alpha_s - \alpha_c)A_c E_c E_s}{A_c E_c + A_s E_s} \qquad (۷-۶۳)$$

با توجه به شکل ۷-۲۸ب و ج مقدار تغییرمکان ستون به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta = L_0\alpha_c\Delta T + \delta_c \quad \text{یا} \quad \delta = L_0\alpha_s\Delta T - \delta_s \qquad (٦٤-٧)$$

با استفاده از معادله ۷-٦٤ و۷-۵۹ داریم:

$$\delta = L_0\alpha_c\Delta T + \frac{\Delta T(\alpha_s - \alpha_c)A_cE_cA_sE_sL_0}{A_cE_c(A_cE_c + A_sE_s)}$$

$$\delta = L_0\alpha_c\Delta T\left(\frac{\alpha_cA_cE_c + \alpha_sA_sE_s}{A_cE_c + A_sE_s}\right) \qquad (٦۵-٧)$$

به وضوح روشن است وقتی که $\alpha_c = \alpha_s = \alpha$ می‌توانیم بگوییم که P_c=P_s=0 خواهد بود.

در حالتی که $\alpha_c > \alpha_s$ باشد، آنگاه در معادلات۷-٦۲ و ۷-٦۳ علامت‌های P_s و P_c و σ_c و σ_s معکوس خواهد بود

مثال۷-۸) یک صفحه صلب به وزن *100kN* بر روی سه ستون که همه آنها در یک خط قرار گرفته‌اند، وجود دارد. ارتفاع تمام ستون‌ها برابر ٤متر و ستون‌های بیرونی دارای مدول یانگ $80000N/mm^2$ و ضریب انبساط حرارتی $1.85\times10^{-5}/C^\circ$ می‌باشند. سطح مقطع تمام ستون‌ها برابر $300mm^2$ می‌باشد. ستون داخلی دارای مدول یانگ $20000N/mm^2$ و ضریب انبساط حرارتی $1.2\times10^{-5}/C^\circ$ می‌باشند. در صورتی که صفحه صلب به صورت محکم به ستون‌ها مهار شده باشد مقدار تنش‌های بوجود آمده در ستون‌ها را در اثر اختلاف دمای *100* درجه سانتیگراد بدست آورید.

حل) با استفاده از رابطه ۷-۵۲ تنش در ستون داخلی σ_i و ستون‌های بیرونی σ_o در اثر بار اعمال شده بر آنها برابر است با:

$$\sigma_i = \frac{E_i}{A_0E_0 + A_iE_i}P \quad , \quad \sigma_o = \frac{E_o}{A_0E_0 + A_iE_i}P$$

که در رابطه بالا:

$$A_0E_0 + A_iE_i = 2\times300\times80000 + 300\times200000 = 108.0\times10^6$$

$$\sigma_i = \frac{200000\times100\times10^3}{108.0\times10^6} = 185.2\frac{N}{mm^2} \quad \text{فشاری}$$

$$\sigma_o = \frac{800000\times100\times10^3}{108.0\times10^6} = 74.1\frac{N}{mm^2} \quad \text{فشاری}$$

با رابطه ۷-۶۳ می‌توان مقدار تنش‌ها را در ستون‌های داخلی و خارجی را به علت تغییرات دما حساب کرد.

$$\sigma_o = \frac{\Delta T(\alpha_i - \alpha_o)E_o A_i E_i}{A_o E_o + A_i E_i}$$

$$\sigma_i = \frac{\Delta T(\alpha_i - \alpha_o)E_o A_o E_i}{A_o E_o + A_i E_i}$$

در معادله اخیر $\alpha_o > \alpha_i$ بنابراین تنش در ستون‌های خارجی فشاری و تنش حرارتی در ستون‌های درونی کششی می‌باشند.

$$\sigma_o = \frac{100(1.2 - 1.85)\times 10^{-5} \times 80000 \times 300 \times 200000}{108.0 \times 10^6} = -28.9\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

$$\sigma_i = \frac{100(1.2 - 1.85)\times 10^{-5} \times 2 \times 300 \times 80000 \times 200000}{108.0 \times 10^6}$$

$$= -57.8\frac{N}{mm^2}$$ کششی ||

با استفاده از اصل جمع آثار قوا مقدار تنش نهایی را بدست می‌آوریم:

$$\sigma_i = 185.2 - 57.8 = 127.4\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

$$\sigma_o = 74.1 + 28.9 = 103.0\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

مقدار جابجایی در اثر بار حرارت با استفاده از ۷-۵۱ و ۷-۶۵ بدست می‌آید. تغییر مکان در اثر بار برابر است با:

$$\delta = \frac{100\times 10^3 \times 4 \times 10^3}{108.0 \times 10^6} = 3.7mm$$ انقباض

تغییر مکان در اثر حرارت برابر است با:

$$\delta = 4 \times 10^3 \times 100 \times \left(\frac{1.85\times 10^{-5} \times 2 \times 300 \times 80000 + 1.2 \times 10^{-5} \times 300 \times 200000}{108.0 \times 10^6}\right)$$

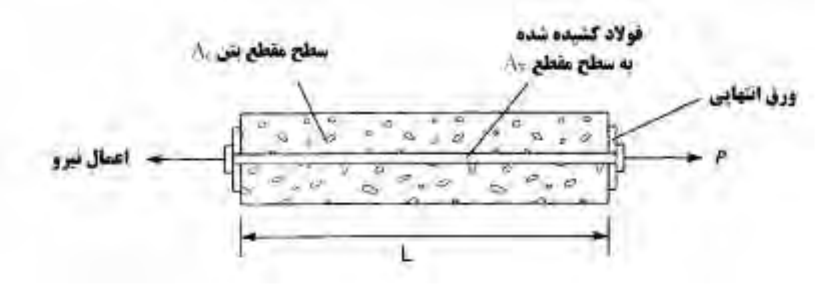
$$= 6mm$$ کشیدگی

مقدار نهایی تغییرمکان برابر است با:

$6.0-3.7=2.3mm$

تنش‌های اولیه و پیش تنیدگی

تنش‌های اولیه ممکن است در بعضی از مقاطع به علت بارهای خارجی و یا پیش حرارت به وجود آید. به عنوان مثال در اتصالات جوشی به دلیل حرارت زیاد در حین جوشکاری و سرد نشدن یکنواخت ورق‌ها در بعضی از نقاط جوشکاری تنش‌هایی باقی می‌ماند که می‌تواند در طراحی تاثیرگذار باشند. در تیرهای پیش تنیده نیز به صورت کنترل شده تنش‌هایی در نقاطی از تیر ایجاد می‌شوند. در این تیرها معمولاً در قسمت پایینی تیر از فولادهای با مقاومت بالا استفاده شده و این فولادها را قبل از ریختن بتن در تیر با نیروی معینی می‌کشند.



شکل۷–۲۹ تیر پیش تنیده

در هنگام بارگذاری در قسمت پایینی تیر که تنش‌های کششی ایجاد می‌شود، مقداری از تنش‌های کششی موجود در پایین تیر در اثر بارهای خارجی صرف از بین بردن تنش‌های فشاری اولیه شده و تیر قادر است نیروهای بیشتری را تحمل کند ولی این نوع تیرها دارای شکل‌پذیری کمتری نسبت به تیرهای عادی هستند. در شکل۷–۲۹ دیده می‌شود که فولاد در حال کشیده شدن است. با نوشتن معادله تعادل:

$$\Delta P_T+\Delta P_C=P \quad (۷–٦٦)$$

مقدار کل نیروی کشیدگی برابر $F+\Delta P_T$ است و همچنین مقدار کل نیروی فشاری برابر $F+\Delta P_C$ است. با استفاده از رابطه ۷–۲۸ مقدار تغییرمکان ورق انتهایی را در اثر این نیروها را می‌توان بدست آورد:

$$\delta=\frac{\Delta P_T L}{A_T E_T}=\frac{\Delta P_C L}{A_C E_C} \quad (۷–٦۷)$$

که در آن E_C و E_T به ترتیب مدول یانگ[1] بتن فشاری و فولاد کششی می‌باشند. با استفاده از رابطه ۷–۶۷ داریم:

$$\Delta P_T = \frac{A_T E_T}{A_C E_C} \Delta P_C \qquad (۷–۶۸)$$

با جانشین کردن در معادله ۷–۶۶ داریم:

$$\Delta P_C \left(\frac{A_T E_T}{A_C E_C} + 1 \right) = P$$

$$\Delta P_C = \frac{A_C E_C}{A_C E_C + A_T E_T} P \qquad (۷–۶۹)$$

حال با جانشانی ΔP_C در رابطه ۷–۶۸ و ۷–۶۹ داریم:

$$\Delta P_T = \frac{A_T E_T}{A_C E_C + A_T E_T} P \qquad (۷–۷۰)$$

مقدار بار نهایی P_C و P_T در بتن و فولاد برابر است با:

$$P_C = F - \frac{A_C E_C}{A_C E_C + A_T E_T} P \Big| \text{ فشاری} \qquad (۷–۷۱)$$

و

$$P_T = F + \frac{A_T E_T}{A_C E_C + A_T E_T} P \Big| \text{ کششی} \qquad (۷–۷۲)$$

متناظراً مقدارهای تنش‌های کششی و فشاری در آنها برابر است با:

$$\sigma_C = \frac{P_C}{A_C} = \frac{1}{A_C} \left(F + \frac{A_T E_T}{A_C E_C + A_T E_T} P \right) \Big| \text{ فشاری} \qquad (۷–۷۳)$$

و

$$\sigma_T = \frac{P_T}{A_T} = \frac{1}{A_T} \left(F + \frac{A_T E_T}{A_C E_C + A_T E_T} P \right) \Big| \text{ کششی} \qquad (۷–۷۴)$$

دیده می‌شود که جمله داخل در رابطه ۷–۷۳ مقداری منفی حاصل می‌دهد. در نهایت مقدار کشیدگی[2] در اثر اعمال بار P با استفاده از رابطه ۷–۶۷ بدست می‌آید:

[1] Young’s modulus
[2] Elongation

$$\delta=\frac{L}{A_C E_C + A_T E_T}P \qquad (۷۵-۷)$$

مثال۷-۹) یک تیر بتنی با مقطع مربع مستطیل به ابعاد *120*300mm* توسط شش آرماتور فولادی به صورت پیش تنیده در آمده است. سطح مقطع آرماتورها برابر $300mm^2$ می‌باشد. در صورتی که تنش کششی در آرماتورها برابر $150N/mm^2$ باشد، مقدار تنش فشاری در بتن را تعیین کنید. در صورتی که تیر مسلح تحت کشش محوری معادل *150kN* قرار گیرد، مقدار تنش‌نهایی در بتن و فولاد را تعیین کنید. فرض کنید که نسبت مدول الاستیسیته فولاد به بتن برابر *15* باشد.

حل) سطح مقطع A_C بتن برابر است با:

$$A_C = 120\times 300 - 6\times 300 = 34200\,mm^2$$

تنش اولیه فشاری در بتن برابر تنش اولیه کششی در آرماتورها است:

$$\sigma_{Ci}\times 34200 = 150\times 6\times 300 = 7.9\frac{N}{mm^2}$$

که σ_{Ci} تنش اولیه فشاری در بتن می‌باشد. مقدار تنش نهایی در بتن و فولاد با استفاده از رابطه ۷-۷۳ و ۷-۷۴ بدست می‌آید.

$$\sigma_C = 7.9 - \frac{1}{A_C + \left(\frac{E_T}{E_C}\right)A_T}P$$

$$\sigma_C = 7.9 - \frac{150\times 10^3}{34200+15\times 6\times 300} = 5.4\frac{N}{mm^2} \quad \text{فشاری}$$

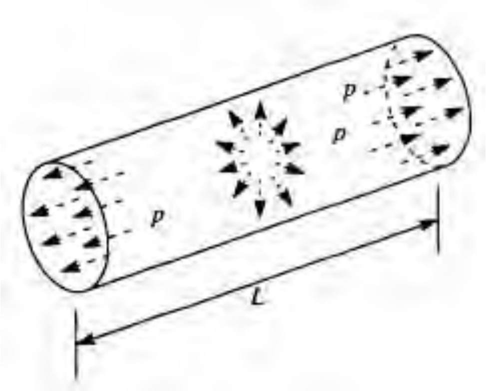
به طور مشابه از معادله ۷-۷۴ داریم:

$$\sigma_T = 150 + \frac{1}{A_T + \left(\frac{E_C}{E_T}\right)A_C}P$$

$$\sigma_T = 150 + \frac{150\times 10^3}{\frac{1}{15}\times 34200 + 6\times 300} = 186.8\frac{N}{mm^2} \quad \text{کششی}$$

۷-۱۵ مخازن جدار نازک تحت فشار داخلی

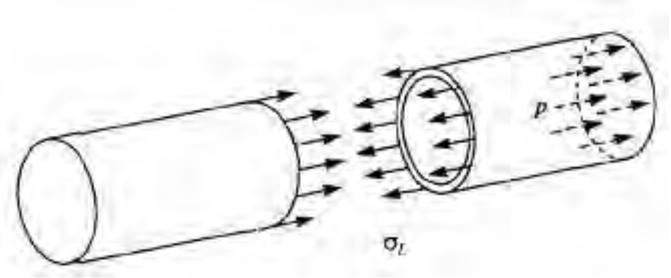
مخازن جدار نازک تحت فشار داخلی یکی از مواردی هستند که در مهندسی عمران دارای اهمیت می‌باشند. شکل۷-۳۰ یک مخزن بلند جدار نازک را نشان می‌دهد که به صورت استوانه‌ای است. این استوانه تحت فشار داخلی p قرار گرفته است.



شکل۷-۳۰ مخزن تحت فشار نازک

فرض کنید که d قطر داخلی این استوانه و t ضخامت ورق آن می‌باشد. در شکل۷-۳۱ نیروی محوری موجود در اثر فشار p نشان داده شده است.

$$p\times\frac{\pi\times d^2}{4}$$



شکل۷-۳۱ تنش طولی در اثر فشار داخلی

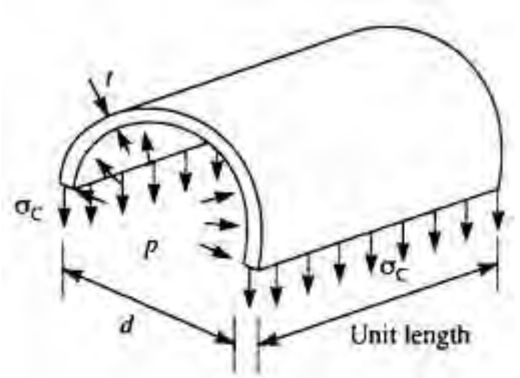
این نیرو در اثر تنش محوری و طولی σ_L ایجاد می‌شود.

$$\sigma_L\times\pi\times dt = p\frac{\pi\times d^2}{4}$$

$$\sigma_L = \frac{pd}{4t} \qquad (۷-۷٦)$$

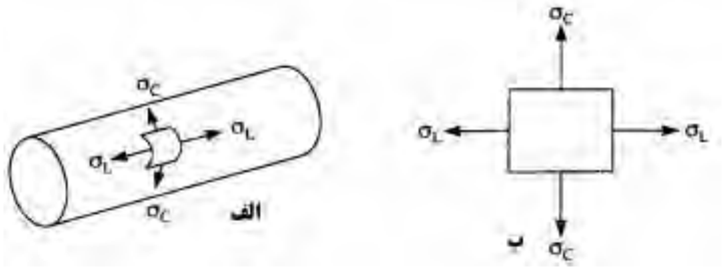
در شکل ۷-۳۲ همان استوانه با طول واحد نشان داده شده است. مقدار تنش در جدارهای پیرامونی استوانه برابر است با:

$$2\sigma_C \times (1\times t) = p\times(1\times d) \quad \Rightarrow \quad \sigma_C = \frac{pd}{2t} \qquad (۷-۷۷)$$



شکل۷-۳۲ تنش جانبی در اثر فشار داخلی

در شکل۷-۳۳الف تنش‌های طول و عرضی بر روی یک المان کوچک نشان داده شده‌اند.



شکل۷-۳۳ تنش دوبعدی

این المان در شکل۷-۳۳ب نشان داده شده است و تنش‌های وارد بر آن نیز آورده شده‌اند. کرنش طولی ε_L با استفاده از رابطه ۷-۱۳ برابر است با:

$$\varepsilon_L = \frac{\sigma_L}{E} - \nu\frac{\sigma_C}{E}$$

با جایگذاری σ_C و σ_L از معادلات۷-۷٦ و ۷-۷۷ داریم:

$$\varepsilon_L = \frac{pd}{2tE}\left(\frac{1}{2} - \nu\right) \qquad (۷-۷۸)$$

به طور مشابه

$$\varepsilon_C = \frac{pd}{2tE}\left(1-\frac{1}{2}\nu\right) \qquad (۷-۷۹)$$

افزایش طول استوانه برابر $\varepsilon_L L$ و افزایش محیط برابر $\varepsilon_C \pi d$ است. همچنین اضافه حجم استوانه برابر است با:

$$\Delta V = \frac{\pi}{4}(d+\varepsilon_C d)^2(L-\varepsilon_L L)-\frac{\pi}{4}d^2L$$

با صرف نظر از توان دوم عبارت داریم:

$$\Delta V = \frac{\pi d^2 L}{4}(2\varepsilon_C + \varepsilon_L) \qquad (۷-۸۰)$$

با جانشانی مقادیر کرنش‌ها از رابطه ۷-۷۸ و ۷-۷۹ در رابطه ۷-۸۰ داریم:

$$\Delta V = \frac{\pi d^2 L}{4}\frac{pd}{tE}\left(\frac{5}{4}-\nu\right)$$

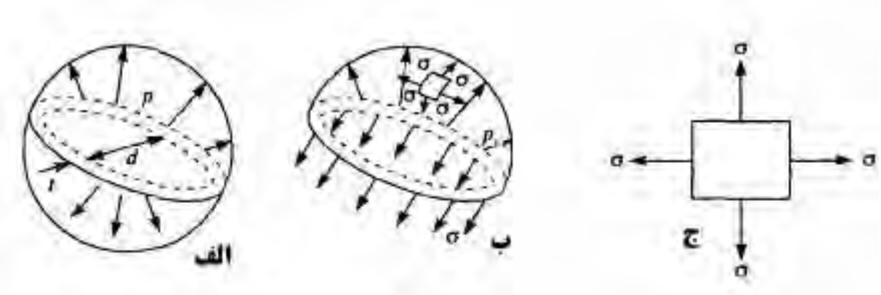
کرنش حجمی برابر است با:

$$\frac{\Delta V}{\frac{\pi d^2 L}{4}} = \frac{pd}{tE}\left(\frac{5}{4}-\nu\right) \qquad (۷-۸۱)$$

در صورتی که تحلیل یک پوسته کروی مد نظر باشد مانند شکل ۷-۳۴الف و ب مقدار تنش کششی در دیوارها با هم برابر است.

$$\sigma \times \pi \times dt = p \times \frac{\pi \times d^2}{4}$$

$$\sigma = \frac{p \times d}{4t} \qquad (۷-۸۲)$$



شکل۷-۳۴ تنش در مقطع کروی

در شکل ۷-۳۴ج یک المان از سطح پوسته نشان داده شده است. مقدار کرنش حجمی در این کره برابر است با:

$$\frac{3p \times d}{4tE}(1-\nu) \qquad (۷-۸۳)$$

مثال۷-۱۰) یک پوسته استوانه‌ای جدار نازک به قطر داخلی ۲متر و از یک ورق به ضخامت ۲۰ میلیمتر ساخته شده است. در صورتی که مقاومت کششی ورق برابر $400N/mm^2$ باشد، مقدار فشار قابل تحمل برای مخزن را تعیین کنید. ضریب اطمینان برابر ٦ در نظر گرفته شود. همچنین درصد اضافه حجم این مخزن را وقتی که تحت این فشار قرار می‌گیرد را تعیین کنید. ضریب پواسون را برابر 0.3 و مدول یانگ را برابر $200000N/mm^2$ در نظر بگیرید.

حل) حداکثر تنش کششی در دیواره‌های پوسته توسط رابطه ۷-۷۷ بدست می‌آید.

$$\frac{400}{6} = \frac{p \times 2 \times 10^3}{2 \times 20} \quad \Rightarrow \quad p = 1.33\frac{N}{mm^2}$$

کرنش حجمی با استفاده از رابطه ۷-۸۱ بدست می‌آید:

$$\frac{1.33 \times 2 \times 10^3}{20 \times 200000}\left(\frac{5}{4} - 0.3\right) = 0.00063$$

مسائل:

۷-۱) یک ستون به ارتفاع ۳متر با مقطع دایره‌ای توخالی با قطر خارجی $300mm$، نیروی محوری به اندازه $5000kN$ را حمل می‌کند. در صورتی که حداکثر تنش قابل حمل توسط ستون برابر $150N/mm^2$ باشد و حداکثر کوتاه شدگی ستون تحت بار محوری نباید بیشتر از $2mm$ باشد. حداکثر قطر داخلی را به شرطی که مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ باشد، حساب کنید.

حل) با استفاده از رابطه ۷-۱ داریم:

$$\sigma_{(\max)} = 150 = \frac{5000 \times 10^3}{\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(300^2 - d^2\right)\right]} \quad \Rightarrow \quad d = 218.1mm$$

که d قطر داخلی است. مقدار حداکثر کوتاه شدگی ستون تحت بار محوری:

$$0.00067 = \frac{5000\times10^3}{\left[200000\times\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(300^2 - d^2\right)\right]} \quad \Rightarrow \quad d = 205.6mm$$

بنابراین مقدار حداکثر برای قطر داخلی در نظر گرفته می‌شود.

۷-۲) یک تیر فولادی به دو دیوار محکم شده است. در صورتی که تیر در ابتدا بدون تنش باشد و تغییرات دمای تیر به صورت یکنواخت برابر *30k* باشد و ضریب انبساط حرارتی تیر برابر *0.00005/k* باشد و مدول یانگ برابر $E=180000N/mm^2$، مقدار تنش بوجود آمده در تیر را حساب کنید.

حل) مقدار کرنش در تیر با استفاده از رابطه ۷-٤:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \alpha T = 0.00005\times30 = 0.0015$$

با استفاده از رابطه ۷-۷ مقدار تنش برابر است با:

$$\sigma = 0.0015\times180000 = 270\,N/mm^2$$

۷-۳) یک ستون با مقطع دایره‌ای توپر بار محوری *10000kN* را حمل می‌کند. در صورتی که تنش مجاز ستون برابر $150N/mm^2$ باشد، مقدار حداقل قطر این ستون را تعیین کنید. مقدار کوتاه شدگی ستون با این قطر را نیز تعیین نمایید. فرض کنید که ضریب پواسون برابر *0.3* و مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ باشد.

حل) با استفاده از رابطه ۷-۱ داریم:

$$\sigma = 150 = \frac{10000\times10^3}{\left(\frac{\pi\times D^2}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad D = 291.3mm$$

مقدار کوتاه شدگی ستون با این قطر با استفاده از رابطه ۷-۷ برابر است با:

$$\delta = \frac{150}{200000}\times3\times10^3 = 2.25mm$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۷-٤) یک عضو سازه‌ای به طول ۲متر به مقدار *1.5mm* کوتاه ساخته شده است. این عضو قسمتی از یک قاب است. این عضو را بایستی به چه مقدار حرارت دهیم تا کاملاً به قاب بچسبد. بعد از سرد شدن این عضو چه تنشی در آن ایجاد می‌شود. در صورتی که مقطع تیر به شکل مستطیلی باشد، در صد تغییرات سطح مقطع وقتی که عضو در محل کار گذاشته می‌شود و وقتی که به دمای اولیه می‌رسد را تعیین کنید. مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ و ضریب پواسون برابر *0.3* و ضریب انبساط حرارتی برابر *0.000012/k* است.

حل) مقدار حرارت مورد نیاز برابر ایجاد تغییرمکان *1.5mm* برابر است با:

$$T = \frac{L - L_0}{\alpha L_0} = \frac{1.5}{0.000012 \times 2 \times 10^3} = 62.5^\circ$$

$$\alpha T = 0.000012 \times 62.5^\circ = 0.00075$$

$$\sigma = 200000 \times 0.00075 = 150 \frac{N}{mm^2}$$

$$\text{درصد تغییر} = \left[ab - (a - 0.3\varepsilon a)(b - 0.3\varepsilon b)\right] \times \frac{100}{ab}$$

$$\text{درصد تغییر} = 2 \times 0.3\varepsilon ab \times \frac{100}{ab} = 2 \times 0.3\varepsilon \times 100$$

$$\text{درصد تغییر} = 2 \times 0.30.00075 \times 100 = 0.045\%$$

۷-۵) به یک عضو سازه‌ای برای حمل نیروی محوری کششی به اندازه *100kN* نیاز داریم. برای این مقطع می‌خواهیم از دو نبشی که به صورت پشت به پشت به هم چسبیده‌اند استفاده کنیم. این نبشی‌ها دارای سوراخی به قطر *18mm* برای اتصال هستند. در صورتی که تنش مجاز برای این نبشی‌ها برابر $155N/mm^2$ باشد، این مقطع را طراحی کنید.

حل) مقدار سطح مقطع مورد نیاز:

$$A = \frac{100 \times 10^3}{155} = 645.2mm^2$$

نبشی $50 \times 50 \times 5mm$ برای این سطح مقطع مناسب است.

۷-٦) دو عضو سازه‌ای *A* و *B* با مقطع دایره‌ای و مصالح یکسان و هر کدام به طول *250mm* می‌باشند. عضو *A* در *50mm* خود دارای قطر *25mm* می‌باشد و برای بقیه طول

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

دارای قطر *20mm* می‌باشد. عضو *B* در *200mm* خود دارای قطر *25mm* می‌باشد و برای بقیه طول دارای قطر *20mm* می‌باشد. در صورتی که عضو *B* تحت یک بار ضربه‌ای قرار گرفته و حداکثر تنش ایجاد شده در آن برابر $200N/mm^2$ باشد، حداکثر تنش ایجاد شده در عضو *A* را وقتی که تحت همان بار ضربه‌ای قرار می‌گیرد را تعیین کنید. فرض کنید که انرژی جذب شده توسط هر دو عضو یکسان است.

۷-۷) یک میله با مقطع دایره‌ای به طول ۲متر و به صورت قائم محکم نگه داشته شده است. یک وزنه از ارتفاع *30mm* از بالا بر روی ورق انتهایی این میله سقوط می‌کند و باعث ایجاد تنشی به اندازه $150N/mm^2$ می‌شود. درصورتی که وزنه به صورتی تدریجی گذاشته شده بود، مقدار تنش را حساب کنید. همچنین در صورتی که وزنه از ارتفاع *40mm* سقوط کند مقدار تنش را حساب کنید. فرض کنید مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ است.

۷-۸) یک ستون به ارتفاع ۳متر با مقطع دایره‌ای توخالی و قطر خارجی *300mm* یک بار محوری به میزان *5000kN* را حمل می‌کند. در صورتی که تنش مجاز ستون برابر $150N/mm^2$ و میزان حداکثر کوتاه شدگی ستون برابر *2mm* باشد، مقدار حداکثر قطر داخلی این ستون را حساب کنید. فرض کنید مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ است.

۷-۹) یک شمع بتنی به ارتفاع ۵ متر و قطر *200mm* توسط وزنه *2kN* داخل زمین شده است. در صورتی حداکثر تنش قابل تحمل توسط بتن تحت بار ضربه برابر $25N/mm^2$ باشد، مقدار ارتفاع انداختن وزنه بر روی شمع را حساب کنید.

۷-۱۰) یک قلاب قائم عرشه یک پل معلق را نگه می‌دارد که به یک کابل به طول ۲۵ متر و قطر *7.5mm* بسته شده است. در صورتی که چگالی فولاد برابر $7850kg/m^3$ باشد و میزان بار در انتهای قلاب برابر *5kN* باشد، مقدار حداکثر تنش در کابل و میزان بلند شدگی آن را تعیین کنید. فرض کنید مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ است.

۷-۱۱) یک دودکش بتنی به ارتفاع ۴۰ متر دارای سطح مقطع $0.15m^2$ است و توسط سه گروه از کابل‌های چهارتایی در ارتفاع‌های ۱۵ و ۲۵ و۳۵ متر نگهداری شده است. در صورتی که هر کدام از کابل‌ها در زمین و به فاصله ۲۰متری از پای دودکش مهار شده و توسط نیروی $15kN$ کشیده شده باشند، مقدار حداکثر تنش موجود در دودکش و میزان کوتاه شدگی آن را تحت اثر وزن خودش تعیین کنید. وزن مخصوص بتن برابر $2500kg/m^3$ و فرض کنید مدول یانگ برابر $20000N/mm^2$ است.

حل) مقدار نیروی متمرکز بر اساس مسئله ۳-۱ برابر $36kN$ در ارتفاع ۱۵متری، $46.8kN$ در ارتفاع ۲۵متری و $52.1kN$ در ارتفاع ۳۵متری. وزن دودکش نیز برابر است با:

$$SW = 40\times 0.15\times 2500\times 9.81\times 10^{-3} = 147.15kN$$

مقدار نیروی نهایی در پای دودکش برابر است با:

$$147.15 + 36.0 + 46.8 + 52.1 = 282.05kN$$

مقدار حداکثر تنش ایجاد شده بر اساس رابطه ۷-۱ برابر است با:

$$\sigma = \frac{282.05\times 10^3}{0.15\times 10^6} = 1.9\frac{N}{mm^2}$$

مقدار کوتاه‌شدگی دودکش در اثر وزن خودش برابر است با:

$$\text{اثر وزن خودش} = \frac{2500\times 9.81\left(40\times 10^3\right)^2}{2\times 20000\times 10^9} = 0.98mm$$

$$\text{اثر بارهای اعمال شده} \quad \frac{\left(52.1\times 35 + 46.8\times 25 + 36\times 15\right)\times 10^6}{0.15\times 10^6\times 20000} = 1.18mm$$

مقدار نهایی کوتاه شدگی برابر است با:

$$\delta = 0.98 + 1.18 = 2.16mm$$

۷-۱۲) یک ستون با مقطع مربع مستطیل به ارتفاع h در بالای خودش به صورت خطی نوک تیز می‌شود. به طوری که در پایین دارای بعد b_1 و در بالا دارای بعد b_2 است. عرض مقطع در تمام طول آن ثابت و برابر a است. مقدار کوتاه شدگی ستون را در اثر نیروی محوری P تعیین کنید.

حل) در هر مقطعی به فاصله x از بالای ستون، سطح مقطع ستون در آن مقطع برابر است با:

$$A = a\left[b_2 + \frac{x(b_1 - b_2)}{h}\right]$$

از رابطه ۷–۲۸ کوتاه شدگی یک المان δx برابر است با:

$$\delta\Delta = \frac{P\delta x}{AE}$$

مقدار نهایی کوتاه شدگی برابر است با:

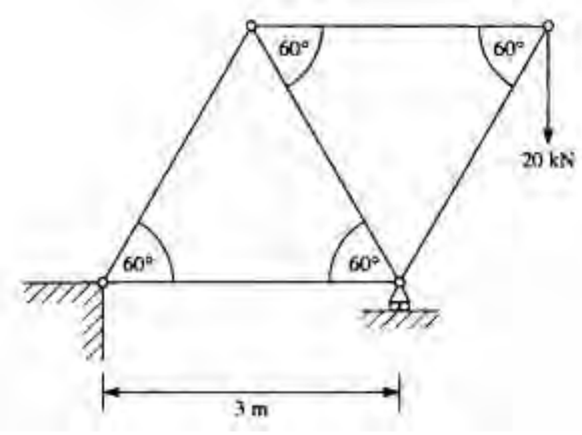
$$\Delta = \int_0^h \frac{Pdx}{AE}$$

با جایگذاری A در رابطه داریم:

$$\Delta = \left(\frac{P}{aE}\right)\left[\frac{h}{(b_1 - b_2)}\right]\log_e\left[b_2 + \frac{x(b_1 - b_2)}{h}\right]_0^h$$

$$\Delta = \left(\frac{Ph}{aE(b_1 - b_2)}\right)\log_e\left(\frac{b_1}{b_2}\right)$$

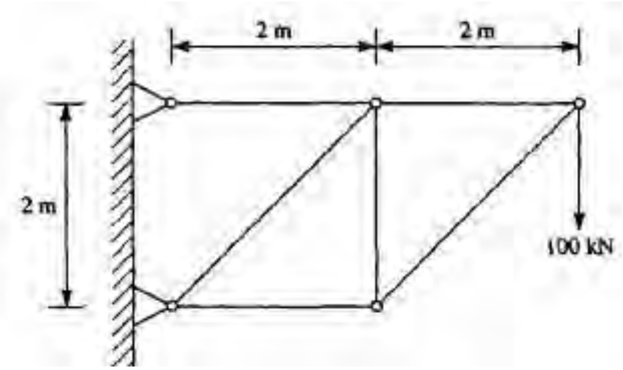
۷–۱۳) در خرپای نشان داده شده در شکل زیر مقدار خیز قائم در زیر بار $20kN$ را تعیین کنید. سطح مقطع اعضای فشاری برابر $200mm^2$ و سطح مقطع اعضای کششی برابر $100mm^2$ می‌باشند. فرض کنید مدول یانگ برابر $205000N/mm^2$ است.



حل)

$$\Delta = 4.5mm$$

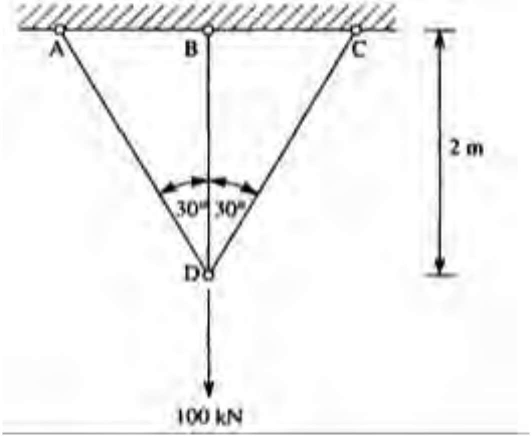
۷-۱٤) اعضای خرپای نشان داده شده در شکل زیر دارای سطح مقطع $1200mm^2$ می‌باشند. فرض کنید مدول یانگ برابر $205000N/mm^2$ است. مقدار تغییرمکان در زیر بار متمرکز نشان داده شده در شکل را تعیین کنید.



حل)

$$\Delta = 10.3mm$$

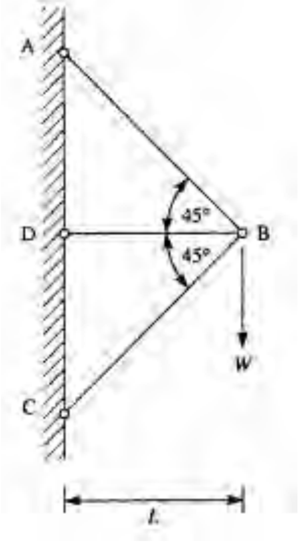
۷-۱۵) اعضای AD و CD نشان داده شده در شکل زیر دارای سطح مقطع $500mm^2$ و عضو BD دارای سطح مقطع $250mm^2$ می‌باشد. مقدار تنش در هر یک از اعضا و مقدار خیز در گره D را تعیین کنید. فرض کنید مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ است.



حل)

$$\sigma_{CD} = \sigma_{AD} = 83.4\frac{N}{mm^2} \qquad \sigma_{BD} = 111.2\frac{N}{mm^2}$$

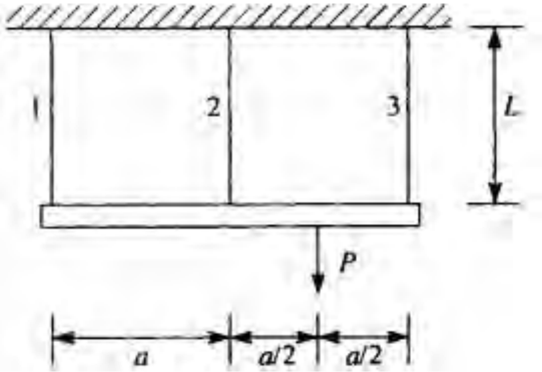
۷–۱۶) قاب مفصل شده شکل زیر نیروی قائمی برابر با W را در گره B تحمل می‌کند. مقدار نیروی موجود در اعضای این سیستم را تعیین کنید.



حل)

$$P_{BD}=0 \qquad P_{BC}=\frac{W}{\sqrt{2}}\text{compression} \qquad P_{BA}=\frac{W}{\sqrt{2}}\text{tension}$$

۷–۱۷) سه میله مشابه به طول L و به صورت قائم یک تیر صلب بدون وزن را که نیروی P به آن اعمال می‌شود تحمل می‌کنند. مقدار نیرو در هر یک از میله‌ها را حساب کنید.



حل)

$$P_1=\frac{P}{12} \quad , \quad P_2=\frac{P}{3} \quad , \quad P_3=\frac{7P}{12}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل هشتم
مشخصات مهندسی مواد

در فصل هفتم در مورد طراحی اعضا بحث شد و نشان داده شد چگونه می‌توان اعضای سازه‌ای را با توجه به بارهای وارده و مشخصات هندسی آنها به صورت ایمن طراحی نمود. یکی از مشخصات اساسی مواد میزان حداکثر تنشی است که آنها می‌توانند تا قبل از مرحله خرابی[1] تحمل کنند. قبل از خرابی معمولاً مواد شکل‌پذیر دچار تغییرمکان‌های زیادی شده و این خود هشداری قبل از خرابی است که بسیار مهم می‌باشد در حالی در مواد ترد و شکننده خرابی بدون هیچگونه هشداری و به صورت ناگهانی است. فولاد ، بتن و مصالح بنایی از رایج‌ترین مواد ساختمانی هستند که در شکل‌های متنوع و گوناگون برای اعضای سازه‌ای[2] مورد استفاده قرار می‌گیرند. از فولاد نرمه[3] برای ساخت تیرها، ستون‌ها، مهارها و اتصالات استفاده می‌شود. همچنین از این ماده برای مسلح کردن بتن استفاده می‌شود. از بتن برای ساختن ستون‌ها، تیرها و پی‌ها استفاده می‌شود. حتی ممکن است از بتن در نمای ساختمان‌ها استفاده شود. سازه‌های فولادی در برابر حرارت ضعیف هستند و لذا از بتن برای پوشش آنها استفاده می‌شود تا علاوه بر بالا بردن مقاومت عضو، مقاومت آن در برابر حرارت نیز افزایش می‌یابد. ساختمانهای بنایی از قدیمی ترین و پیچیده ترین سازه های موجود در دنیا هستند. در سراسر دنیا مطالعات و تحقیقات بسیاری بر روی رفتار این سازه ها صورت گرفته است. همچنین مطالعاتی جهت ساده سازی رفتار ساختمانهای بنایی انجام شده است که بر اساس این مطالعات اقدام به تهیه دستورالعمل‌هایی جهت ارزیابی و مقاوم سازی آنها شده است. استفاده از مصالح بنائی بویژه نوع آجری آن برای ساخت واحدهای مسکونی یک یا چند طبقه و یا واحدهای تجاری و تولیدی و مدارس شهرهای کوچک و

[1] Fractures
[2] Structural members
[3] Mild steel

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

روستاها متداول است. علت اصلی این کاربرد وسیع، آسان بودن تولید آجر و عدم نیاز به تکنولوژی برتر چه در مراحل تولید واحدهای ساختمانی مثل آجر یا بلوک و چه در مراحل ساخت وساز و همچنین تصور عمومی و کلی مبنی بر عدم نیاز به تخصص ویژه در همه مراحل فوق می‌باشد. از طرفی آجر بعنوان یک فرآورده با قدمت تاریخی دارای قابلیت انعطاف و زیبایی برای نماکاری است که رویکرد بیشتری را در استفاده از آن موجب میگردد.

۸-۱ طبقه‌بندی مواد

معمولاً در متون مهندسی مواد را به دو دسته اساسی تقسیم می‌کنند. یکی مواد شکل‌پذیر و دیگری مواد ترد و شکننده. این مواد در برابر اعمال بارهای مختلف عکس‌العمل‌های گوناگونی از خود نشان می‌دهند.

مواد شکل‌پذیر[۱]

به ماده‌ای شکل پذیر گویند که بتواند قبل از گسیختگی میزان قابل توجهی کرنش را تجربه کند. از جمله می‌توان به فولاد نرمه، آلومینیوم[۲]، مس[۳] و پلیمرها[۴] اشاره کرد.

مواد ترد[۵]

به موادی ترد گفته می‌شود که قبل از خرابی کرنش قابل توجهی را تجربه نکند. خرابی و گسیختگی این مواد بدون هیچ گونه هشداری می‌باشد. سفال، آجر، چدن و فولادهای پر کربن با مقاومت بالا از جمله مواد ترد هستند.

مواد ارتجاعی[۶]

به موادی ارتجاعی گفته می‌شود که بعد از حذف بار به حالت اولیه خود بر گردند.

---
[1] Ductility
[2] Aluminum
[3] Copper
[4] Polymers
[5] Brittleness
[6] Elastic materials

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مواد خمیری

ماده‌ای خمیری کامل[1] است که بعد از حذف بار، کرنش آن تغییر نکند و به عبارت دیگر کرنش آن حذف نشود. مواد ارتجاعی –خمیری تا حد تناسب به صورت ارتجاعی رفتار می‌کنند و تا وقتی که در این حالت قرار دارند، بعد از حذف بار، کرنش موجود در آنها به صفر می‌رسد. اما در محدوده خمیری (غیرارتجاعی) در مرحله باربرداری صرفاً به میزان کرنش ارتجاعی از میزان کرنش آنها کاسته می‌شود.

مواد همسانگرد[2]

بسیاری از مواد مانند فولاد نرمه دارای خواص یکسانی در تمام جهات هستند، به این مواد همسانگرد گویند.

مواد ناهمسانگرد[3]

به موادی اطلاق می‌شود که دارای مشخصات رفتاری یکسان در جهات مختلف نباشند.

۸-۲ آزمایشات بر روی مواد

برای تعیین مشخصات مواد و مصالح باید آنها را قبل از استفاده مورد آزمایش قرار داد. این آزمایشات بر روی نمونه‌های با ابعاد و اشکال هندسی استاندارد و توسط دستگاه‌های مکانیکی دقیق صورت می‌گیرد و می‌تواند به صورت استاتیکی یا دینامیکی انجام شود.

یکی از آزمایشاتی که به صورت متداول مورد استفاده قرار می‌گیرد، آزمایش کشش استاتیکی و یا فشار استاتیکی بر روی مصالح است. موادی که شکل پذیر باشند معمولاً تحت کشش و موادی که ترد باشند و مقاومت کششی آنها ناچیز باشد مانند بتن ومصالح بنایی معمولاً تحت آزمایش فشاری قرار می‌گیرند.

آزمایش کشش

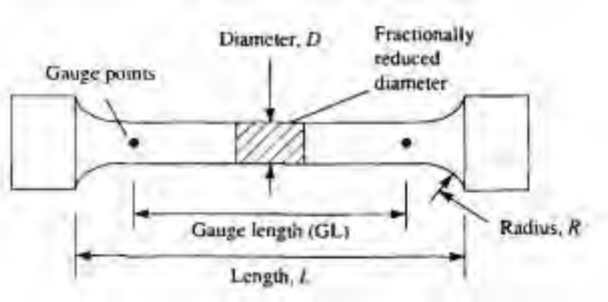
یکی از آزمایشات متداول در شناخت مواد، آزمایش کششی است. در شکل۸-۱ یک نمونه از این آزمایش نشان داده شده است. هر چه میزان شکل‌پذیری ماده بیشتر باشد نمودار تنش

---

1 Perfectly plastic
2 Isotropic
3 Anisotropic

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

کرنش داری طول بیشتری است و کرنش بیشتری را تحمل می‌کند. برای مواد ترد و شکننده این مقدار کرنش کم بوده و نمونه سریعاً می‌شکند.



شکل ۸-۱ آزمایش کشش

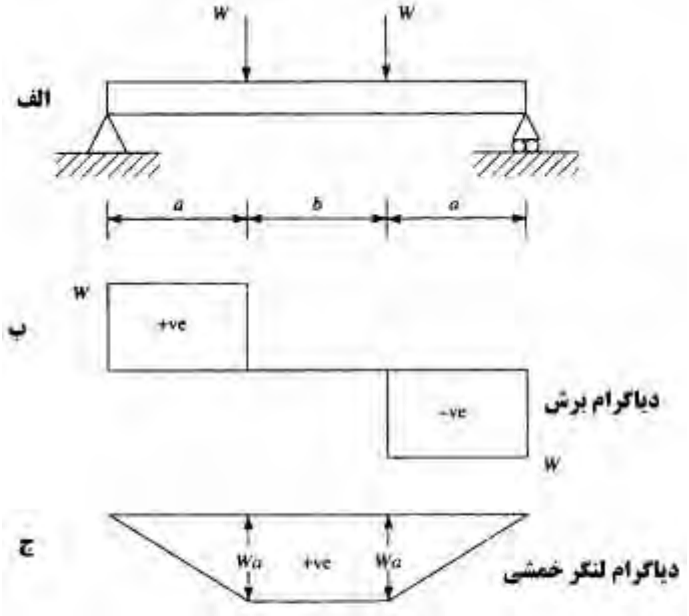
در این آزمایش یک میله که معمولاً دارای مقطع دایره است را بین دو فک دستگاه قرار می‌دهند و توسط صفحه‌های صلبی آن را به دستگاه محکم می‌کنند. قطر میله معلوم بوده و توسط دو نقطه، طول اولیه GL تعیین می‌شود. با توجه به اینکه بعد از اعمال بار در هر لحظه از زمان مقداری به طول قطعه اضافه می‌شود، این اضافه طول توسط فاصله بین این دو نقطه قرائت می‌شود. با تقسیم اضافه طول بدست آمده بر طول اولیه عضو، مقدار کرنش موجود در قطعه بدست می‌آید. باری که توسط دستگاه به صورت استاتیکی و تدریجی به قطعه اعمال می‌شود نیز بر مساحت قطعه تقسیم شده و مقدار تنش حاصل بدست می‌آید. برای مقادیر بارهای مختلف و کرنش‌های مختلف و از وصل کردن نقاط بدست آمده از این منحنی، نمودار تنش-کرنش عضو بدست می‌آید.

آزمایش فشار

این آزمایش نیز دقیقاً مشابه آزمایش کشش است و فقط به جای اعمال نیروی کششی، نمونه تحت فشار محوری قرار می‌گیرد. این آزمایش برای مصالح ترد و شکننده مورد استفاده قرار می‌گیرد.

آزمایش خمش

در آزمایش خمش می‌توان بعضی از مشخصات مواد را تعیین نمود. برای تعیین این مشخصات بایستی نمونه تحت خمش خالص قرار گیرد. برای اینکه نمونه تحت خمش خالص باشد، نمونه را مانند شکل۸-۲الف بر روی دو تکیه‌گاه ساده قرار می‌دهند.



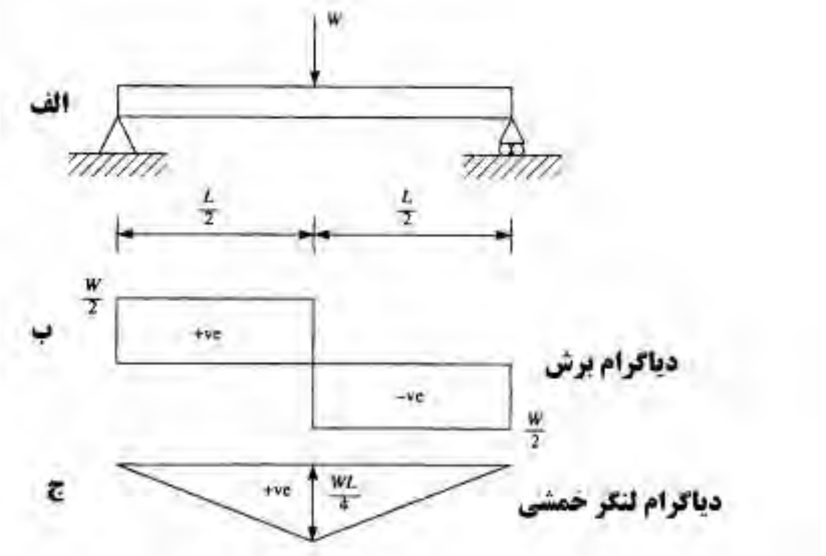
شکل۸-۲ آزمایش خمش بر روی تیر

در این حالت با اعمال دو بار متمرکز[1] و به فاصله مساوی از بر دو تکیه‌گاه، در صورتی که دیاگرام و لنگر خمشی را برای بارگذاری مفروض ترسیم کنیم مانند شکل۸-۲ب و ج دیده می‌شود که در فاصله بین دو بار متمرکز مقدار خمشی و لنگر خمشی ثابت بوده و همچنین مقدار برشی در این ناحیه برابر صفر است.

نوع دیگری از آزمایشات خمشی در شکل۸-۳ نشان داده شده که نمونه تحت یک بار متمرکز در وسط خود قرار می‌گیرد. دیاگرام برش و لنگر برای این تیر در شکل۸-۳ب و ج نشان داده شده است. مقدار خیز توسط وسائل اندازه‌گیری می‌شود. یکی از مشخصاتی که از این آزمایش حاصل می‌شود، مدول گسیختگی[2] مقطع است.

[1] Concentrated
[2] Modulus of rupture

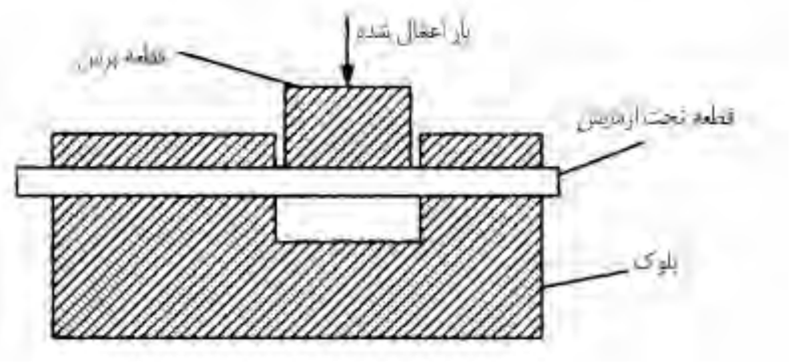
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۸-۳ آزمایش خمش تیر تحت یک بار متمرکز

آزمایش برش[1]

از آزمایش برش برای تعیین ظرفیت برشی مصالح استفاده می‌شود. در شکل۸-٤ یک نمونه از این آزمایشات آورده شده است که قطعه مورد آزمایش توسط گیره‌ای محکم نگه داشته می‌شود و بار به گونه‌ای بر قطعه اعمال می‌شود که باعث برش قطعه شود.



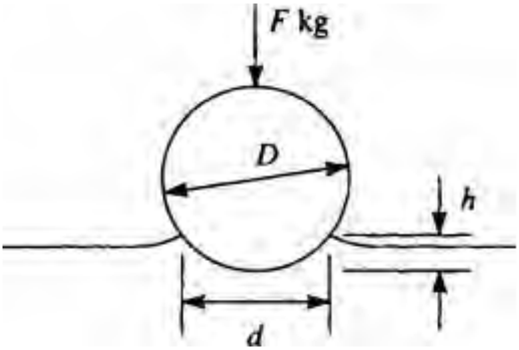
شکل۸-٤ آزمایش کشش

[1] Shear tests

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

سنجش سختی[1]

یکی از پارامترهای موثر پایداری مواد در برابر خراشیدگی، سختی آنهاست. سختی مواد دارای رابطه مستقیم با مقاومت کششی آنهاست. آزمایشات سختی معمولاً برای بررسی عملکرد حرارت بر روی مواد و پروفیل‌های سرد نورد شده[2] مورد استفاده قرار می‌گیرند. دو آزمایش متداول در این راه مورد استفاده قرار می‌گیرند. یکی تست دندانه‌ای و دیگری تست خراشیدن. آزمایش دندانه‌ای نیز ممکن است در دو دسته مورد استفاده قرار گیرد: استاتیکی و دینامیکی. آزمایش استاتیکی برینل بیشترین کاربرد را دارد. ضریب سختی برینل[3] به صورت زیر تعیین می‌شود. در شکل ۸–۵ این آزمایش نشان داده شده است.



شکل۸–۵ ضریب سختی برینل

یک کُره به قطر D در اثر نیروی F بر حسب کیلوگرم قرار می‌گیرد. مقدار h ارتفاع دندانه است و d قطر دندانه می‌باشد.

$$BHN = \frac{F}{\pi \times D \times h} = \frac{2F}{\pi D\left(D - \sqrt{D^2 - d^2}\right)}$$

۸–۳ منحنی تنش–کرنش

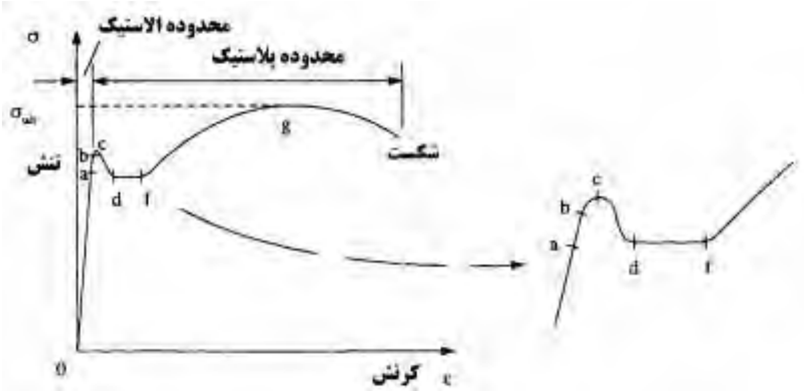
تا اینجا ما مشخصات اساسی مواد و آزمایشات مختلف بر روی آنها را مورد بررسی قرار دادیم. در ادامه سعی بر آن است تا مشخصه‌های اصلی در منحنی‌های رفتاری مصالح شامل ارتباط بین تنش و کرنش ارائه گردد.

[1] Hardness tests
[2] Cold forming
[3] Brinell Hardness Number

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

آهن کم کربن (فولاد نرمه)

در شکل ۸-۶ یک نمونه از منحنی‌های تنش – کرنش برای فولاد نرمه نشان داده شده است.



شکل۸-۶ نمودار تنش کرنش برای فولاد نرمه

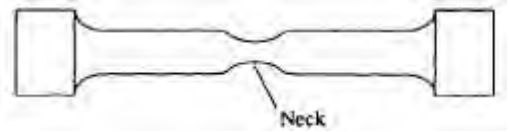
این منحنی از *0* تا *a* به صورت خطی تغییر می‌کند و در این محدوده قانون هوک صادق است. آنسوی نقطه *a* حد تناسب شروع می‌شود. از نقطه *a* تا *b* منحنی دیگر خطی نیست ولی با باربرداری هیچ تنش پسماندی باقی نمی‌ماند و قطعه به نقطه ابتدای خود بر می‌گردد. به عبارت دیگر در صورتی که تا نقطه *b* پیش رفتیم و بار را از روی قطعه برداشتیم منحنی باز بر روی نقطه صفر بر می‌گردد. از نقطه *0* تا *b* حد ارتجاعی مواد گفته می‌شود. در صورتی بارگذاری بیش از اندازه شود و از نقطه *b* عبور کنیم در نقطه *c* به حد تسلیم[1] می‌رسیم. از نقطه *c* تا *d* بدون افزایش تنش مقدار قابل ملاحظه‌ای کرنش داریم که باعث کش آمدن قطعه می‌شود. در نقطه *f* قطعه کمی سخت می‌شود ولی شیب این قسمت خیلی کمتر از شیب نقطه شروع بارگذاری است. در نهایت منحنی به حد خود در تنش نهایی[2] σ_{ult} می‌رسد.

در بارگذاری کششی قطر نمونه رو به کاهش می‌گذارد، قطعه مانند شکل ۸-۷ نازک شده و بعد از این حد مقاومت خود را به شدت از دست می‌دهد تا جایی که در نهایت می‌شکند. برای فولاد نرمه حد تسلیم حدوداً در تنش $300N/mm^2$ اتفاق می‌افتد همچنین در هنگام

[1] Yield point
[2] Ultimate stress

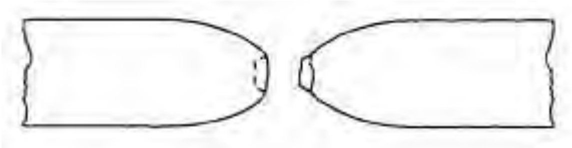
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

شکست نمونه مقدار کرنش حدوداً 30% است. مقدار مدول الاستیسیته برای فولاد نرمه حدوداً برابر $200000N/mm^2$ می‌باشد.



شکل۸-۷ گردنی شدن نمونه در آزمایش کشش

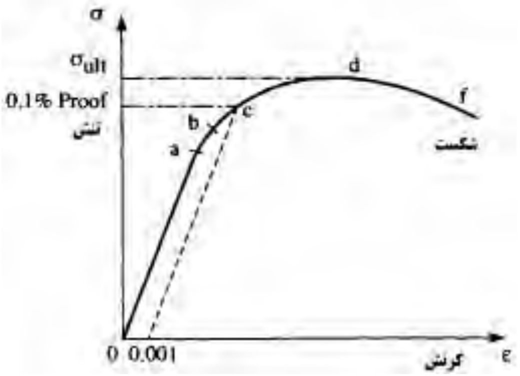
مواد شکل‌پذیر وقتی تحت نیروی کششی محوری قرار می‌گیرند در هنگام گسیختگی مانند شکل۸-۸ با زاویه ۴۵درجه گسیخته می‌شوند.



شکل۸-۸ گسیختگی آلومینیوم

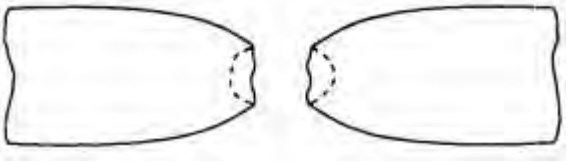
آلومینیوم

آلومینیوم مانند بسیاری از آلیاژها از جمله مواد شکل پذیر بوده و دارای نقطه تسلیم مشخصی می‌باشد. در شکل ۸-۱۲ منحنی تنش – کرنش آلومینیوم نشان داده شده است. در این شکل نقاط a (محدوده خطی) و b (حدتناسب) نشان داده شده‌اند. مواد شکل پذیر مانند آلومینیوم وقتی تحت کوپل پیچشی قرار گیرند در هنگام گسیختگی مانند شکل۸-۱۰ تحت یک زاویه قائم گسیخته می‌شود.



شکل۸-۹ منحنی تنش- کرنش آلومینیوم

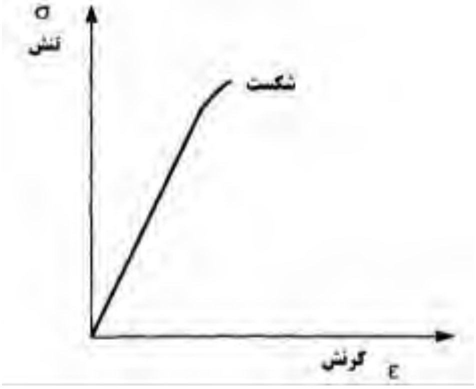
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۸-۱۰ گسختگی تحت کوپل پیچشی

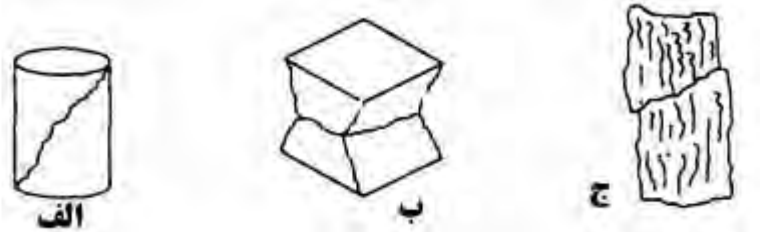
مواد ترد و شکننده

این مواد شامل چدن، فولاد با مقاومت بالا، بتن، آجرهای سفالی، شیشه و غیر می‌باشند. این مواد دارای قسمت پلاستیک کوچکی بر روی منحنی تنش کرنش هستند. در شکل۸-۱۱ دیاگرام تنش – کرنش برای یک ماده شکننده به صورت نمونه ارائه شده است.



شکل۸-۱۱ منحنی تنش- کرنش یک ماده ترد

دیده می‌شود که ماده قادر به تحمل مقدار زیادی کرنش نیست.



شکل۸-۱۲ گسیختگی در مصالح ترد

در شکل ۸-۱۵الف یک نمونه چدنی نشان داده شده است که گسیختگی آن تحت یک زاویه ۴۵درجه اتفاق افتاده است. شکل ۸-۱۲ب یک نمونه بتنی مکعبی[1] را نشان می‌دهد که

[1] Concrete cube

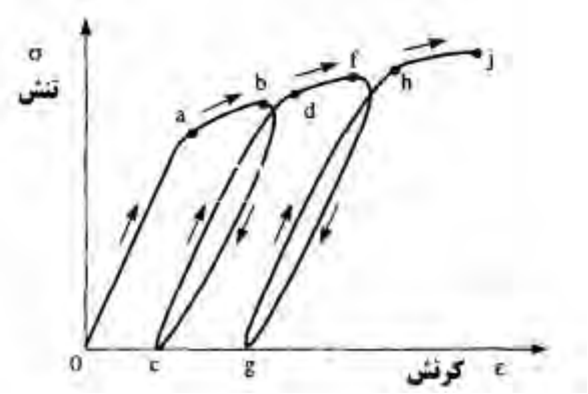
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

گسیختگی آن نیز تحت زاویه ٤۵ به سمت لبه‌ها پیشروی دارد. شکل۸-۱۲ج نیز چوبی را نشان می‌دهد که گسیختگی آن نیز مانند دیگر مواد ترد اتفاق افتاده است.

۸-٤ کرنش سختی

منحنی تنش کرنش تحت تاثیر تاریخچه کرنش است و یا به عبارتی بارگذاری و باربرداری از روی مواد می‌تواند بر روی مشخصات آنها موثر باشد.



شکل۸-۱۳سخت شدگی مصالح

در شکل۸-۱۳ منحنی رفتاری یک ماده تحت بارگذاری و باربرداری‌های مجدد نشان داده شده است. از نقطه b تا c باربرداری انجام شده است و باز از نقطه c تا d بارگذاری انجام شده است. دیده می‌شود که در هر مرحله منحنی کمی به سمت بالا منتقل شده است. به این عمل سخت شدگی کرنشی[1] گویند.

[1] Strain hardening

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

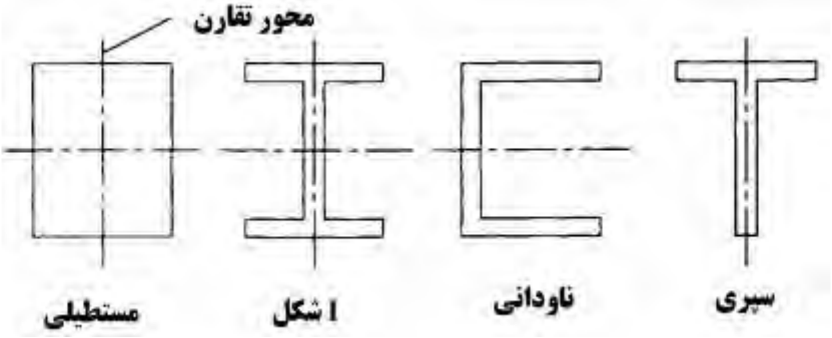
فصل نهم
خمش[1] در تیرها

در این فصل تنش‌ها و کرنش‌های موجود در یک تیر منشوری که در دو انتهای خود تحت تاثیر دو لنگر خمشی، مساوی، مختلف الجهت و هم صفحه قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که تیر نسبت به صفحه لنگرهای خمشی متقارن باشد. چون یک تیر در حالت کلی دارای تعادل است پس هر مقطعی از آن نیز دارای تعادل است. برای تعادل هر قسمت، بایستی نیروهایی در سطح قطع شده وجود داشته باشند که به آنها نیروهای مقاوم داخلی می‌گویند. در نتیجه نیروهای خارجی موثر در یک طرف هر مقطع دلخواه، با نیروهای به وجود آمده در سطح قطع شده (نیروهای محوری P و نیروی برشی V و لنگر خمشی M) برابر میگردد. در حالتی که بر یک تیر دو سر ساده، دو نیروی متمرکز با مقدار برابر اعمال شود، در فاصله مابین دو نیرو، لنگر خمشی خالص[2] خواهد داشت و برش برابر صفر می‌باشد.

۹-۱ خمش متقارن[3]

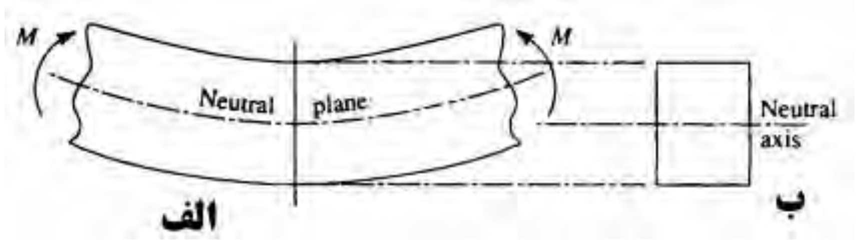
خمش متقارن یک حالت ویژه[4] در طراحی تیرهای تحت خمش می‌باشد. خمش متقارن در تیرهای تکی و یا دوبل که دارای یک و یا دو محور تقارن باشند اتفاق می‌افتد. شکل۹-۱ نمونه‌ای از سطح مقطع[5] چند تیر می‌تواند در آنها خمش متقارن بوجود آید را نشان می‌دهد.

---
[1] Bending
[2] Pure bending
[3] Symmetrical
[4] Special case
[5] Cross-sections



شکل۹-۱تیرهای متقارن

در تیرها فرض می‌شود که لنگر اعمال شده در صفحه قائم مانند شکل۹-۲ اعمال می‌شود. در صورتی لنگر اعمال شده و یا بارهای اعمال شده به تیر به صورتی باشد که باعث شود تیر مانند شکل۹-۲الف خمیده شود به راحتی می‌توان احساس کرد که تارهای بالایی تیر تمایل به کوتاه شدن دارند و یا به عبارتی تارهای بالایی تیر فشرده می‌شوند.



شکل۹-۲ تیر تحت خمش خالص

در این حالت تارهای پایینی تیر تمایل به باز شدن دارند و به عبارت دیگر تارهای پایینی تیر کشیده می‌شوند. تاری که مقدار تنش در آن برابر صفر است، به عنوان تار خنثی[1] تیر شناخته می‌شود. این تار برای مقطع مربع مستطیل در شکل۹-۲ب نشان داده شده است.

فرضیات

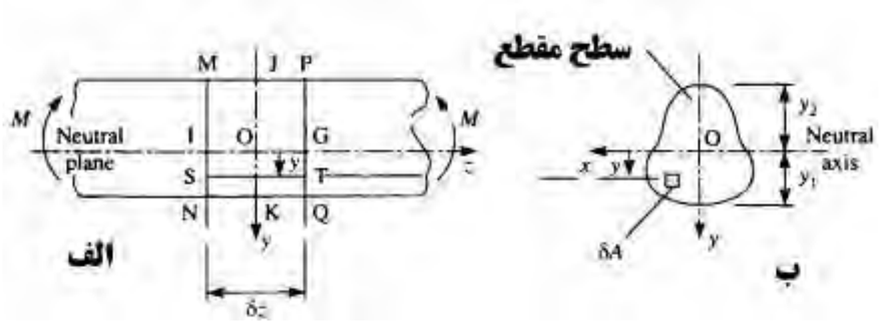
یکی از فرضیات مهم در تعیین روابط خمش در تیرها این است که مقطع تیر بعد از خمش به صورت مستوی باقی می‌ماند. همچنین در اینجا فرض می‌کنیم که مصالح تشکیل دهنده تیر به صورت ارتجاعی و خطی[2] هستند و قانون هوک در مورد آنها صادق است و مصالح

[1] Neutral axis
[2] Linearly

تشکیل دهنده آنها همگن می‌باشند. فعلاً در مورد تیرهای مرکب بحث نمی‌کنیم. در مورد این تیرها در فصل۱۲ بیشتر بحث خواهد شد.

توزیع تنش مستقیم

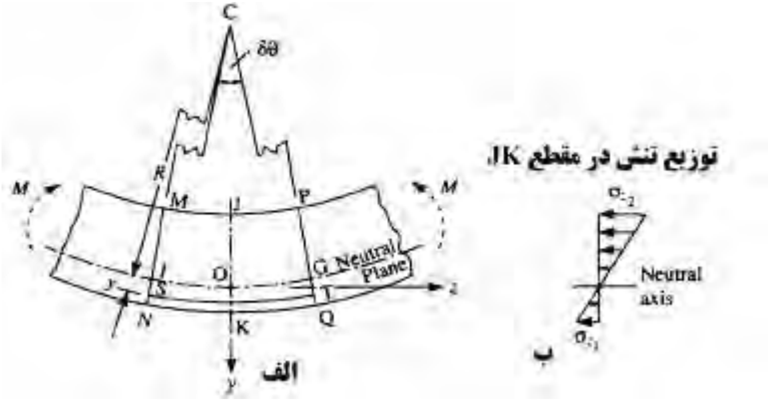
تیر نشان داده شده در شکل۹-۳الف را در نظر بگیرید که تحت خمش خالص M در صفحه قرار دارد. مقطع تیر که دارای محور تقارن می‌باشد در شکل۹-۳ب نشان داده شده است. مختصات نقاط روی تیر توسط دستگاه مختصات $Oxyz$ تعریف شده است. نقطه O نقطه‌ای است که محور خنثی مقطع از آن عبور می‌کند. دورترین تارهای مقطع y_1 و y_2 از تار خنثی می‌باشند که در شکل نشان داده شده‌اند. در اینجا ما قصد داریم تا رفتار یک مقطع کوچک از تیر مانند المان δz را بررسی کنیم. این المان توسط مقطع‌های MIN و PGQ مطابق شکل۹-۳الف حاصل شده است. همچنین در این شکل دیده می‌شود که تا ST به فاصله y از محور خنثی و از جزء سطح δA عبور می‌کند.



شکل۹-۳ خمش در تیر متقارن

به وضوح روشن است که قبل از اینکه خمشی اتفاق بیفتد طول‌های MP , IG , ST , NQ برابر می‌باشد.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۹-٤ خیز در تیر متقارن تحت خمش خالص

با توجه به شکل۹-٤الف دیده می‌شود که وقتی خمش اتفاق افتد شکل تیر به صورت منحنی در می‌آید و نقطه C مرکز این منحنی خواهد بود. شعاع این منحنی با توجه به شکل برابر با R خواهد بود. صفحه‌های MIN و PGQ که تا قبل از خمش به صورت کاملاً موازی قرار داشتند اینک با زاویه $\delta\theta$ نسبت به یکدیگر قرار دارند. طول MP کوچکتر از مقدار δz می‌باشد در حالی که NQ و ST طول‌شان بیشتر شده است. طول IG که در محل تار خنثی قرار گرفته است تغییری نکرده و برابر δz است. با توجه به شکل۹-٤الف دیده می‌شود که اضافه طول ST برابر است با:

$$(R+y)\delta\theta-\delta z \quad \text{یا} \quad (R+y)\delta\theta-R\delta\theta$$

از آنجایی که $\delta z = IG = R\delta\theta$ پس:

$$\varepsilon=\frac{(R+y)\delta\theta-R\delta\theta}{R\delta\theta}=\frac{y}{R} \qquad (۹-۱)$$

اگر فرض نماییم که مواد تشکیل دهنده تیر از قانون هوک پیروی می‌کنند، مقدار تنش در تار ST با توجه رابطه۷-۷ برابر است با:

$$\sigma_z = E\frac{y}{R} \qquad (۹-۲)$$

مقدار نیروی نرمال در تار ST برابر است با $\sigma_z\delta A$ اما به هرحال کل نیرو را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\int_A \sigma_z dA = 0 \qquad (۹-۳)$$

با جایگذاری مقدار σ_z در معادله ۹-۳ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\frac{E}{R}\int_A ydA = 0 \qquad (۹-٤)$$

مقادیر E و R برای تیر ثابت هستند و از انتگرال خارج شده‌اند.

$$\int_A ydA = 0 \qquad (۹-٥)$$

معادله۹-٥ بیانگر گشتاور اول سطح تیر نسبت به تار خنثی آن می‌باشد. بنابراین دیده می‌شود که تار خنثی از مرکز سطح مقطع عبور می‌کند. بنابراین O مرکز سطح مقطع تیر می‌باشد. لنگر ایجاد شده حول محور خنثی تیر باعث ایجاد نیروی نرمالی به اندازه $\sigma_z \delta A$ می‌شود و این نیروی نرمال در تار ST باعث ایجاد نیرویی به اندازه $\sigma_z y \delta A$ خواهد شد. مقدار لنگر موجود در مقطع با جمع کل نیروها در فاصله آنها از تار خنثی بدست می‌آید:

$$M = \int_A \sigma_z ydA$$

با جایگذاری σ_z از معادله ۹-۲ داریم

$$M = \frac{E}{R}\int_A y^2 dA = 0 \qquad (۹-٦)$$

جمله $\int_A y^2 dA$ گشتاور دوم سطح خوانده می‌شود که با حرف I نشان داده می‌شود. با بازنویسی رابطه۹-٦ داریم:

$$M = \frac{EI}{R} \qquad (۹-٧)$$

با ترکیب این معادله با رابطه ۹-۲ داریم:

$$\frac{M}{I} = \frac{E}{R} = \frac{\sigma_z}{y} \qquad (۹-٨)$$

از معادله ۹-۸ دیده می‌شود که

$$\sigma_z = \frac{My}{I} \qquad (۹-۹)$$

رابطه۹-۹ مقدار تنش ناشی از خمش خالص را در یک تیر که به فاصله y از تار خنثی قرار دارد بیان می‌کند. دیده می‌شود که در این رابطه مقدار تنش نرمال به صورت خطی نسبت به تارخنثی تغییر می‌کند. بنابراین در صورتی که در یک تیر ما بخواهیم بحرانی‌ترین حالت ممکن را در نظر بگیریم باید در رابطه ۹-۹ برای y مقدار دورترین تارها را قرار دهیم. به عنوان مثال در شکل۹-٤ب مقادیر حداکثر تنش‌های ایجاد شده برابر است با:

$$\sigma_{z,1}=\frac{My_1}{I}$$ کششی $$\sigma_{z,2}=\frac{My_2}{I}$$ فشاری (۹-۱۰)

همچنین با توجه به رابطه ۹-۷ مقدار انحناء تیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\frac{1}{R}=\frac{M}{EI} \qquad (۹-۱۱)$$

مدول الاستیک مقطع

معادله ۹-۱۰ ممکن است به صورت زیر بازنویسی شود:

$$\sigma_{z,1}=\frac{M}{Z_{e,1}} \qquad \sigma_{z,2}=\frac{M}{Z_{e,2}} \qquad (۹-۱۲)$$

که در آن $Z_{e,1}=I/y_1$ و $Z_{e,2}=I/y_2$ هستند و به عنوان اساس مقطع شناخته می‌شوند. در یک تیر با مقطع متقارن نسبت به محور x خواهیم داشت که $y_1=y_2$ و $Z_{e,1}=Z_{e,2}$ و لذا:

$$\sigma_{z,1}=\sigma_{z,1}=\frac{M}{Z_e} \qquad (۹-۱۳)$$

در صورتی که مقدار تنش موجود در تیر را به این صورت نمایش دهیم، در طراحی خیلی ساده‌تر می‌توان از آن استفاده نمود. به عنوان مثال در صورتی که مقدار تنش مجاز تیر را داشته باشیم می‌توانیم به سادگی یک اساس مقطع حداقل را برای تیر در نظر بگیریم. به طوری که مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در آن تیر از مقدار مجاز بیشتر نشود.

مثال۹-۱) یک تیر ساده دو سر مفصل به طول ٦متر یک بار گسترده خطی به شدت *10kN/m* را حمل می‌کند. مقدار تنش مجاز قابل حمل توسط این تیر برابر *155N/mm²* می‌باشد. برای این تیر یک مقطع مناسب تعیین نمایید.

حل) با توجه به شکل۳-۱۵د دیده می‌شود که در یک تیر دو سر مفصل ساده به طول L که یک بار گسترده یکنواخت را حمل می‌کند، مقدار حداکثر لنگر یه صورت زیر بدست می‌آید

$$M_{\max}=\frac{wL^2}{8}$$

بنابراین در این حالت با جایگذاری مقادیر شدت بار و طول تیر داریم:

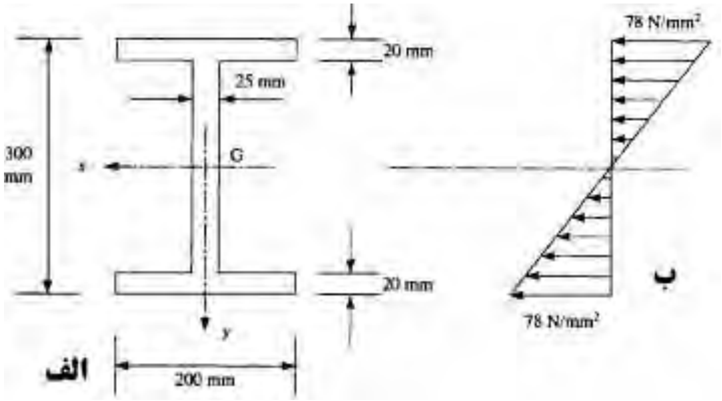
$$M_{\max} = \frac{10 \times 6^2}{8} = 45kN.m$$

با توجه به رابطه ۹-۱۳ مقدار اساس مقطع برابر خواهد بود با:

$$Z_{e,\max} = \frac{M_{\max}}{\sigma_{z,\max}} = \frac{45 \times 10^6}{155} = 290323mm^3$$

با مراجعه به جدول مقاطع استاندارد و با جستجو در بین مقاطع موجود در آن، پروفیل *IPE220* که دارای اساس مقطع $252000mm^3$ است انتخاب می‌شود. البته باید متذکر شویم که تیر فوق تنها برای عامل خمش طراحی شد و بایستی برای برش کنترل گردد که در فصل بعد به آن اشاره می‌شود.

مثال۹-۲) تیری با مقطع نشان داده شده در شکل۹-۵الف تحت لنگر *100kN.m* قرار دارد. توزیع تنش در مقطع تیر را تعیین کنید.



شکل۹-۵ توزیع تنش در تیر مثال۹-۲

حل) مقطع تیر دارای دو محور تقارن بوده و نقطه G مرکز سطح تیر می‌باشد که محور x از آن می‌گذرد. در گام نخست باید لنگر دوم سطح برای مقطع محاسبه شود:

$$I_x = \frac{200 \times 300^6}{12} - \frac{175 \times 260^6}{12} = 193.7 \times 10^6 mm^4$$

با استفاده از رابطه ۹-۹ توزیع تنش در مقطع تیر بدست می‌آید.

$$\sigma_z = \frac{100 \times 10^6}{193.7 \times 10^6} y = 0.52y$$

با جایگذاری مقادیر مختلف برای y می‌توان تنش‌ها را در نقاط مختلف بدست آورد. مقدار تنش حداکثر در تیر برابر است با:

$$0.52\times(-150)=-78N/mm^2 \quad \text{فشاری}$$

$$0.52\times(+150)=+78N/mm^2 \quad \text{کششی}$$

مثال۹-۳) در مثال ۹-۲توزیع تنش در تیر را در حالتی که لنگر خمشی در صفحه افقی و به صورت ساعتگرد اعمال می‌شود، بدست آورید:

حل) در این حالت تیر حول محور قائم تحت خمش قرار می‌گیرد.

$$\sigma_z=\frac{M}{I_y}x$$

که در آن I_y گشتاور دوم سطح نسبت به محور y است. دوباره با استفاده از بخش۹-۶ داریم:

$$I_y=2\times\frac{20\times200^3}{12}+\frac{260\times25^3}{12}=27.0\times10^6mm^4$$

با جانشانی M وI_y داریم:

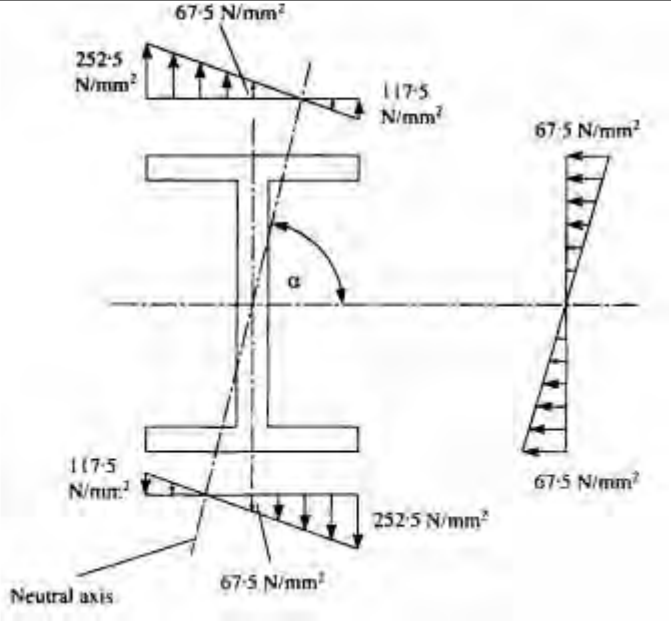
$$\sigma_z=\frac{100\times10^6}{27.0\times10^6}x=3.7x$$

با جایگذاری مقادیر مختلف برای x می‌توان تنش‌ها را در نقاط مختلف بدست آورد. مقدار تنش حداکثر در تیر برابر است با:

$$3.7\times(-100)=-370N/mm^2 \quad \text{فشاری}$$

$$3.7\times(+100)=+370N/mm^2 \quad \text{کششی}$$

مثال۹-٤) تیر مثال۹-۲ تحت یک لنگر خمشی حول محور طولی خود به مقدار *100kN.m* قرار گرفته است به طوری که محور خمش به اندازه ۳۰ درجه مانند شکل۹-٦ با محور قائم تیر فاصله دارد. توزیع تنش در تیر را تعیین کنید.



شکل۹-٦ توزیع تنش در تیر مثال۹-٤

در این حالت لنگر اعمال شده را می‌توان به دو مولفه M_x حول محور x و M_y حول محور yها در نظر گرفت و برای هر کدام روابط را بازنویسی نمود.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad \text{و} \quad \sigma_z = \frac{M_y}{I_y} x$$

برای بدست آوردن برآیند تنش‌های حاصله می‌توان تنش‌های بدست آمده از هر یک از روابط فوق را به صورت زیر با هم ترکیب کرد.

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x$$

$$M_x = 100 \cos 30^\circ = 86.6 kN.m$$

$$M_y = 100 \sin 30^\circ = 50.0 kN.m$$

با جایگذاری مقادیر M_x و M_y از رابطه اخیر و همچنین مقادیر I_x و I_y داریم:

$$\sigma_z = -\frac{86.6 \times 10^6}{193.7 \times 10^6} y + \frac{50.0 \times 10^6}{27.0 \times 10^6} x$$

$$\sigma_z = -0.45 y + 1.85 x$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

معادله اخیر مقدار تنش نرمال در هر نقطه از مقطع تیر را بدست می‌دهد. به عنوان مثال در نقطه بالا و سمت چپ تیر، بر روی بال مقطع:

$$\sigma_z = -0.45\times(-150)+1.85(+100)=252.5\frac{N}{mm^2}$$ کششی

در نقطه بالا و سمت راست تیر، بر روی بال مقطع:

$$\sigma_z = -0.45\times(-150)+1.85(-100)=-117.5\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

برای پیدا کردن محور تقارن کافی است که مقدار تنش را برابر صفر قرار دهیم و معادله بدست آمده، معادله محور خنثی می‌باشد.

$$0=-0.45y+1.85x$$

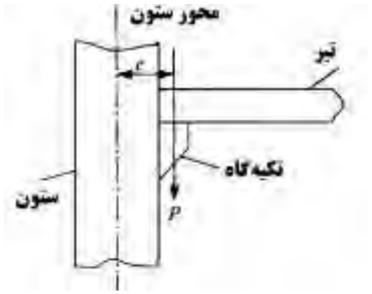
$$\frac{y}{x}=\frac{1.85}{0.45}=4.11=\tan\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha=76.3^\circ$$

توجه شود که مقدار زاویه را می‌توان با صفر قرار دادن مقدار تنش نرمال بدست آورد

$$\frac{y}{x}=-\frac{M_y I_x}{M_x I_y}=\tan\alpha \qquad (۱٤-۹)$$

۹-۲ ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی

در بعضی از اجزاء سازه‌ای مانند بعضی از تیرها و در اکثر ستونها ممکن است علاوه بر خمش موجود، مقداری هم نیروی محوری وجود داشته باشد. نیروهای محوری نیز خود در تولید تنش‌های نرمال نقش دارند. به عنوان مثال در شکل ۹-۷ تیر متصل شده به ستون از طریق یک تکیه‌گاه نیروهای موجود را به ستون منتقل می‌کند.

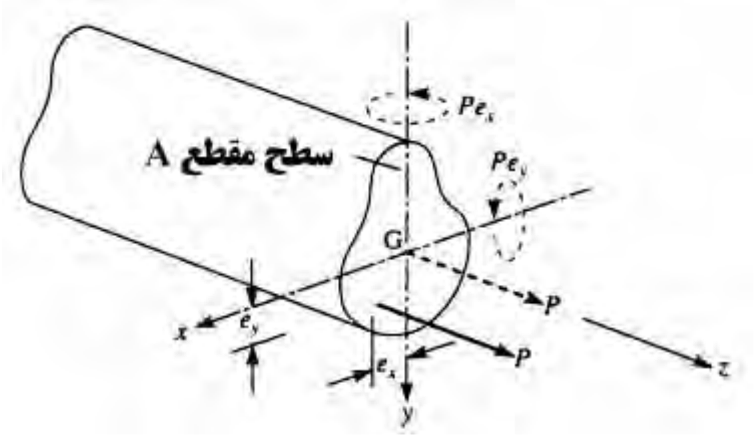


شکل۹-۷ ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی در ستون

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در صورتی که نیروی موجود در تیر برابر P باشد دیده می‌شود که این نیروی P با خروج از مرکزیت e نسبت به محور طولی ستون اعمال می‌شود. این خروج از مرکزیت باعث ایجاد یک لنگر مضاعف به اندزه Pa در ستون می‌شود.

حال با ملاحظه تیر شکل ۹-۸ دیده می‌شود که نیروی محوری P با خروج از مرکزیت e_x و e_y نسبت به مرکز سطح تیر اعمال می‌شود.



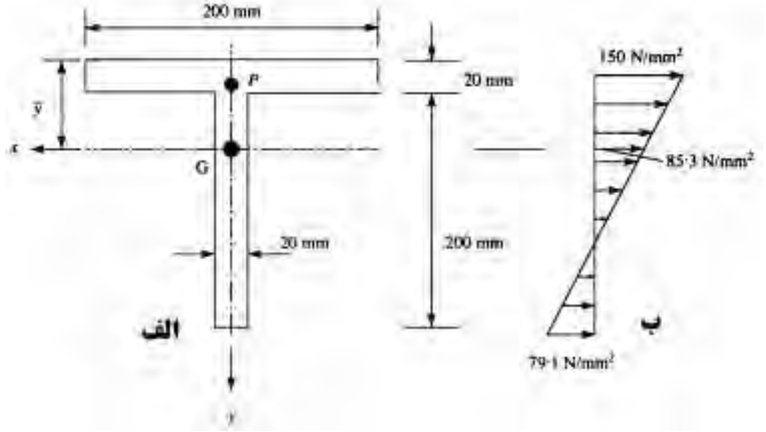
شکل۹-۸ ترکیب نیروی محوری و لنگر خمشی در تیر

در صورتی که نیروی P را به مرکز سطح تیر منتقل کنیم، این نیرو محوری باعث تولید دو لنگر خمشی حول محورهای y و x به اندازه Pe_x و Pe_y خواهد شد. با استفاده از روابط ۷-۱ و ۹-۹ مقدار تنش نرمال در تیر بصورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{P \times e_y}{I_y} y + \frac{P \times e_x}{I_x} x \qquad (۹-۱۵)$$

رابطه۹-۱۵ مقدار تنش نرمال در هر نقطه‌ای از مقطع تیر را برای هر حالت خاص اعمال نیرو بیان می‌کند.

مثال۹-۵) تیر نشان داده شده با مقطع شکل۹-۹الف را در نظر بگیرید که نیروی محوری P با خروج از مرکزیتی نسبت به مرکز سطح تیر بر آن اعمال می‌شود. مقدار حداکثر نیروی P را در صورتی که تنش مجاز قابل تحمل تیر برابر $\pm 150\,N/mm^2$ باشد را حساب کنید.



شکل۹-۹ توزیع تنش در تیر مثال۹-۵

حل) گام نخست در حل این مسئله تعیین محل مرکز سطح مقطع می‌باشد:

$$(200\times 20+200\times 20)\bar{y}=200\times 10+200\times 20\times 120 \Rightarrow \bar{y}=65mm$$

لنگر دوم سطح با استفاده از مفاهیم ارائه شده در بخش ۹-٦ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$I_x=\frac{200\times 65^3}{3}-\frac{180\times 45^3}{3}+\frac{20\times 155^3}{3}=37.7\times 10^6 mm^4$$

با توجه به اینکه، نیروی محوری اعمال شده نسبت به محور y خروج از مرکزیتی ندارد، بنابراین مقدار e_x در رابطه ۵-۱۵ برابر صفر است.

$$\sigma_z=\frac{P}{A}+\frac{P\times e_y}{I_y}y$$

همچنین e_y=-55mm بنابراین Pe_y=-55P، با جایگذاری در رابطه داریم:

$$\sigma_z=P\left(\frac{1}{8000}-\frac{55}{37.7\times 10^6}y\right)$$

$$\sigma_z=P\left(1.25\times 10^{-4}-1.46\times 10^{-6}y\right)$$

با قرار دادن دورترین تار در بالای مقطع میزان نیروی P به صورت زیر بدست می‌آید:

$$+150=P\left(1.25\times 10^{-4}-1.46\times 10^{-6}\times(-65)\right)$$

با حل این معادله مقدار $P=682kN$ بدست می‌آید. حال فاصله دورترین تار در پایین مقطع از تار خنثی در معادله گذاشته می‌شود:

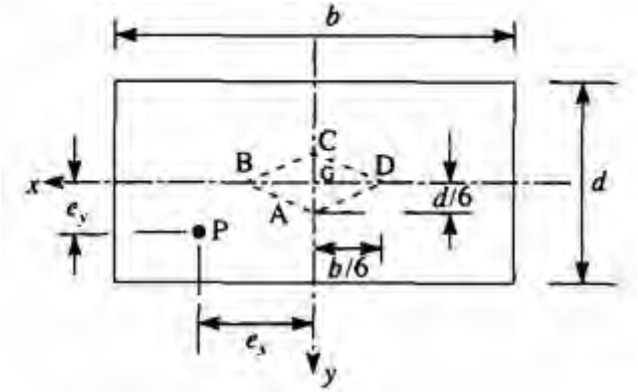
$$P\left(1.25\times 10^{-4}-1.46\times 10^{-6}\times(+155)\right)=-1.01\times 10^{-4}P$$

$$-150 = -1.01\times10^{-4} P \quad \Rightarrow \quad P = 1485\,kN$$

بنابراین حداکثر مقدار $P=682kN$ خواهد بود.

هسته مقطع مربع مستطیل

گاهی بعضی از اعضا از مواد ترد و شکننده مانند آجر ساخته می‌شوند که قادر به تحمل کشش قابل توجهی نیستند و فقط می‌توانند نیروهای فشاری را تحمل کنند. در حالی که اگر بار محوری موجود بر روی آنها دارای خروج از مرکزیت بیش از اندازه شود، ممکن است باعث تولید کشش در بعضی از نقاط آن شود.



شکل۹-۱۰ هسته مقطع مستطیلی

شکل۹-۱۰ را در نظر بگیرید که تحت یک نیروی فشاری P با خروج از مرکزیت قرار گرفته است. می‌خواهیم محدوده‌ای را که نیروی P می‌تواند بر روی مقطع اعمال شود به طوری که هیچ کششی در آن ایجاد نشود تعیین نماییم.

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{P\times e_y}{I_x} y + \frac{P\times e_x}{I_y} x \qquad (۹-۱۶)$$

با توجه به شکل در حالتی که نیروی P با x و y منفی اعمال می‌شود؛ خواهیم داشت.

$$\left|\frac{P\times e_y}{I_x} y + \frac{P\times e_x}{I_y} x\right| > \left|\frac{P}{A}\right|$$

برای آنکه بر روی مقطع تنها تنش فشاری موجود باشد، باید در بدترین حالت مقدار تنش در مقطع صفر باشد. به عبارت دیگر در گوشه‌های مقطع و در $x=-b/2$ و $y=-d/2$ مقدار تنش صفر باشد. با جایگذاری حدود در رابطه ۹-۱۶ داریم:

$$0=-\frac{P}{A}-\frac{P\times e_y}{I_x}\left(-\frac{d}{2}\right)+\frac{P\times e_x}{I_y}\left(-\frac{b}{2}\right)$$

با توجه به اینکه $A=bd$ و $I_x=\frac{bd^3}{12}$ و $I_y=\frac{bd^3}{12}$ داریم:

$$be_y+de_x=\frac{bd}{6}$$

با بازنویسی داریم:

$$e_y=-\frac{d}{b}e_x+\frac{d}{6} \qquad (۹-۱۷)$$

رابطه ۹-۱۷ معادله خط AB را در شکل ۹-۱۰ نشان می‌دهد که این خط حدی برای خروج از مرکزیت[1] محل اعمال نیروی P است. نیروی P بایستی داخل این محدوده[2] اعمال شود. چون مقطع دو محور تقارن دارد، می‌توان برای آن سمت مقطع نیز همین خطوط را توسط مناطق GBC و GCD و GDA تصور نمود. لوزی $ABCD$ هسته مقطع[3] را تشکیل می‌دهد و قطر آن $BD=b/3$ و $AC=d/3$ می‌باشند.

هسته مقطع دایره‌ای

نیروی اعمال شده بر روی یک مقطع دایره‌ای همیشه بر روی یکی از قطرهای آن اعمال شده و محوری که حول آن خمش صورت می‌گیرید، عمود بر آن قطر است. در شکل۹-۱۱ فرض کنید که نیروی P به صورت فشاری بر روی یک مقطع دایره‌ای اعمال شده است.

مقدار تنش نرمال در این مقطع با توجه به اینکه مقدار $e_y=0$ است با توجه به رابطه ۹-۱۵ به صورت زیر تعیین می‌شود:

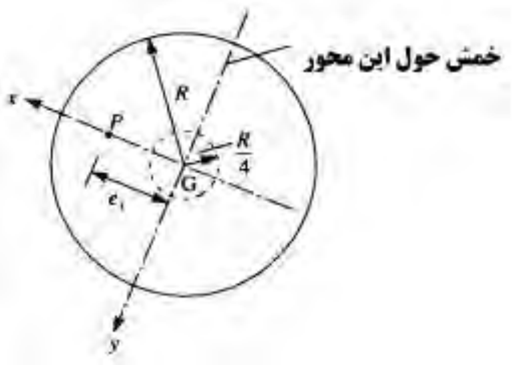
$$\sigma_z=-\frac{P}{A}-\frac{P\times e_x}{I_y}x \qquad (۹-۱۸)$$

کشش در ناحیه‌ای که x منفی است رخ می‌دهد.

$$0=-\frac{P}{A}-\frac{P\times e_x}{I_y}(-R)$$

[1] Eccentricity
[2] Region
[3] Core of the section

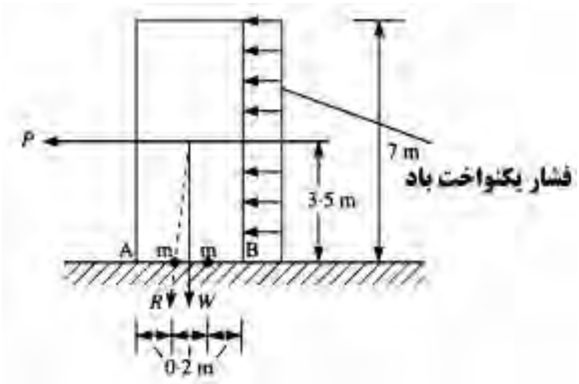
با توجه به اینکه $A=\pi R^2$ و $I_y=\dfrac{\pi R^4}{4}$ بنابراین:



شکل۹-۱۱ هسته مقطع دایره

$$0=-\frac{1}{\pi R^2}+\frac{4e_x}{\pi R^3}\quad\Rightarrow\quad e_x=\frac{R}{4}$$

مثال۹-۶) دیوار نشان داده شده در شکل ۹-۱۲ با مصالح بنایی ساخته شده است. این دیوار دارای ارتفاع ۷ متر و ضخامت ۶۰ سانتیمتر است. همچنین چگالی این دیوار برابر *$2000kg/m^3$* است. مقدار حداکثر فشار بادی که می‌تواند به این دیوار اعمال شود بدون آن که در آن کشش ایجاد کند را محاسبه نمایید.



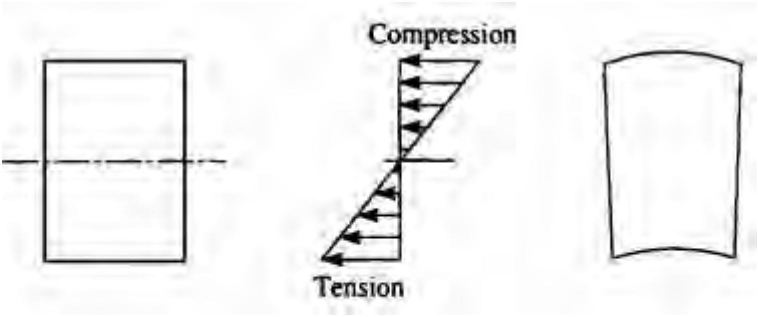
شکل۹-۱۲ دیوار با مصالح بنایی مثال۹-۶

حل) یک متر طول دیوار را در نظر می‌گیریم. فشار یکنواخت باد برابر p و وزن دیوار برابر W در نظر گرفته می‌شود. به وضوح روشن است که باید وزن دیوار بیشتر از نیروی کششی ایجاد شده در اثر بار باد باشد.

$$3.5P = 0.1W$$
$$P = p \times 7 \times 1N$$
$$W = 2000 \times 9.81 \times 0.6 \times 7$$
$$p = 336.3 \frac{N}{m^2}$$

۹-۳ خمش محدب

دیده شد که در هنگام خمش قسمتی از مقطع تیر تحت کشش و قسمتی دیگر تحت فشار قرار می‌گیرد. وجود تنش‌های فشاری و کششی در مقطع باعث تغییر شکل هندسی مقطع می‌گردد. همانطور که قبلاً بیان شد وجود اثر پواسون باعث تغییر ابعاد تیر می‌شوند.



شکل۹-۱۳ تیر تحت خمش

تیر شکل۹-۱۳ را در نظر بگیرید. جهت اعمال بار بصورتی بوده که در تارهای بالایی مقطع فشار و در تارهای پایینی آن کشش داریم. همانطور که دیده می‌شود در تارهای کششی به علت وجود اثر پواسون این تارها کوچکتر شده‌اند و تارهای فشاری بزرگتر شده‌اند.

۹-٤ انرژی کرنشی در خمش

در شکل۹-٤الف دیده می‌شود که لنگر خمشی مثبت اعمال شده به تیر باعث ایجاد فشار در تارهای بالایی و کشش در تارهای پایینی شده است. فرض می‌کنیم که نحوه اعمال لنگر بر این مقطع به صورت تدریجی بوده است.

$$R\delta\theta = \delta z$$

با جانشانی در رابطه ۹-۷ برای R داریم:

$$M = \frac{EI_x}{\delta z}\delta\theta \qquad (۹-۱۹)$$

دیده می‌شود که $\delta\theta$ تابع خطی از M است. کار انجام شده توسط اعمال لنگر M برابر است با $M\delta\theta/2$ و انرژی کرنشی برای یک المان از تیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta U = \frac{1}{2}M\delta\theta \qquad (۹-۲۰)$$

با جایگذاری $\delta\theta$ از معادله ۹-۱۹ در رابطه ۹-۲۰ داریم:

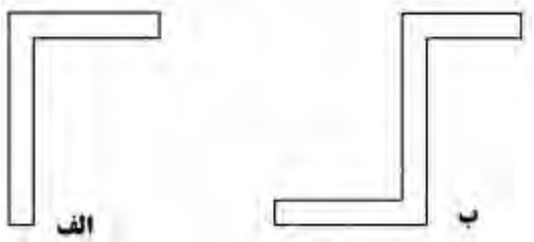
$$\delta U = \frac{1}{2}\frac{M}{EI_x}\delta z$$

مقدار انرژی کرنشی کل ایجاد شده از جمع مقدار مربوط به تمام المان‌ها حاصل می‌شود.

$$U = \int_L \frac{M^2}{2EI_x}dz \qquad (۹-۲۱)$$

۹-۵ خمش نامتقارن[1]

گاهی اوقات تیرهای مورد استفاده در کارهای مهندسی بصورتی هستند که هیچ محور متقارنی ندارند. به عنوان مثال در شکل ۹-۱٤ دو مقطع فاقد محور تقارن نشان داده شده است.



شکل۹-۱٤ مقطع بدون محور تقارن

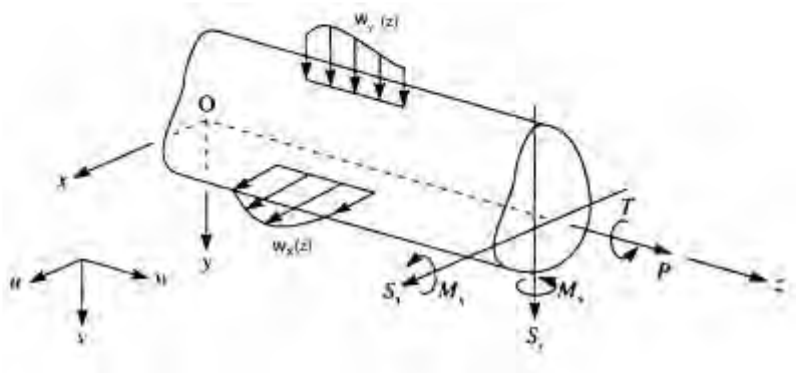
فرضیات[2]

در این حالت نیز فرض می‌نماییم که مقطع بعد از خمش مستوی باقی می‌ماند. همچنین فرض می‌کنیم که ماده تشکیل دهنده مقطع همگن و الاستیک خطی است.

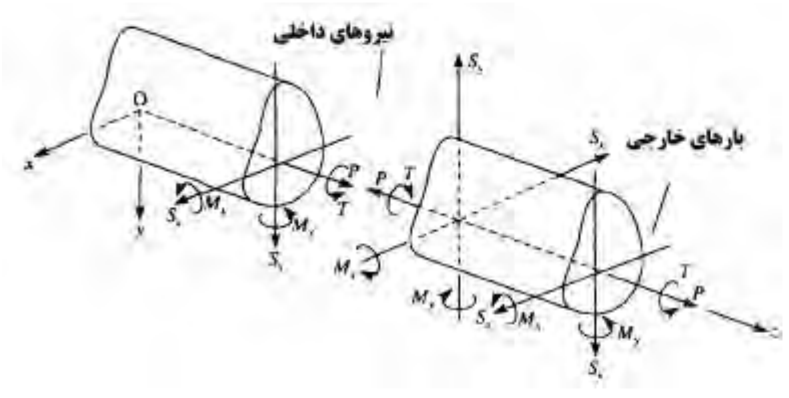
[1] Unsymmetrical bending
[2] Assumptions

علامت‌های قراردادی و علامت‌گذاری

در تحلیل‌های جاری فرض می‌کنیم محورهای قراردادی مانند شکل۶-۳ باشد. شکل ۹-۱۵ جهت قراردادی مثبت بارهای اعمال شده و همچنین جهت مثبت[1] لنگرهای اعمال شده بر تیر را نشان می‌دهد. تغییر مکان‌ها u و v و w نیز جهت مثبت تغییرمکان‌های تیر را نشان می‌دهد. در این شکل نیز جهت مثبت نیروی محوری P و لنگر پیچشی T و نیروی برشی S نشان داده شده است. در شکل۹-۱۶ جهت قراردادی برای نیروهای داخلی نشان داده شده است.



شکل۹-۱۵ علائم قراردادی و نمادها



شکل۹-۱۶ جهت مثبت نیروهای داخلی

در این شکل یک برش از تیر با شکل دلخواه زده شده است و جهت مثبت نیروهای داخلی برای قطعه برش خورده سمت چپ و راست به وضوح نشان داده شده است.

[1] Positive

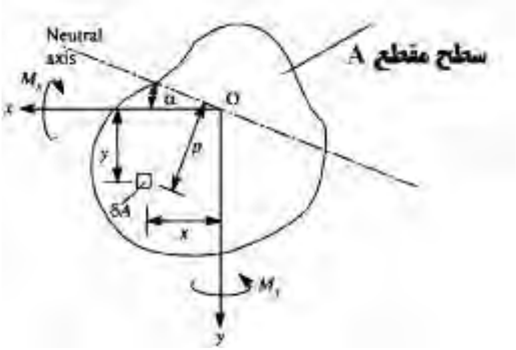
توزیع تنش نرمال

در شکل۹-۱۷ یک تیر با شکل دلخواه به همراه محور خنثی نشان داده شده است. محور Oz عمود بر صفحه بوده و جهت مثبت لنگرهای M_x و M_y در صفحه اعمال می‌شود. فرض کنید که زاویه بین محور x و محور خنثی مقطع برابر α باشد.

با توجه به مطالب ارائه شده در بخش ۹-۱ تیر بعد از خمش، حول محور خنثی با شعاع R خمیده می‌شود. با توجه به رابطه۹-۲ مقدار تنش نرمال در المان δA به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_z = E\frac{p}{R} \qquad (۹-۲۲)$$

|



شکل۹-۱۷ خمش در مقطع نامتقارن

در کل این مقطع در صورتی که خمش خالص وجود داشته باشد، تعادل بصورت زیر برقرار است:

$$\int_A \sigma_z dA$$

با جایگذاری تنش نرمال از رابطه ۹-۲۲ داریم:

$$\int_A E\frac{p}{R}dA = 0$$

$$\int_A PdA = 0 \qquad (۹-۲۳)$$

کمیت ارائه شده در رابطه ۹-۲۳ بیانگر گشتاور اول سطح مقطع تیر حول محور خنثی می‌باشد که برابر صفر است. با استفاده از شکل۹-۱۷ داریم

$$p = x\sin\alpha + y\cos\alpha \qquad (۹-۲۴)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

همچنین با توجه به رابطه ۹-۲۲ داریم

$$\sigma_z = \frac{E}{R}\left(x\sin\alpha + y\cos\alpha\right) \quad (۹\text{-}۲۵)$$

مقدار کل گشتاورهای M_x و M_y از جمع آنها در کل مقطع حاصل می‌شود:

$$M_x = \int_A \sigma_z y dA \quad , \quad M_y = \int_A \sigma_z x dA \quad (۹\text{-}۲٦)$$

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای تنش نرمال از رابطه ۹-۲۵ در رابطه ۹-۲٦ داریم:

$$M_x = \frac{E\sin\alpha}{R}\int_A xydA + \frac{E\cos\alpha}{R}\int_A y^2 dA$$
$$M_y = \frac{E\cos\alpha}{R}\int_A xydA + \frac{E\sin\alpha}{R}\int_A x^2 dA \quad (۹\text{-}۲۷)$$

که در رابطه ۹-۲۷ :

$$\int_A xydA = I_{xy}$$
$$\int_A y^2 dA = I_x$$
$$\int_A x^2 dA = I_y$$

I_{xy} حاصل ضرب گشتاور دوم سطح است که ممکن است مقداری منفی یا مثبت داشته باشد. کمیت I_x گشتاور دوم سطح حول محور x است. همچنین کمیت I_y گشتاور دوم سطح حول محور y است. رابطه ۹-۲۷ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$M_x = \frac{E\sin\alpha}{R}I_{xy} + \frac{E\cos\alpha}{R}I_x$$
$$M_y = \frac{E\cos\alpha}{R}I_y + \frac{E\sin\alpha}{R}I_{xy} \quad (۹\text{-}۲۸)$$

با حل رابطه ۹-۲۸ برای $E\sin\alpha / R$ و $E\cos\alpha / R$ و جایگذاری در رابطه ۹-۲۵ داریم:

$$\sigma_z = \left(\frac{M_y I_x - M_x I_{xy}}{I_x I_y - \left(I_{xy}\right)^2}\right)x + \left(\frac{M_x I_y - M_y I_{xy}}{I_x I_y - \left(I_{xy}\right)^2}\right)y \quad (۹\text{-}۲۹)$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

رابطه ۹-۲۹ را می‌توان به صورت ساده شده زیر نوشت:

$$\sigma_z = \frac{\overline{M}_x}{I_x} y + \frac{\overline{M}_y}{I_y} x \qquad (۹-۳۰)$$

که در آن:

$$\overline{M}_x = \frac{M_x - \dfrac{M_y I_{xy}}{I_y}}{1 - \dfrac{(I_{xy})^2}{I_x I_y}}$$

$$\overline{M}_y = \frac{M_y - \dfrac{M_x I_{xy}}{I_x}}{1 - \dfrac{(I_{xy})^2}{I_x I_y}} \qquad (۹-۳۱)$$

در حالتی که نسبت به محورهای Ox و یا Oy و یا نسبت به هر دو متقارن باشد، سپس I_{xy} برابر صفر می‌شود و حورهای Ox و Oy محورهای اصلی مقطع می‌باشند. آنگاه رابطه ۹-۳۱ به صورت زیر خلاصه خواهد شد.

$$\overline{M}_x = M_x \quad , \quad \overline{M}_y = M_y$$

و رابطه ۹-۳۰ به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \qquad (۹-۳۲)$$

جهت محور خنثی

با توجه به این نکته که مقدار تنش نرمال در تمام نقاط محور خنثی برابر صفر است:

$$0 = \frac{\overline{M}_x}{I_x} y_{N.A} + \frac{\overline{M}_y}{I_y} x_{N.A}$$

در این رابطه $x_{N.A}$ و $y_{N.A}$ مختصات تمام نقاط روی محور خنثی می‌باشند.

$$\frac{y_{N.A}}{x_{N.A}} = -\frac{\overline{M}_x}{\overline{M}_y}\frac{I_x}{I_y}$$

با مراجعه به شکل ۹-۱۷ داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\tan\alpha = \frac{\overline{M}_y}{\overline{M}_x}\frac{I_x}{I_y} \qquad (۹-۳۳)$$

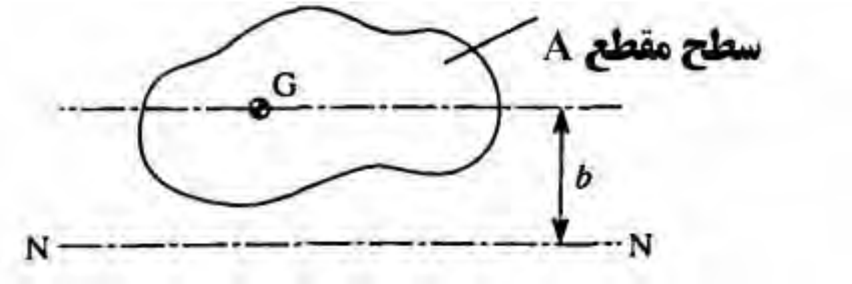
مقدار α وقتی که $y_{N.A}$ منفی و $x_{N.A}$ مثبت باشند دارای علامت مثبت است.

۹-۶ تعیین مشخصات هندسی مقاطع

در این قسمت در مورد بعضی از خواص مهم مقاطع بحث خواهد شد.

تئوری محورهای موازی[1]

شکل ۹-۱۸ که یک مقطع دلخواه از یک تیر را نشان می‌دهد را در نظر بگیرید. فرض کنید که گشتاور دوم سطح[2] I_G حول محور مرکز سطح مقطع باشد.



شکل ۹-۱۸ تئوری محورهای موازی

نقطه G مرکز سطح این تیر است. محور NN با محور مرکز سطح موازی است و به فاصله b از این محور قرار دارد. رابطه زیر بین گشتاور دوم سطح I_N حول محور NN با I_G برقرار است:

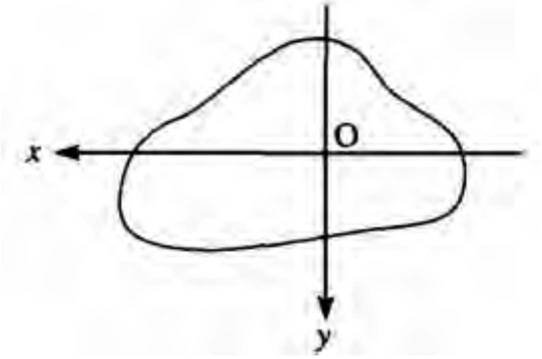
$$I_N = I_G + Ab^2 \qquad (۹-۳۴)$$

تئوری محورهای عمود بر هم[3]

در شکل ۹-۱۹ گشتاور دوم سطح I_x و I_y حول محورهای Ox و Oy معلوم هستند.

[1] Parallel axes theorem
[2] Second moment of area
[3] Theorem of perpendicular axes

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل۹-۱۹ تئوری محورهای عمود بر هم

گشتاور دوم سطح نسبت به محور عمود بر سطح (گشتاور دوم سطح قطبی) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$I_O = I_x + I_y \quad (۹-۳۵)$$

گشتاور دوم سطح مقاطع استاندارد

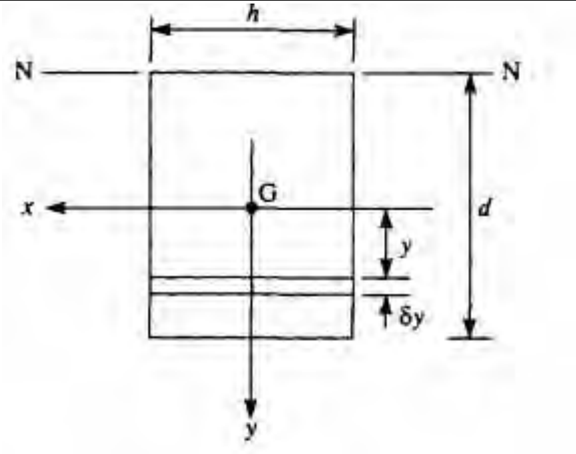
بعضی از مقاطع مورد استفاده در مهندسی عمران مانند اشکال نشان داده شده در شکل۹-۱ از تعدادی شکل منظم مانند مستطیل تشکیل شده‌اند. با استفاده از تئوری‌های بیان شده در بالا می‌توان بعضی از خواص هندسی به مانند گشتاور دوم سطح آنها را حساب کرد. برای مقطع مستطیلی نشان داده شده در شکل ۹-۲۰ داریم:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} by^2 dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_{-d/2}^{d/2}$$

$$I_x = \frac{bd^3}{12} \quad (۹-۳۶)$$

و به طور مشابه:

$$I_y = \frac{db^3}{12} \quad (۹-۳۷)$$



شکل۹-۲۰ گشتاور دوم سطح مقطع مستطیلی

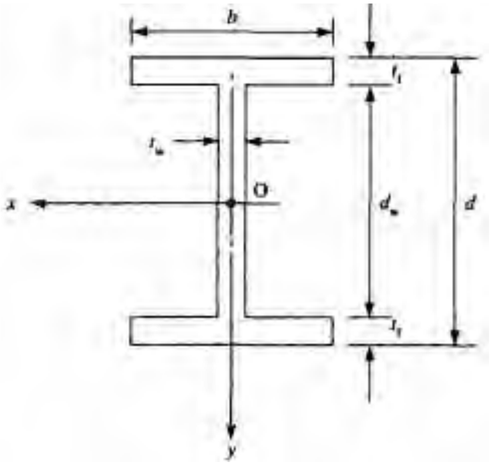
با توجه به شکل۹-۲۰ و استفاده از تئوری محورهای موازی

$$I_N = \frac{bd^3}{12} + bd\left(-\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{bd^3}{3} \qquad (۹\text{-}۳۸)$$

مثال۹-۷) مقدار گشتاور دوم سطح I_x و I_y را برای مقطع I شکل ۹-۲۱ را تعیین نمایید.

با استفاده از رابطه ۹-۳۶ داریم:

$$I_x = \frac{bd^3}{12} - \frac{(b - t_w)d_w^3}{12}$$



شکل۹-۲۱ گشتاور دوم سطح مقطع I شکل

به طور مشابه با استفاده از تئوری محورهای موازی و استفاده از رابطه ۹-۳۶

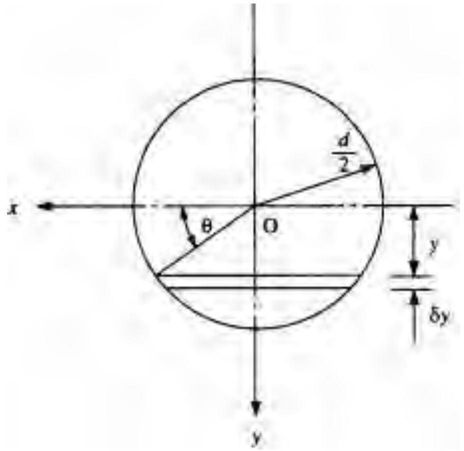
$$I_x = 2\left[\frac{bt_f^3}{12} + bt_f\left(\frac{d_w + t_f}{2}\right)^2\right] + \frac{t_w d_w^3}{12}$$

همچنین از معادله ۹-۳۷

$$I_x = 2\frac{t_f b^3}{12} + \frac{d_w t_w^3}{12}$$

حال می‌خواهیم گشتاور دوم سطح برای یک مقطع دایره‌ای شکل را بدست آوریم. این روابط می‌تواند بسیار مفید باشند. مطابق شکل ۹-۲۲ محورهای x و y از مرکز سطح دایره عبور می‌کند.

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-d/2}^{d/2} 2\left(\frac{d}{2}\cos\theta\right) y^2 dy \qquad (۹-۳۹)$$



شکل۹-۲۲ گشتاور دوم سطح مقطع دایره‌ای

با انتگرال گیری از رابطه ۹-۳۹ داریم:

$$I_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\cos\theta\left(\frac{d}{2}\sin\theta\right)^2 \frac{d}{2}\cos\theta d\theta$$

$$I_x = \frac{d^4}{8}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta$$

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است		Web: www.M-Alirezaei.com

$$I_x = \frac{\pi \times d^4}{64} \quad (۹-۴۰)$$

به وضوح روشن است که به علت تقارن:

$$I_y = \frac{\pi \times d^4}{64} \quad (۹-۴۱)$$

با استفاده از تئوری محورهای عمود بر هم گشتاور دوم سطح قطبی سطح I_o برابر است با:

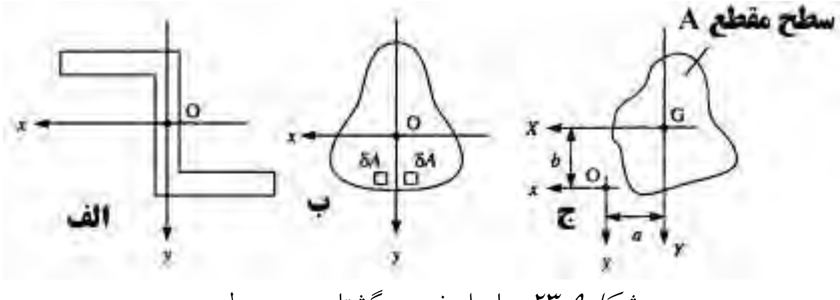
$$I_o = I_x + I_y = \frac{\pi \times d^4}{32} \quad (۹-۴۲)$$

حاصل ضرب گشتاور دوم سطح

حاصل ضرب گشتاور دوم سطح[1] I_{xy} یک تیر نسبت به x و y به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (۹-۴۳)$$

مقدار گشتاور دوم سطح I_x و یا I_y همیشه کمیتی مثبت است در حالی که ضرب گشتاور دوم سطح I_{xy} ممکن است مقداری منفی را نتیجه دهد. به عنوان مثال در مقطع Z شکل نشان داده شده در شکل ۹-۲۳الف مقدار ضرب گشتاور دوم سطح برای بال‌های این مقطع منفی است. در صورتی که مقطع مانند ۹-۲۳ب یک محور تقارن داشته باشد، برای هر المان موجود در سمت راست مقطع مقدار ضرب گشتاور دوم سطح مثبت خواهد بود و چون مقطع به صورت متقارن است در نهایت مقدار ضرب گشتاور دوم سطح برابر صفر بدست می‌آید. |



شکل۹-۲۳ حاصل ضرب گشتاور دوم سطح

[1] Product second moment of area

کانال تلگرام:		Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

حال فرض کنید که قصد تعیین مقدار ضرب گشتاور دوم سطح I_{xy} برای مقطع نشان داده شده در شکل ۹–۲۳ج را داریم. از معادله ۹–۴۳ داریم:

$$I_{xy} = \int_A xydA$$

$$I_{xy} = \int_A (X-a)(Y-b)dA$$

حال با بسط رابطه بدست آمده داریم:

$$I_{xy} = \int_A XYdA - b\int_A XdA - a\int_A YdA + ab\int_A dA$$

در صورتی که X و Y محورهای مرکزی باشند، آنگاه:

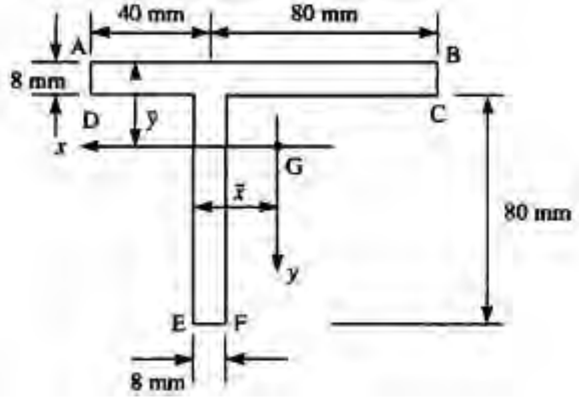
$$\int_A XdA = \int_A YdA = 0$$

$$\Rightarrow I_{xy} = I_{XY} + abA \qquad (۹–۴۴)$$

از رابطه ۹–۴۴ پیداست که در صورتی که محورهای GX و GY محورهای مرکزی برای مقطع باشند، $I_{xy}=0$ خواهد بود.

$$\Rightarrow I_{xy} = abA \qquad (۹–۴۵)$$

مثال۹–۸) یک تیر با مقطع نشان داده شده در شکل۹–۲۴ در صفحه قائم تحت خمشی معادل $1500N.m$ قرار گرفته است. مقدار حداکثر تنش نرمال ایجاد شده در مقطع را حساب کنید.



شکل۹–۲۴ مقطع تیر مثال۹–۸

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

حل) با گشتاورگیری حول هر محور در مقطع می‌توان مرکز سطح آن را بدست آورد.

$$(120\times8+80\times8)\bar{y}=120\times8\times4+80\times8\times48$$

$$\bar{y}=21.6mm$$

$$(120\times8+80\times8)\bar{x}=80\times8\times4+120\times8\times48$$

$$\bar{x}=16mm$$

گشتاور دوم سطح بر روی محورهای Gxy به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$I_x=\frac{120\times8^3}{12}+120\times8\times17.6^2+\frac{8\times80^3}{12}+80\times8\times26.4^2$$

$$=1.09\times10^6 mm^4$$

$$I_y=\frac{8\times120^3}{12}+120\times8\times8^2+\frac{80\times8^3}{12}+80\times8\times12^2$$

$$=1.31\times10^6 mm^4$$

$$I_{xy}=120\times8\times(-8)^2\times(-17.6)+80\times8\times12\times26.4$$

$$=0.34\times10^6 mm^4$$

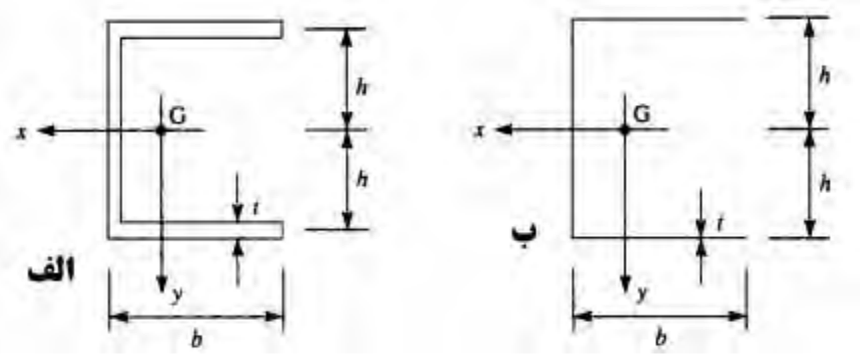
با توجه به اینکه $M_x=-1500N.m$ و $M_y=0$ از معادله ۹-۳۱ داریم:

$$\overline{M}_x=-1630\,N.m \quad \text{و} \quad \overline{M}_y=+505\,N.m$$

با جایگذاری در رابطه ۹-۳۰ داریم:

$$\sigma_z=-1.5y+0.39x$$

مثال۹-۹) در شکل ۹-۲۵الف مقدار گشتاور دوم سطح I_x را حساب کنید.



شکل۹-۲۵ محاسبه گشتاور دوم ناودانی با مقطع نازک

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$I_x = 2\left(\frac{bt^3}{12} + bth^2\right) + t\frac{\left[2\left(h - \frac{t}{2}\right)\right]^3}{12}$$

با بسط رابطه اخیر داریم:

$$I_x = 2\left(\frac{bt^3}{12} + bth^2\right) + \frac{t}{12}\left[2^3\left(h^3 - \frac{3h^2t}{2} + \frac{3ht^2}{4} - \frac{t^3}{8}\right)\right]$$

با صرف نظر کردن از توان‌های دوم t و بالاتر داریم:

$$I_x = 2bth^2 + t\frac{(2h)^3}{12}$$

مثال۹-۱۰) یک تیر جدا نازک مطابق شکل۹-۲٦ در نظر بگیرید. توزیع تنش نرمال M_x در مقطع را بدست آورید:

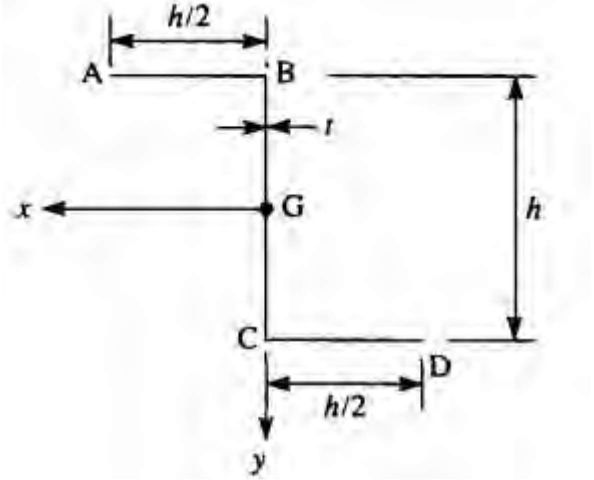
حل) مقطع این تیر به صورت غیر متقارن بوده و با استفاده از رابطه ۹-۳۰ داریم:

$$\sigma_z = \frac{\overline{M}_x}{I_x}y + \frac{\overline{M}_y}{I_y}x$$

که در این حالت داریم:

$$\overline{M}_x = \frac{-M_x}{1 - \frac{(I_{xy})^2}{I_x I_y}}$$

$$\overline{M}_y = \frac{M_x \frac{I_{xy}}{I_x}}{1 - \frac{(I_{xy})^2}{I_x I_y}}$$



شکل۹-۲۶ مقطع تیر ۹-۱۰

مشخصات هندسی برای مقطع جدار نازک به صورت تقریبی برابر است با:

$$I_x = 2\frac{ht}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 + \frac{th^3}{12} = \frac{h^3t}{3}$$

$$I_y = 2\frac{t}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{h^3t}{12}$$

$$I_{xy} = \frac{ht}{2}\left(\frac{h}{4}\right)\left(-\frac{h}{2}\right) + \frac{ht}{2}\left(-\frac{h}{4}\right)\left(\frac{h}{2}\right) = -\frac{h^3t}{8}$$

با جایگذاری مقادیر بدست آمده داریم:

$$\overline{M}_x = -2.29M_x$$

$$\overline{M}_y = -0.86M_x$$

$$\sigma_z = -\frac{M_x}{h^3t}\left(6.86y + 10.3x\right)$$

در بال بالایی $y=-h/2$ و $h/2>x>0$ است. توزیع تنش به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{h^3t}\left(3.43h - 10.3x\right)$$

$$\Rightarrow \sigma_{z,A} = -\frac{1.72M_x}{h^2t}$$ فشاری

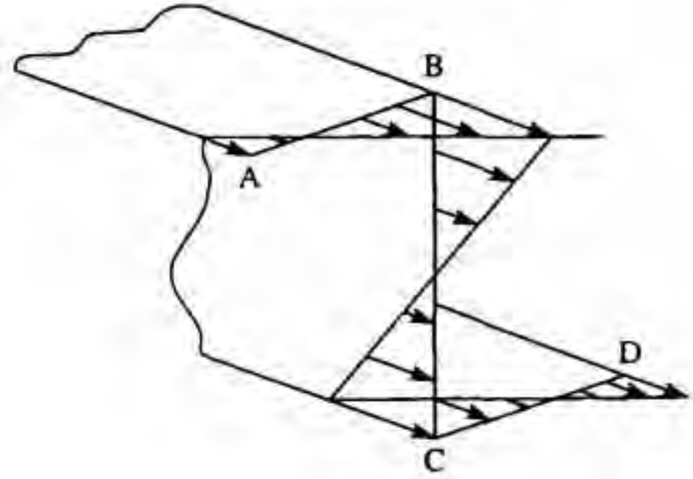
$$\Rightarrow \sigma_{z,B} = +\frac{3.43M_x}{h^2t}$$ کششی

در جان تیر $-h/2<y<h/2$ و $x=0$ داریم:

$$\sigma_z = -\frac{6.86M_x}{h^3t}y$$

$$\Rightarrow \sigma_{z,C} = -\frac{3.43M_x}{h^2t}$$ فشاری

$$\Rightarrow \sigma_{z,B} = +\frac{3.43M_x}{h^2t}$$ کششی



شکل۹-۲۷ توزیع تنش در تیر مثال ۹-۱۰

نمودار توزیع تنش در مقطع مورد بحث در شکل ۹-۲۷ نشان داده شده است.

گشتاور دوم سطح مقاطع جدار نازک خمیده

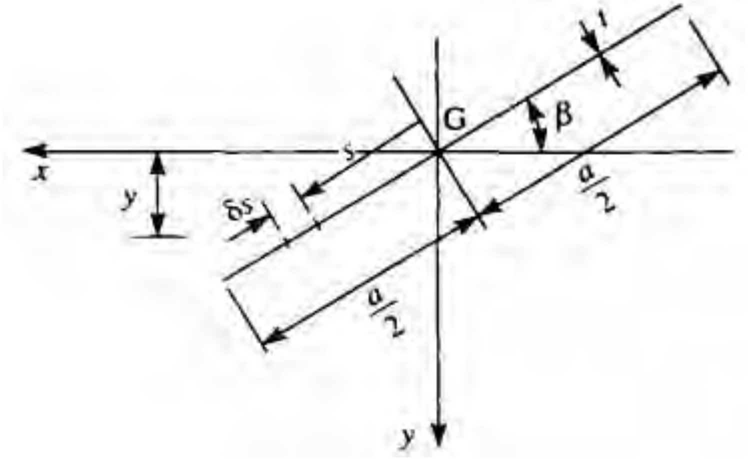
مقطع نشان داده شده در شکل۹-۲۸ را در نظر بگیرید. گشتاور دوم سطح المان δs حول محور افقی که از مرکز سطح G میگذرد برابر $t\delta s y^2$ است. بنابراین گشتاور دوم سطح کل مقطع حول محور Gx برابر I_x به صورت زیر بدست می‌آید.

$$I_x = \int_{-a/2}^{a/2} ty^2 ds = \int_{-a/2}^{a/2} t(s\sin\beta)^2 ds$$

$$I_x = \frac{a^3 t \sin^2\beta}{12}$$

$$I_y = \frac{a^3 t \cos^2\beta}{12}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۹-۲۸ گشتاور دوم سطح

مقدار حاصل ضرب گشتاور دوم سطح حول Gxy برابر است با:

$$I_{xy} = \int_{-a/2}^{a/2} txyds = \int_{-a/2}^{a/2} t(s\cos\beta)(s\sin\beta)ds$$

$$\Rightarrow I_{xy} = \frac{a^3 t\sin 2\beta}{24}$$

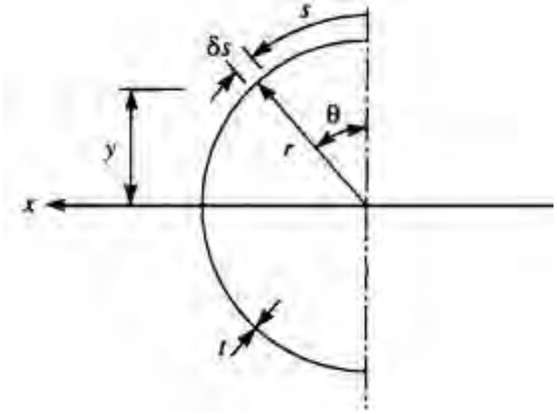
برای بدست آوردن مشخصات هندسی مقاطع جدار نازک خمیده نیز به صورت مشابه عمل می‌کنیم. به عنوان مثال مقدار I_x برای مقطع نیم دایره نشان داده شده در شکل ۹-۲۹ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I_x = \int_0^{\pi r} ty^2 ds$$

$$I_x = \int_0^{\pi} t(-r\cos\theta)^2 rd\theta$$

$$I_x = \frac{\pi \times r^3 \times t}{2}$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل۹-۲۹ گشتاور دوم سطح مقطع نیم دایره جدار نازک

۹-۷ محورهای اصلی و گشتاورهای دوم سطح اصلی

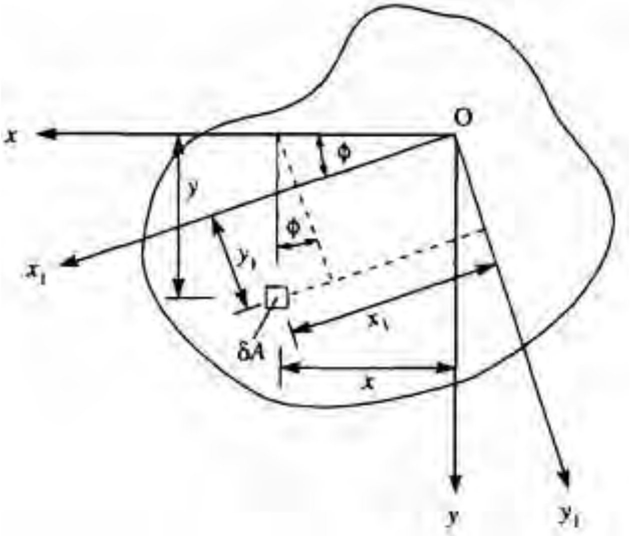
در مقاطع تیرها، محوری وجود دارد که مقدار حاصل ضرب گشتاور دوم سطح نسبت به آن محور برابر صفر است. این محورها به عنوان محورهای اصلی شناخته می‌شوند. شکل۹-۳۰ که مقطع یک تیر با شکل دلخواه می‌باشد را در نظر بگیرد. فرض کنید که گشتاور دوم سطح I_x و I_y و حاصل ضرب گشتاور دوم سطح I_{xy} برای این مقطع معلوم هستند.

$$I_x = \int_A y^2 dA$$
$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad (۹-۴۶)$$
$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

متناظراً گشتاورهای دوم سطح حول محورهای Ox_1y_1 برابر هستند با:

$$I_{x(1)} = \int_A y_1^2 dA$$
$$I_{y(1)} = \int_A x_1^2 dA \qquad (۹-۴۷)$$
$$I_{x(1)y(2)} = \int_A x_1 y_1 dA$$

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۹-۳۰ محورهای موازی در یک تیر با مقطع دلخواه

از شکل ۹-۳۰ داریم:

$$x_1 = x\cos\phi + y\sin\phi$$
$$y_1 = y\cos\phi - x\sin\phi$$

با جانشانی y_1 در رابطه ۹-۴۷ داریم:

$$I_{x(1)} = \int_A \left(y\cos\phi - x\sin\phi\right)^2 dA$$

با بسط رابطه اخیر داریم:

$$I_{x(1)} = \cos^2\phi\int_A y^2 dA + \sin^2\phi\int_A x^2 dA - 2\cos\phi\sin\phi\int_A xydA$$

با استفاده از رابطه ۹-۴۶ داریم:

$$I_{x(1)} = I_x\cos^2\phi + I_y\sin^2\phi - I_{xy}\sin 2\phi \qquad (۹\text{-}۴۸)$$

و بطور مشابه

$$I_{y(1)} = I_y\cos^2\phi + I_x\sin^2\phi + I_{xy}\sin 2\phi \qquad (۹\text{-}۴۹)$$

و

$$I_{x(1),y(2)} = \left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)\cos 2\phi + I_{xy}\cos 2\phi \qquad (۹\text{-}۵۰)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

روابط ۹–٤٨ تا ۹–۵۰ مقدار گشتاور دوم سطح و حاصل ضرب گشتاور دوم سطح حول هر محوری که با محور x زاویه ϕ می‌سازد را بدست می‌دهند.

در یک حالت خاص وقتی که محورهای Ox_1y_1 محورهای اصلی مقطع باشند، Ox_py_p، $I_{x(P),y(p)}=0$ و $\phi=\phi_p$ و از روابط ۹–٤٨ و ۹–٤۹ داریم:

$$I_{x(p)} = I_x \cos^2\phi_p + I_y \sin^2\phi_p - I_{xy}\sin 2\phi_p \qquad (۹\text{–}۵۱)$$

و

$$I_{y(p)} = I_y \cos^2\phi_p + I_x \sin^2\phi_p + I_{xy}\sin 2\phi_p \qquad (۹\text{–}۵۲)$$

بعلاوه از آنجایی که $I_{x(1),y(1)} = I_{x(p),y(p)} = 0$ ، با استفاده از رابطه ۹–۵۰ داریم:

$$\tan 2\phi = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \qquad (۹\text{–}۵۳)$$

$$\cos 2\phi_p = \frac{\frac{(I_x - I_y)}{2}}{\sqrt{\left[\frac{I_y - I_x}{2}\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\phi_p = \frac{I_{xy}}{\sqrt{\left[\frac{I_y - I_x}{2}\right]^2 + I_{xy}^2}}$$

با بازنویسی رابطه ۹–۵۱ داریم:

$$I_{x(p)} = \frac{I_x}{2}\left(1+\cos 2\phi_p\right) + \frac{I_y}{2}\left(1-\cos 2\phi_p\right) - I_{xy}\sin 2\phi_p$$

با جایگذاری $\cos 2\phi_p$ و $\sin 2\phi_p$ در رابطه بالا داریم:

$$I_{x(p)} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \qquad (۹\text{–}۵٤)$$

به طور مشابه:

$$I_{y(p)} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2} \qquad (۹\text{–}۵۵)$$

توجه داشته باشید که رابطه ۹–۵۳ دو مقدار برای ϕ_p و $\phi_p + \pi/2$ را بدست می‌دهد.

در صورتی که محورهای اصلی در مرکز سطح مقطع باشند:

$$\overline{M}_{x(p)} = M_{x(p)}$$
$$\overline{M}_{y(p)} = M_{y(p)}$$

و از آنجایی که $I_{x(p),y(p)} = 0$ ، معادله ۹-۳۰ بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_z = \frac{M_{x(p)}}{I_{x(p)}} y_p + \frac{M_{y(p)}}{I_{y(p)}} x_p \tag{۹-۵۶}$$

۹-۸ اثر برش بر روی تئوری خمش

در صورتی که نسبت ارتفاع تیر به طول آن کمتر از *0.1* باشد، برش اثر ناچیزی بر مقطع دارد و در آن خمش حاکم است.

۹-۹ بار، نیروی برشی و لنگر خمش ، روابط کلی

در بخش ۳-۵ روابط بین لنگر خمشی و نیروی برشی و بار اعمال شده بر روی تیر توضیح داده شد. این نسبت‌ها در رابطه ۳-۸ خلاصه شدند. وقتی بار اعمال شده در صفحه افقی اعمال شود؛ رابطه ۳-۸ به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} = \frac{\partial S_x}{\partial z} = -w_x(z) \tag{۹-۵۷}$$

و برای بار اعمال شده در صفحه قائم؛ رابطه۳-۸ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = \frac{\partial S_y}{\partial z} = -w_y(z) \tag{۹-۵۸}$$

در رابطه ۹-۳۱ پارامترهای $\overline{M}_x$ و $\overline{M}_y$ تعریف شد. حال پارامترهای مفید مشابهی را برای بدست آوردن توزیع برش در مقطع تعریف می‌نماییم:

$$\overline{S}_x = \frac{\partial \overline{M}_y}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial M_y}{\partial z} - \left(\dfrac{\partial M_x}{\partial z}\right)\dfrac{I_{xy}}{I_x}}{1 - \dfrac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} = -w_y(z)$$

$$\bar{S}_x = \frac{S_x - \dfrac{S_y I_{xy}}{I_x}}{1 - \dfrac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad (۹-۵۹)$$

و بطور مشابه:

$$\bar{S}_y = \frac{S_y - \dfrac{S_x I_{xy}}{I_y}}{1 - \dfrac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad (۹-۶۰)$$

از رابطه ۹-۵۸ پارامترهای $\overline{w}_x$ و $\overline{w}_y$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\overline{w}_x = \frac{w_x - \dfrac{w_y I_{xy}}{I_x}}{1 - \dfrac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad (۹-۶۱)$$

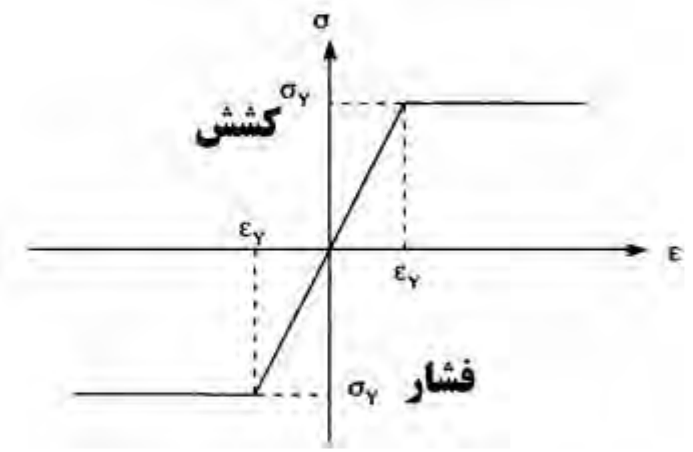
$$\overline{w}_y = \frac{w_y - \dfrac{w_x I_{xy}}{I_y}}{1 - \dfrac{I_{xy}^2}{I_x I_y}} \quad (۹-۶۲)$$

پارامترهای $\overline{M}_x$، $\overline{M}_y$، $\bar{S}_x$، $\bar{S}_y$، $\overline{w}_x$ و $\overline{w}_y$ معولاً خمش موثر، برش موثر و شدت بار موثر نامیده می‌شوند.

۹-۱۰ خمش پلاستیک

یکی از فرضیاتی که تا اینجا برای تعیین روابط بدست آمده برای تیرها مورد توجه قرار دادیم این بود که تنش در مقطع تیر هیچ‌گاه از حد تناسب مواد بیشتر نمی‌شود. طراحی به این روش به عنوان روش طراحی تنش مجاز شناخته می‌شود. در این روش اعضای سازه تحت ترکیب بارهای سرویس و با اعمال یک ضریب اطمینان مناسب طوری طراحی می‌شوند که در هیچ از نقاط مقطع میزان تنش از تنش تسلیم فراتر نرود. در روش طراحی پلاستیک به مقطع اجازه می‌دهیم که وارد حوزه غیرخطی شود و مقدار تنش موجود در مقطع بیشتر از حد تنش تسلیم شود. شکل۹-۳۱ نمودار ایده‌آل شده تنش-کرنش برای

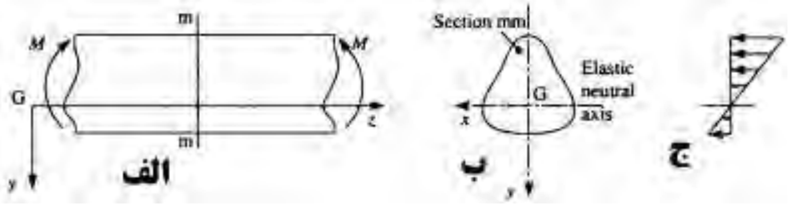
فولاد نرمه را نشان می‌دهد. در این نمودار تا حد تنش تسلیم شیب نمودار خطی بوده و با شیب ثابتی حرکت می‌کند ولی به بلافاصله بعد از رسیدن مقطع به تنش تسلیم، شیب نمودار کاملاً افقی شده و مقطع کاملاً پلاستیک می‌شود.



شکل۹-۳۱ منحنی ایده‌آل شده فولاد نرمه

خمش پلاستیک تیر با یک محور تقارن

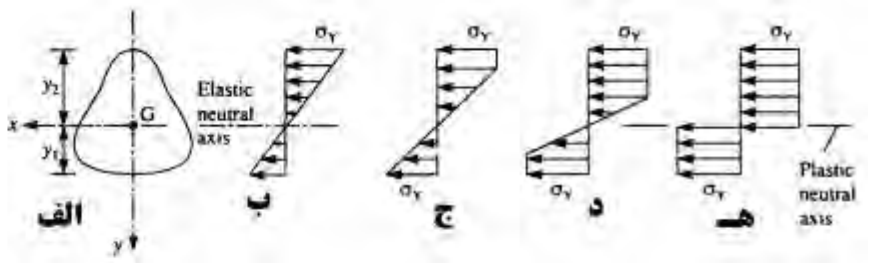
تیر نشان داده شده در شکل۹-۳۲ را در نظر بگیرید که تحت لنگر خمشی مثبت M قرار دارد. مقطع این تیر دارای یک محور تقارن می‌باشد که در شکل ۹-۳۲ب نشان داده شده است.



شکل۹-۳۲ توزیع تنش در تیر با یک محور تقارن

در صورتی که مقدار لنگر اعمال شده M به قدر کافی کوچک باشد، تنش ایجاد شده در مقطع به صورت خطی خواهد بود و مقطع در وضعیت الاستیک خطی است. توزیع تنش در این حالت در شکل۹-۳۲ج نشان داده شده است. همچنین مقدار تنش در مقطع و در هر تار آن توسط رابطه ۹-۹ تعیین می‌شود. حال فرض کنید که مقدار لنگر M افزایش پیدا کند.

در این حالت دیده می‌شود که در دورترین تار مقطع مانند شکل۹-۳۳ب میزان تنش به حد تسلیم می‌رسد.

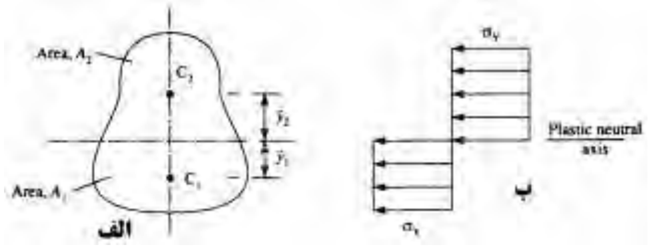


شکل۹-۳۳ تنش تسلیم در تیر به سبب خمش

میزان لنگر موجود در مقطع در این حالت به عنوان لنگر تسلیم[1] M_y شناخته می‌شود و با استفاده از رابطه ۹-۹ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$M_y = \frac{\sigma_Y I}{y_2} \qquad (۹-٦٣)$$

در صورتی که مقدار لنگر موجود باز هم بیشتر شود در این حالت بدون اضافه شدن تنش در مقطع، مقدار کرنش موجود مانند شکل۹-۳۳ج شروع به افزایش می‌کند و تارهای بیشتری از مقطع وارد حوزه خمیری می‌شوند. در این حالت مقدار لنگر به مقدار ناچیزی افزایش می‌یابد ولی مقدار کرنش موجود به میزان قابل توجهی افزایش می‌یابد بطوری که کل مقطع مانند شکل۹-۳۳هـ پلاستیک کامل[2] می‌شود. دراین حالت مقدار لنگر موجود به عنوان لنگر پلاستیک شناخته می‌شود. هدف ما در اینجا بدست آوردن مقدار لنگر پلاستیک[3] M_p مقطع است.



شکل۹-۳٤ جهت محورهای پلاستیک در تیر

[1] Yield moment
[2] Completely plastic
[3] Plastic moment

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در شکل۹-۳٤ مقطع یک تیر را نشان می‌دهد که تمام نقاط آن وارد حوزه پلاستیک شده است. فرض کنید تارهای پایین محور خنثی به کشش و تارهای بالایی به فشار افتاده‌اند. در این مقطع برای اینکه تعادل بین نیروها برقرار باشد بایستی روابط زیر برقرار باشد:

$$\sigma_Y A_1 = \sigma_Y A_2$$

$$A_1 = A_2 \qquad (٩-٦٤)$$

در صورتی که کل مساحت مقطع تیر برابر A باشد:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \qquad (٩-٦٥)$$

بنابراین دیده می‌شود که محور خنثی پلاستیک[1] برابر نصف مساحت مقطع است و در مقطعی که دارای دو محور تقارن هستند، محور خنثی نصف ارتفاع است. مقدار لنگر پلاستیک مقطع را می‌توان با گشتاورگیری حول محور خنثی بدست آورد. در صورتی که C_1 و C_2 محل اثر برآیند تنش‌های اعمالی به مقطع باشند:

$$M_P = \sigma_Y A_1 \times \bar{y}_1 + \sigma_Y A_2 \bar{y}_2$$

و یا با استفاده از رابطه ۹-٦٥ داریم:

$$M_P = \sigma_Y \frac{A}{2} \times (\bar{y}_1 + \bar{y}_2) \qquad (٩-٦٦)$$

رابطه۹-٦٦ را ممکن است مانند رابطه۹-۱۳ نوشت:

$$M_P = \sigma_Y Z_P \qquad (٩-٦٧)$$

که در رابطه ۹-٦٧

$$Z_P = \frac{A(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)}{2} \qquad (٩-٦٨)$$

کمیت Z_P به عنوان مدول پلاستیک مقطع شناخته می‌شود. توجه داشته باشید که مقدار مدول الاستیک مقطع Z_e برای مقاطع با یک محور تقارن (مانند مقطع سپری) دارای دو مقدار می‌باشد. در حالی که مدول پلاستیک دارای یک مقدار برای هر مقطعی می‌باشد.

[1] Plastic neutral axis

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

ضریب شکل

نسبت بین لنگر پلاستیک مقطع به لنگر تسلیم مقطع به عنوان ضریب شکل[1] f شناخته می‌شود.

$$f=\frac{M_P}{M_y}=\frac{\sigma_Y Z_P}{\sigma_Y Z_e}=\frac{Z_P}{Z_e} \qquad (۹-۶۹)$$

که در این رابطه مقدار Z_P از معادله ۹-۶۸ و Z_e مدول حداقل الاستیک مقطع برابر I/y_2 می‌باشد و ضریب شکل مقطع به شکل هندسی مقطع بستگی دارد.

مثال۹-۱۱) مقدار لنگر تسلیم، لنگر پلاستیک و ضریب شکل را برای یک تیر با مقطع مستطیلی به عرض b و ارتفاع d تعیین کنید.

حل) با توجه به رابطه ۹-۶۵ محور خنثی الاستیک و پلاستیک مقطع مستطیلی با هم برابر هستند. با استفاده از رابطه ۹-۶۳ داریم:

$$M_Y=\frac{\sigma_Y\frac{bd^3}{12}}{\frac{d}{2}}=\sigma_Y\frac{bd^2}{6}$$

حال با استفاده از رابطه۹-۶۶ داریم:

$$M_P=\sigma_Y\frac{bd}{2}\left(\frac{d}{4}+\frac{d}{4}\right)=\sigma_Y\frac{bd^2}{4}$$

با جایگذاری M_p و M_Y در رابطه ۹-۶۹ داریم:

$$f=\frac{M_P}{M_y}=\frac{3}{2}$$

دیده می‌شود ظرفیت پلاستیک یک تیر با مقطع مستطیلی ۵۰٪ بیشتر از ظرفیت حد الاستیک است.

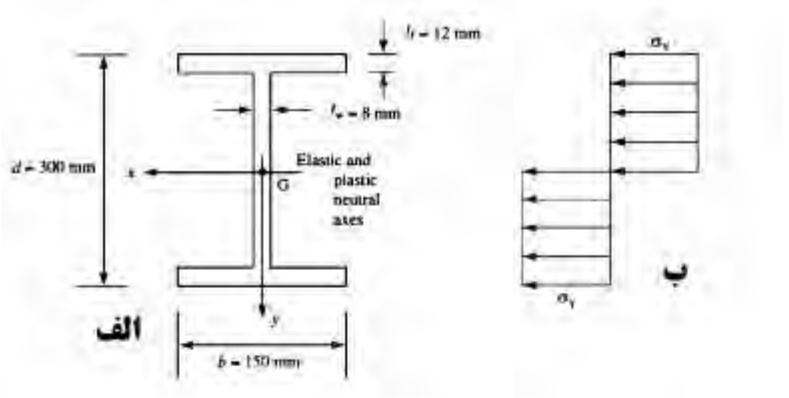
مثال۹-۱۲) ضریب شکل برای یک مقطع I شکل نشان داده شده در شکل ۹-۳۵الف را تعیین کنید.

---
[1] Shape factor

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حل) دوباره مانند مثال قبلی دیده می‌شود که مرکز پلاستیک و الاستیک مقطع در یک محل اتفاق می‌افتد. در شرایط کاملاً پلاستیک توزیع تنش در تیر مانند شکل ۹-۳۵ب خواهد بود. مقدار کل نیروی موجود در بال بالایی برابر است با:

$\sigma_Y b t_f$ فشاری



شکل۹-۳۵ تیر مثال۹-۱۲

با گشتاورگیری حول Gx داریم:

$$\sigma_Y b t_f\left(\frac{d}{2}-\frac{t_f}{2}\right)=\frac{\sigma_Y b t_f}{2}\left(d-t_f\right)$$

به طور مشابه مقدار نیروی مستقیم در جان و در بالای محورGx برابر است با:

$\sigma_Y t_w\left(\frac{d}{2}-t_f\right)$ || فشاری

با گشتاورگیری حول Gx داریم:

$$\sigma_Y t_w\left(\frac{d}{2}-t_f\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}-t_f\right)=\frac{\sigma_Y t_w}{8}\left(d-2t_f\right)^2$$

نیمه پایینی تیر در کشش است. با گشتاورگیری حول Gx مقدار لنگر پلاستیک بدست می‌آید:

$$M_P=\sigma_Y\left[b t_f\left(d-t_f\right)+\frac{1}{4}t_w\left(d-2t_f\right)^2\right]$$

$$Z_P=b t_f\left(d-t_f\right)+\frac{1}{4}t_w\left(d-2t_f\right)^2$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

مقدار گشتاور دوم سطح I حول محور خنثی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I=\frac{bd^3}{12}-\frac{(b-t_w)(d-2t_f)^3}{12}$$

به طور مشابه مقدار مدول الاستیسیته Z_e بصورت زیر بدست می‌آید:

$$Z_e=\frac{I}{\frac{d}{2}}=\frac{2}{d}\left[\frac{bd^3}{12}-\frac{(b-t_w)(d-2t_f)^3}{12}\right]$$

با جایگذاری مقادیر در روابط داریم:

$$Z_P=150\times12(300-12)+\frac{1}{4}\times8(300-2\times12)^2=6.7\times10^5\,mm^3$$

$$Z_e=\frac{2}{300}\left[\frac{150\times300^3}{12}-\frac{(150-8)(300-24)^3}{12}\right]=5.9\times10^5\,mm^3$$

با استفاده از رابطه ۹-۶۹ داریم:

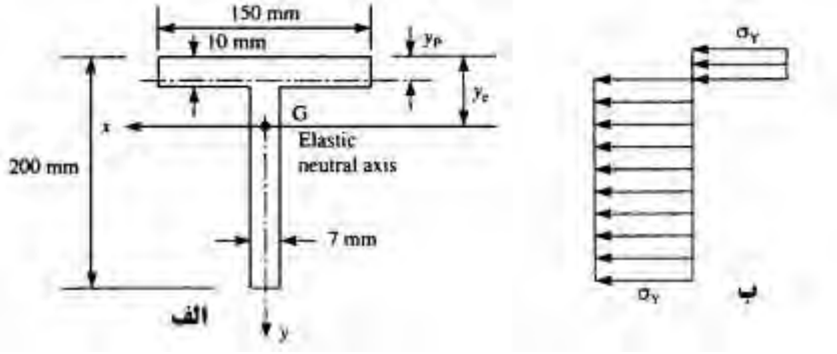
$$f=\frac{M_P}{M_Y}=\frac{Z_P}{Z_e}=\frac{6.7\times10^5}{5.9\times10^5}=1.14$$

بنابراین دیده می‌شود که ظرفیت گشتاور پلاستیک کامل[1] یک مقطع I شکل حدوداً ۱۴٪ بیشتر از ظرفیت گشتاور تسلیم[2] آن است.

مثال۹-۱۳) مقدار ضریب شکل برای مقطع T شکل نشان داده شده در شکل۹-۳۶ را تعیین کنید:

[1] Fully plastic moment
[2] Moment at initial yielding

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۹-۳۶ تیر مثال۹-۱۳

در این حالت محورهای الاستیک و پلاستیک مقطع دیگر در یک محل اتفاق نمی‌افتند. فرض می‌کنیم که محل محور الاستیک مقطع به فاصله y_e از بال بالایی اتفاق می‌افتد. همچنین محل قرار گیری محور پلاستیک به اندازه y_p از دورترین تار بال فاصله دارد. با گشتاورگیری، محل محور الاستیک تعیین می‌شود.

$$(150\times10+190\times7)y_e = 150\times10\times5+190\times7\times105$$

$$y_e = 52.0mm$$

با استفاده از رابطه ۹-۳۸ گشتاور دوم سطح برای این مقطع به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$I = \frac{150\times52^3}{3} - \frac{143\times42^3}{3} + \frac{7\times148^3}{3} = 11.1\times10^6 mm^4$$

بنابراین

$$Z_e = \frac{11.1\times10^6}{148} = 75000mm^3$$

توجه شود که انتخاب Z_e کوچکتر باعث بدست آمدن تنش حداکثر می‌شود.

$$150y_P = 150(10-y_P)+190\times7 \quad \Rightarrow \quad y_P = 9.7mm$$

$$Z_P = 150\times9.4\times4.7+150\times0.6\times0.3+190\times7\times95.6 = 133800\,mm^3$$

بنابراین ضریب شکل مقطع با استفاده از رابطه ۹-۶۹ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{Z_P}{Z_e} = \frac{133800}{75000} = 1.78$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

روابط بین لنگر - انحنا

از رابطه ۹-۸ دیدیم که مقدار انحناء k در تیر در اثر خمش الاستیک با استفاده از معادله زیر بدست می‌آید:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \qquad (۹-۷۰)$$

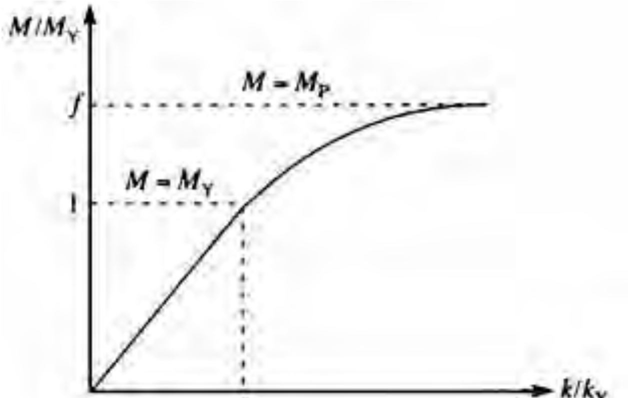
همچنین در نقطه تسلیم، جایی که مقدار لنگر برابر M_Y است:

$$k_Y = \frac{1}{R} = \frac{M_Y}{EI} \qquad (۹-۷۱)$$

با ترکیب روابط ۹-۷۰ و ۹-۷۱ می‌توانیم به یک پارامتر بدون بعد برسیم:

$$\frac{M}{M_Y} = \frac{k}{k_Y} \qquad (۹-۷۲)$$

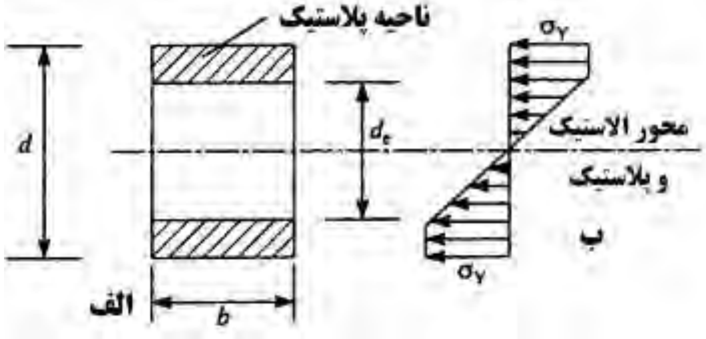
رابطه اخیر توسط قسمت خطی دیاگرام لنگر- انحنا مانند شکل ۹-۳۷ نوشته شده است. این رابطه فقط در قسمت خطی این منحنی صادق بوده و در صورتی که مقدار لنگر از لنگر تسلیم فراتر رود دیگر رابطه ۹-۷۲ برقرار نخواهد بود. دیده می‌شود که در صورت افزایش M و بیشتر شدن لنگر از لنگر تسلیم M_Y در نهایت لنگر به یک خط مماس می‌شود.



شکل۹-۳۷ دیاگرام گشتاور یک تیر

یک تیر با مقطع مستطیلی مانند شکل ۹-۳۸الف را در نظر بگیرید که تحت لنگر خمشی قرار دارد. قسمت خارجی این مقطع در ناحیه پلاستیک قرار گرفته است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۹-۳۸ لنگر پلاستیک مقطع مستطیلی

ارتفاع الاستیک مقطع برابر d_e است و این ناحیه هنوز در حالت الاستیک قرار دارد. مقدار کل لنگر با توجه به شکل ۹-۳۸ب برابر است با:

$$M = 2\sigma_Y b\frac{1}{2}\left(d - d_e\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + \frac{d_e}{2}\right) + 2\frac{\sigma_Y}{2}b\frac{d_e}{2}\frac{2}{3}\frac{d_e}{2}$$

با ساده سازی داریم:

$$M = \frac{\sigma_Y bd^2}{12}\left(3 - \frac{d_e^2}{d^2}\right) = \frac{M_Y}{2}\left(3 - \frac{d_e^2}{d^2}\right) \qquad (۹-۷۳)$$

توجه شود که وقتی $d_e=d$ باشد، $M=M_Y$ و وقتی که $d_e=0$ باشد، $M=3M_Y/2$ خواهد بود. مقدار تنش در لبه منطقه تسلیم شده برابر است با:

$$\sigma_Y = E\frac{d_e}{2R}$$

$$k = \frac{1}{R} = \frac{2\sigma_Y}{Ed_e} \qquad (۹-۷۴)$$

مقدار انحنای تیر در ناحیه تسلیم توسط رابطه ۹-۷۱ بدست می‌آید:

$$k_Y = \frac{M_Y}{EI} = \frac{2\sigma_Y}{Ed} \qquad (۹-۷۵)$$

با ترکیب روابط ۹-۷۴ و ۹-۷۵ داریم:

$$\frac{k}{k_Y} = \frac{d}{d_e} \qquad (۹-۷۶)$$

با جانشانی d_e/d در رابطه ۹-۷۳ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

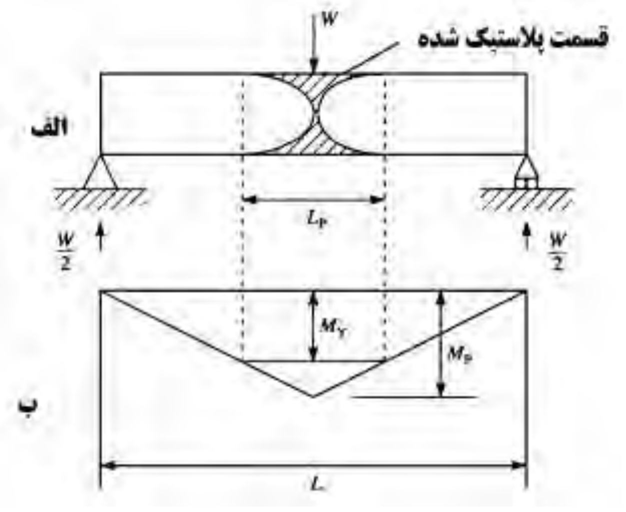
$$M = \frac{M_Y}{2}\left(3 - \frac{k_Y^2}{k^2}\right)$$

$$\frac{k}{k_Y} = \frac{1}{\sqrt{3 - 2\frac{M}{M_Y}}} \qquad (۹-۷۷)$$

رابطه ۹-۷۷ نسبت بین لنگر انحنا برای یک مقطع مستطیلی با $M_Y<M<M_P$ را بدست می‌دهد. این رابطه برای قسمت غیرخطی منحنی لنگر- انحنا صادق است.

مفصل‌های پلاستیک

در بعضی از مقاطع اعضای سازه ممکن است تنش از حد تسلیم خارج شود. تیر ساده نشان داده شده در شکل ۹-۳۹الف را در نظر بگیرید. تیر مورد نظر یک نیروی متمرکز به اندازه W در مرکز خود حمل می‌کند. دیاگرام لنگر خمشی این تیر در شکل۹-۳۹ب نشان داده شده است. دیاگرام نیروی خمشی این تیر به صورت مثلثی است و مقدار حداکثر لنگر خمشی در تیر برابر $WL/4$ است. در صورتی که بار وارده بر روی تیر طوری افزایش یابد که $WL/4=M_P$ گردد، وسط تیر به صورت کامل پلاستیک می‌شود و به سمت اطراف پیشروی می‌کند.



شکل۹-۳۹ آرایش مفصل پلاستیک در یک تیر ساده

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

ولی در صورتی که با لنگر ایجاد شده کمتر از لنگر تسلیم باشد، در تیر مفصل پلاستیک ایجاد نمی‌شود. حال با فرض رسیدن لنگر به لنگر پلاستیک مقدار W به صورت $W=4M_P/L$ بدست می‌آید.

$$M_Y = \frac{W}{2}\left(\frac{L-L_P}{2}\right)$$

با جایگذاری $W=4M_P/L$ داریم:

$$M_Y = \frac{M_P}{L}\left(L-L_P\right)$$

که در آن:

$$L_P = L\left(1-\frac{M_Y}{M_P}\right)$$

و با استفاده از رابطه ۹-۶۹ داریم:

$$L_P = L\left(1-\frac{1}{f}\right) \qquad (۹-۷۸)$$

برای مقطع مستطیلی با $f=1$ مقدار $L_P=L/3$ بدست می‌آید. برای مقطع I شکل که در آن $f=1.14$ است، مقدار $L_P=0.12L$ بدست می‌آید.

تحلیل پلاستیک تیر

با استفاده از مفاهیم ارائه شده در قسمت مفصل پلاستیک می‌توانیم بار نهایی که یک تیر قبل از خرابی می‌تواند تحمل کند را تعیین کنیم. برای حالت ساده مانند شکل۹-۳۹ دیدیم که تنها با ایجاد یک مفصل تیر دچار ناپایداری شد. در تیر شکل ۹-۳۹ با گشتاورگیری حول وسط دهانه داریم:

$$\frac{W_U}{2}\frac{L}{2} = M_P$$

$$W_U = \frac{4M_P}{L}$$

که در رابطه بالا W_U حداکثر مقدار بار قابل تحمل برای تیر است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

مثال۹-۱٤) مقدار بار نهایی قابل تحمل برای یک تیر دو سر ساده با مقطع مستطیل شکل به عرض b و ارتفاع d به دهانه L که تحت بار گسترده w قرار گرفته است را بدست آورید.

حل) مقدار حداکثر لنگر خمشی در وسط تیر و معادل $wL^2/8$ خواهد بود. (قسمت ۳-٤ را ببینید) مقدار لنگر پلاستیک ایجاد شده در وسط تیر معادل M_P در اثر بار نهایی w_U برابر است با:

$$\frac{W_U L^2}{8} = M_P$$

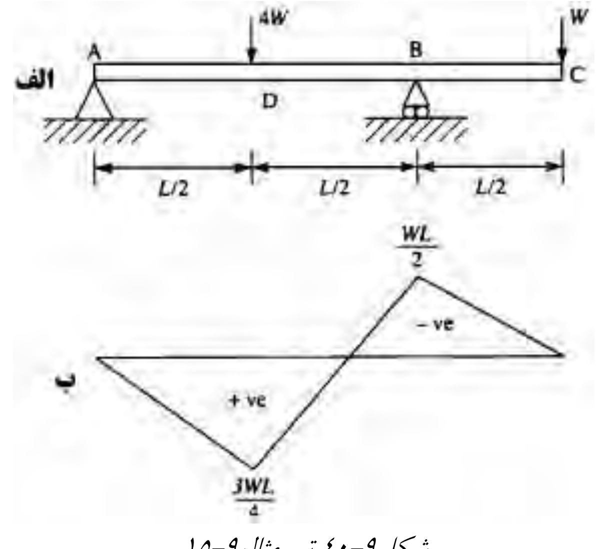
$$M_P = \sigma_Y \frac{bd^2}{4}$$

$$w_U = \frac{8M_P}{L^2} = \frac{2\sigma_Y bd^2}{L^2}$$

که در آن σ_Y تنش تسلیم مصالح است.

مثال۹-۱۵) تیر ساده ABC نشان داده شده در شکل ۹-٤۰ الف در قسمتی از خود به صورت کنسول می‌باشد. بارهای متمرکز $4W$ و W بر روی این تیر اعمال می‌شوند. مقدار W که باعث خرابی تیر می‌شود را تعیین کنید.

حل) با استفاده از توضیحات قسمت ٤-۳ دیاگرام لنگر خمشی تیر در شکل۹-٤۰ب نشان داده شده است.



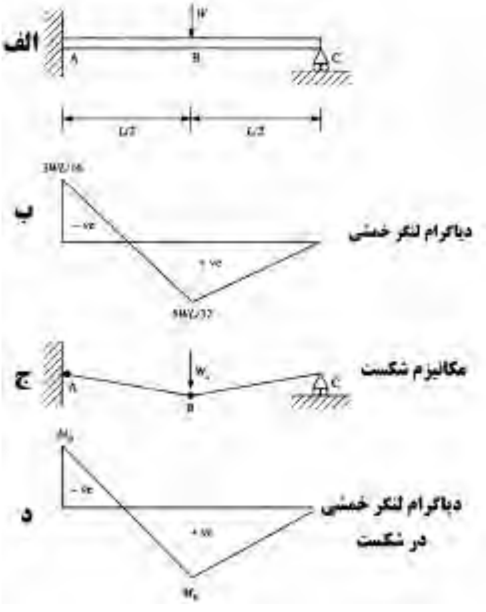
شکل۹-٤۰ تیر مثال۹-۱۵

بوضوح روشن است که با افزایش W لنگر پلاستیک در زیر بار متمرکز $4W$ ایجاد می‌شود. بنابراین:

$$\frac{3}{4}W_U L = M_P$$

$$W_U = \frac{4M_P}{3L}$$

در این سیستم و سیستم‌های مشابه‌ای که از نظر استاتیکی معین هستند با تشکیل اولین مفصل پلاستیک سیستم دچار خرابی و ناپایداری می‌شود. ولی در سیستم‌های نامعین با تشکیل یک مفصل سیستم مکانیزم نمی‌شود و می‌تواند پذیرای مفصل‌های بیشتری بر حسب تعداد درجات نامعینی خود باشد. در شکل۹-٤۱ یک تیر نامعین استاتیکی نشان داده شده است. این تیر به دلیل وجود تکیه‌گاه در نقطه C یک درجه نامعین است. دیاگرام لنگر خمشی این تیر در شکل ۹-٤۱ب نشان داده شده است. مقدار لنگر حداکثر موجود در تکیه‌گاه A حداکثر است بنابراین با افزایش بار در این تکیه‌گاه مفصل پلاستیک ایجاد می‌شود. در شکل۹-٤۱ج دیده می‌شود که برای اینکه سازه ناپایدار شود به تشکیل دو مفصل پلاستیک نیاز است.



شکل۹-٤۱ مفصل پلاستیک در یک تیر کنسول

اولین مفصل در A ایجاد می‌شود در این حالت تیر به یک سیستم معین تبدیل می‌شود. دومین مفصل نیز در زیر بار متمرکز ایجاد می‌شود. در شکل۹-٤۱ دیده می‌شود در حالت نهایی مقدار لنگر در حداکثر مقادیر برابر لنگر پلاستیک خواهد بود. با گشتاورگیری حول A داریم:

$$M_P = W_U \frac{L}{2} - R_C L \qquad (۹-۷۹)$$

که R_C عکس‌العمل قائم تکیه‌گاه C می‌باشد. با نوشتن معادله تعادل برای قسمت BC داریم:

$$R_C \frac{L}{2} = M_P \qquad (۹-۸۰)$$

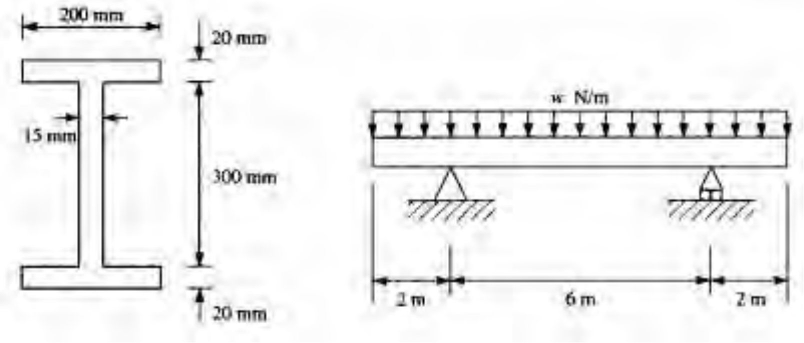
با حذف R_C از معادلات ۹-۷۹ و ۹-۸۰ داریم:

$$W_U = \frac{6M_P}{L} \qquad (۹-۸۱)$$

یکی از روش‌های مفید در تحلیل استفاده از اصول کارمجازی است. در حالتی که سازه دارای تعادل بوده و به میزان کوچکی در آن تغییرمکان مجازی ایجاد شود، مقدار کار انجام شده توسط نیروهای داخلی و خارجی با هم برابر است.

مسائل

۹-۱) یک تیر به طول ۱۰ متر با مقطع نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. در صورتی که حداکثر تنش قابل تحمل برای تیر برابر $150N/mm^2$ باشد، مقدار حداکثر شدت باری که می‌توان به صورت یکنواخت بر روی تیر گذاشت چقدر است؟



حل)

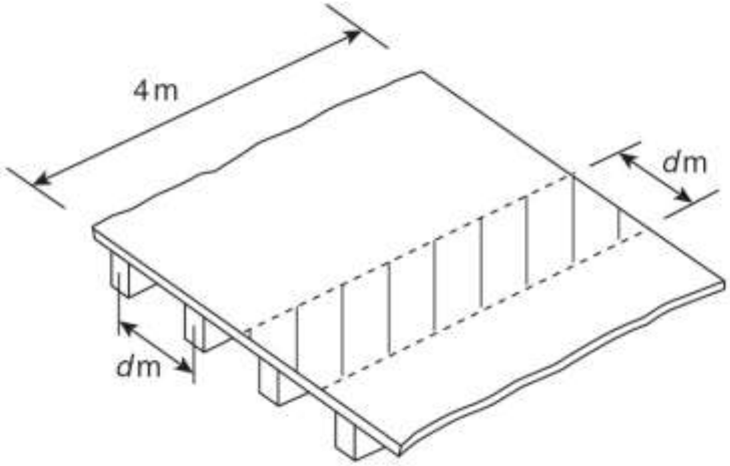
$$I_z = \frac{200\times 340^3}{12} - \frac{185\times 300^3}{12} = 2.39\times 10^8 mm^4$$

$$150 = \frac{2.5w\times 10^6 \times 170}{2.39\times 10^8} \quad \Rightarrow \quad w = 84.3\frac{kN}{m}$$

۹-۲) یک تیر به صورت کنسول به ابعاد *230* در *300mm* و با مقطع مستطیلی و با طول *2.5* متر نیروی *13300N* را در انتهای خود تحمل می‌کند. مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در تیر را در اثر لنگر خمشی بدست آورید.

$$\sigma_{\max} = \frac{33250\times 10^3 \times 150}{5.175\times 10^8} = 9.6\frac{N}{mm^2}$$

۹-۳) یک سقف بار گسترده $16kN/m^2$ را تحمل می‌کند به صورتی که توسط تیرچه‌هایی با عمق *300mm* و عرض *110mm* نگهداری می‌شود. تیرچه‌ها به صورت دو سر مفصل هستند. همچنین طول هر تیرچه برابر *4m* می‌باشد. در صورتی که حداکثر تنش قابل تحمل برای تیرچه‌ها برابر $7N/mm^2$ باشد، مقدار فاصله مرکز به مرکز تیرچه‌ها چه مقدار می‌تواند باشد؟



$$7 = \frac{32d\times 10^6 \times 150}{2.475\times 10^8} \quad \Rightarrow \quad d = 0.36m$$

۹-٤) یک دکل چوبی به ارتفاع *15m* به صورت خطی تا بالا باریک شده است به طوری که در پایین خود داری قطر *250mm* و در انتها دارای قطر *100mm* می‌باشد. در صورتی که

حداکثر تنش قابل تحمل برای چوب برابر $35N/mm^2$ باشد، تیر در چه نقطه‌ای تحت بار افقی می‌شکند؟ مقدار بار را بدست آورید.

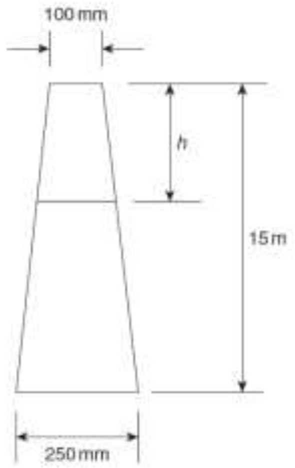
حل) در شکل زیر شکل دکل نمایش داده شده است:

می‌توانیم با استفاده از فاصله h از بالای دکل مقدار قطر را بدست آوریم:

$$d = 100 + \left(\frac{h}{15}\right) \times 150 \quad \Rightarrow \quad d = 100 + 10h$$

مقدار تنش نرمال حداکثر ایجاد شده در اثر خمش توسط رابطه ۹-۹ بدست می‌آید:

$$\sigma_{\max} = \frac{ph \times 10^3 \times \left(\frac{d}{2}\right)}{\left(\frac{\pi \times d^4}{64}\right)} = \frac{ph \times 10^3 \times 32}{\pi \times d^3}$$



$$0 = \left(\frac{32 \times 10^3 P}{\pi}\right) \frac{(100+10h)^3 - 3h(100+10h)^2 \times 10}{(100+10h)^6}$$

$$100 + 10h = 30h \quad \Rightarrow \quad h = 5m$$

$$35 = \frac{P \times 5 \times 10^6 \times 75}{\left(\frac{\pi \times 150^4}{64}\right)} \quad \Rightarrow \quad P = 2320N$$

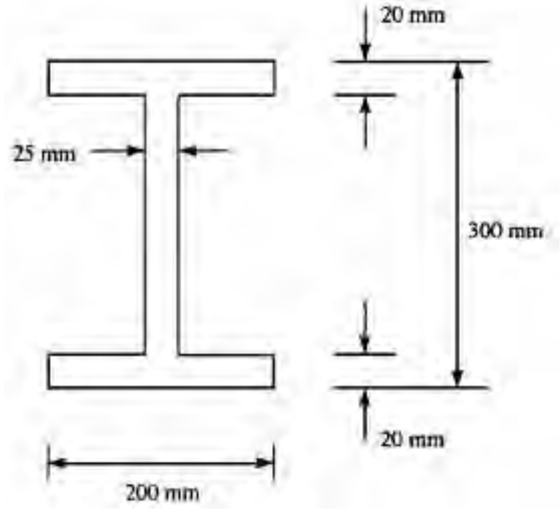
۹-۵) یک تیر فولادی به طول $5m$ و در دو انتهای خود به صورت دو سر مفصل قرار گرفته است. دو تیر فرعی به فواصل 1.5 و 3 متر از یک انتهای این تیر بر روی آن قرار

گرفته‌اند و هر کدام از آنها نیرویی معادل *20kN* بر روی تیر اصلی اعمال می‌کنند. تیر اصلی را با استفاده از روش تنش مجاز طراحی کنید. فرض کنید تنش مجاز قابل حمل برای تیر برابر $155N/mm^2$ باشد.

$$Z = \frac{30\times10^6}{155} = 193548.4mm^3$$

با استفاده از جدول مقاطع استاندارد، پروفیل *IPE200* انتخاب می‌شود.

۹-٦) یک ستون کوتاه با مقطع نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید که نیروی فشاری P در مرکز یکی از بال‌های آن اعمال می‌شود. در صورتی که مقدار تنش حداکثر در آن از برابر $150N/mm^2$ فرض شود، مقدار بار P را بدست آورید.



حل) سطح مقطع ستون برابر است با:

$$A = 200\times300 - 175\times260 = 14500\,mm^2$$

با استفاده از بخش ۹-٦ مقدار گشتاور دوم سطح نسبت به محورz برابر است با:

$$I_z = \frac{200\times300^3}{12} - \frac{175\times260^3}{12} = 1.94\times10^8\,mm^4$$

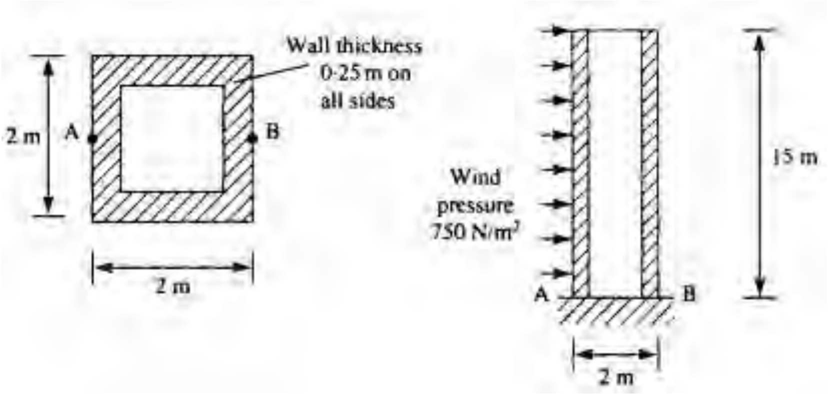
مقدار حداکثر تنش فشاری در دورترین تارهای بال اتفاق می‌افتد. با استفاده از رابطه۹-۱۵ داریم:

$$-150 = \frac{-P}{14500} + \frac{-P\times140}{1.94\times10^8}\times150 \quad\Rightarrow\quad P = 846.4kN$$

۹-۷) یک دودکش قائم از آجر ساخته شده است. مقطع این دودکش به شکل مربع مستطیل نشان داده شده در شکل زیر است. ارتفاع بنا برابر ۱۵متر و چگالی آجر برابر $2000kg/m^3$ است. در صورتی که فشار معادل اعمال شده توسط باد برابر $750N/m^2$ باشد، مقدار تنش در نقاط A و B نشان داده شده در مقطع دودکش را تعیین کنید.

حل) سطح مقطع دودکش برابر است با:

$$A = 2\times 2 - 1.5\times 1.5 = 1.75m^2$$



گشتاور دوم سطح برابر است با:

$$I = \frac{2\times 2^3}{12} - \frac{1.5\times 1.5^3}{12} = 0.552m^4$$

وزن دودکش برابر است با:

$$W = 1.75\times 15\times 2000\times 9.81\times 10^{-3} = 515.03kN$$

شدت بار ناشی از اعمال باد برابر است با:

$$w = 750\times 2\times 10^{-3} = 1.5\frac{kN}{m}$$

مقدار حداکثر لنگر در پای دودکش اتفاق می‌افتد و برابر است با:

$$M_{\max} = \frac{1.5\times 15^2}{2} = 168.75kN.m$$

مقدار تنش مستقیم در نقطه A با استفاده از روابط ۷-۱ و ۹-۹ برابر است با:

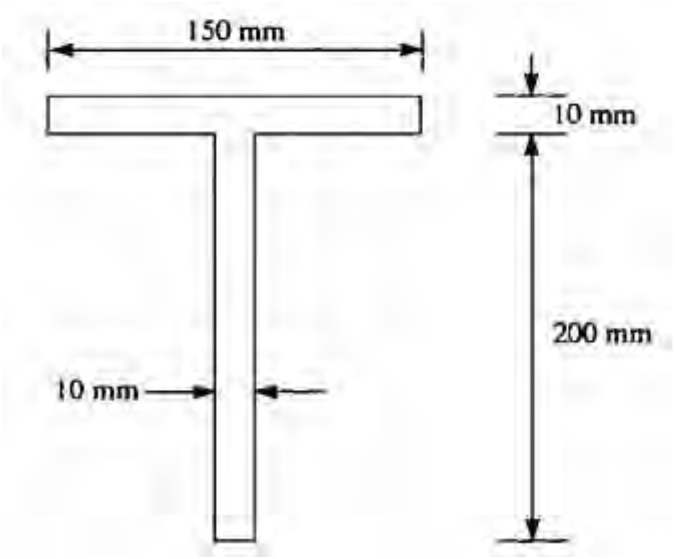
$$\sigma_A = \frac{-515.03\times 10^3}{1.75\times 10^6} + \frac{168.75\times 10^6\times 1\times 10^3}{0.552\times 10^{12}} =$$

$$-0.29+0.31=0.02\frac{N}{mm^2}$$ کششی

همچنین مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در نقطه B برابر است با:

$$\sigma_A=-0.29-0.31=-0.6\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

۹-۸) یک تیر طره به طول ۲ متر با مقطع نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید، در صورتی که این تیر بار گسترده به شدت *5kN/m* را تحمل کند و همچنین در انتهای آن نیروی متمرکز *100kN* اعمال شود، مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در تیر در اثر خمش را تعیین کنید.



حل) سطح مقطع تیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$A=150\times10+10\times200=3500\,mm^2$$

در گام بعدی مرکز سطح شکل تعیین می‌شود:

$$3500\,\bar{y}=150\times10\times5+10\times200\times110 \quad\Rightarrow\quad \bar{y}=65mm$$

با توجه به مفاهیم ارائه شده در بخش ۹-۶ مقدار گشتاور دوم سطح نسبت به محور z برابر است با:

$$I_z=\frac{150\times65^3}{3}-\frac{150\times55^3}{3}+\frac{10\times145^3}{3}=15.6\times10^6\,mm^4$$

$$M_{\max} = \frac{-5\times 2^2}{2} = -10kN.m$$

مقدار تنش در تارهای بالایی بال برابر است با:

$$\sigma = \frac{10\times 10^6 \times 65}{15.6\times 10^6} = 41.7\frac{N}{mm^2}$$ کششی

مقدار تنش در تارهای پایینی جان برابر است با:

$$\sigma = \frac{10\times 10^6 \times (-145)}{15.6\times 10^6} = -92.9\frac{N}{mm^2}$$

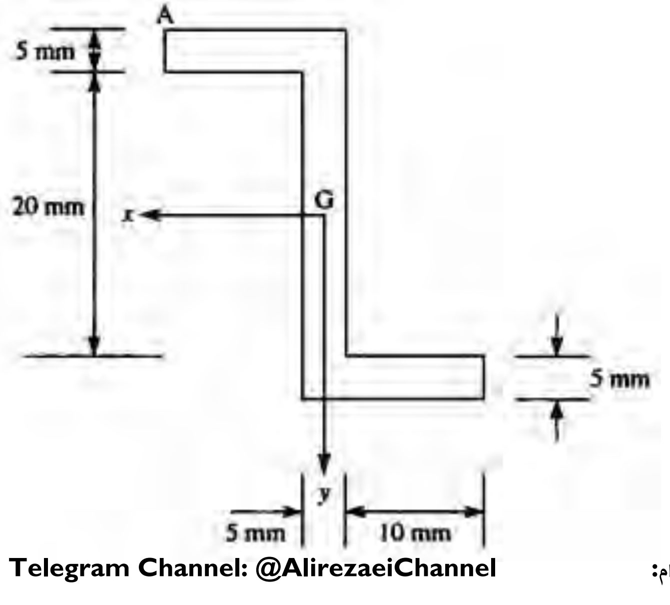
همچنین علاوه بر تنش خمشی، یک تنش یکنواخت دیگر به صورت محوری وجود دارد:

$$\sigma_{axial} = \frac{-100\times 10^3}{3500} = -28.6\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

به وضوح روشن است که تنش حداکثر در تارهای پایینی جان اتفاق می‌افتد:

$$\sigma_{\max} = -92.9 - 28.6 = -121.5\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

۹-۹) تیر نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. مشخصات هندسی مقطع I_x و I_y وI_{xy} را با توجه به محورهای افقی و قائم نشان داده شده در شکل بدست آورید. همچنین مقدار تنش ایجاد شده در نقطه A را به سبب لنگر خمشی $M_y=55N.m$ تعیین کنید.



$$I_z = 2\left(\frac{15\times5^3}{12}+15\times5\times12.5^2\right)+\frac{5\times20^3}{12}=27083.3mm^4$$

$$I_y = 2\left(\frac{5\times15^3}{12}+15\times5\times5^2\right)+\frac{20\times5^3}{12}=6770.8mm^4$$

$$I_{zy} = 5\times15(5)(12.5)+5\times15(-5)(-12.5)=9375.0mm^4$$

نقطه A دارای مختصات $z=12.5mm$, $y=15mm$ است. لنگر اعمال شده برابر است با:

$$M_y = 55N.m \qquad M_z = 0$$

$$I_zI_y - I_{zy}^2 = 27083.3\times6770.8-9375.0^2 = 9.548\times10^7$$

$$\sigma_x = -\left(\frac{55\times10^3\times27083.3}{9.548\times10^7}\right)12.5-\left(\frac{55\times10^3\times9375.0}{9.548\times10^7}\right)15$$

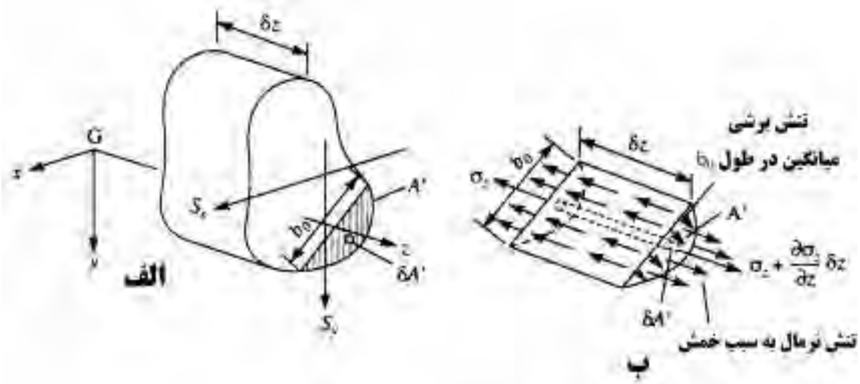
$$\Rightarrow \sigma_x = -114\frac{N}{mm^2}$$

فصل دهم
برش در تیر

در فصل سوم در مورد نیروهای داخلی در تیرها بحث کردیم و دیدیم که در هر مقطعی از تیر برای اینکه تعادل تیر برقرار شود بایستی نیروهایی داخلی در آن مقطع وجود داشته باشند. میزان توزیع نیروهای برشی در هر مقطع از تیر به هندسه آن بستگی دارد. در فصل حاضر به بررسی توزیع تنش برشی در یک مقطع غیر متقارن خواهیم پرداخت.

۱۰-۱ توزیع تنش برشی در یک تیر با مقطع نامتقارن

المان δz در یک تیر با مقطع دلخواه مانند شکل۱۰-۱ را در نظر بگیرید. در این مقطع نیروهای برشی S_x و S_y در جهات x و y اثر می‌کنند. نقطه G مرکز سطح مقطع تیر می‌باشد که مبداء محورهای xyz نیز هست. فرض می کنیم که مقطع تیر در اثر نیروهای برشی S_x و S_y دچار هیچ تاب خوردگی نمی‌شود. در شکل۱۰-۱ب یک برش به عرض b_0 در طول المان نشان داده شده است.



شکل۱۰-۱توزیع تنش برشی در یک تیر با مقطع دلخواه

همانطور که قبلاً در فصل هفتم اشاره شد تنش‌های نرمال، عمود بر سطح و تنش‌های برشی مماس بر سطح می‌باشند. در هر سطح مقطع $\delta A'$ مقدار تنش نرمال موجود برابر σ_z و مقدار تنش نرمال در فاصله $z+\delta z$ برابر $\sigma_z + (\partial \sigma_z / \partial z)\delta z$ می‌باشد. در این مقطع

برای اینکه تیر در جهت z در حال تعادل باشد بایستی مجموع نیروها در این جهت برابر صفر باشد.

$$\tau \times b_0 \times \delta z + \int_{A'} \sigma_z dA' - \int_{A'} \left(\sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \delta z \right) dA' = 0$$

$$\tau \times b_0 = \int_{A'} \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dA' \qquad (۱-۱۰)$$

در اینجا فرض می‌کنیم که تنش نرمال ایجاد شده توسط خمش در تیر توسط روش نشان داده شده در تئوری خمش خالص بدست می‌آید. بنابراین برای یک تیر با مقطع دلخواه و نامتقارن داریم:

$$\sigma_z = \frac{\overline{M}_x}{I_x} y + \frac{\overline{M}_y}{I_y} x$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\partial \overline{M}_x}{\partial z} \frac{y}{I_x} + \frac{\partial \overline{M}_y}{\partial z} \frac{x}{I_y}$$

با استفاده از مفاهیم ارائه شده در بخش ۹-۹ داریم:

$$\frac{\partial \overline{M}_x}{\partial z} = \overline{S}_y \quad , \quad \frac{\partial \overline{M}_y}{\partial z} = \overline{S}_x$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{\overline{S}_y}{I_x} y + \frac{\overline{S}_x}{I_y} x$$

با جانشانی $\partial \sigma_z / \partial z$ در رابطه ۱۰-۱ داریم:

$$\tau \times b_0 = \int_{A'} \frac{\overline{S}_y}{I_x} y dA' + \int_{A'} \frac{\overline{S}_x}{I_y} x dA'$$

$$\tau = \frac{\overline{S}_y}{I_x \times b_0} \int_{A'} y dA' + \frac{\overline{S}_x}{I_y \times b_0} \int_{A'} x dA' \qquad (۲-۱۰)$$

۱۰-۲ توزیع تنش برشی در یک مقطع متقارن

در مهندسی عمران اغلب با تیرهایی سروکار داریم که دارای محورهای متقارت هستند و معمولاً تیرهای نامتقارن کاربرد کمی دارند. شکل۱۰-۲ را در نظر بگیرید. فرض نمایید که این تیر تحت نیروی برشی S_y در جهت محور yها قرار گرفته است. از آنجایی که محورy برای این مقطع به عنوان یک محور تقارن محسوب می‌شود بنابراین حاصل ضرب گشتاور

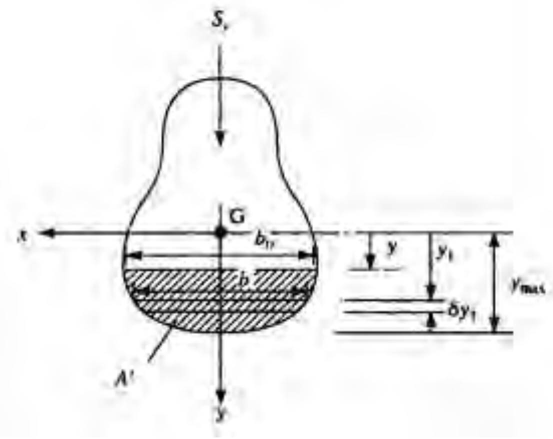
دوم سطح (با توجه به مفاهیم بخش ۹-۶) برای این مقطع $I_{xy}=0$ است. بنابراین با توجه به روابط ۹-۵۹ و ۹-۶۰ داریم:

$$\bar{S}_y = S_y \quad , \quad \bar{S}_x = S_x = 0$$

با استفاده از رابطه ۱۰-۲ داریم:

$$\tau = \frac{S_y}{I_x \times b_0}\int_{A'} y dA' \qquad (۱۰-۳)$$

به وضوح روشن است که مقدار تنش برشی در مقطع تیر در جهت اعمال نیرو می‌باشد.



شکل ۱۰-۲ توزیع تنش در یک مقطع متقارن

برای تعیین توزیع تنش در مقطع، یک برش به بعد b_0 موازی و به فاصله y از محور xها در نظر می‌گیریم. مقدار انتگرال در رابطه ۱۰-۳ مقدار گشتاور اول سطح را بدست می‌دهد. با بازنویسی رابطه ۱۰-۳ داریم:

$$\tau = \frac{S_y \times A' \times \bar{y}}{I_x \times b_0} \qquad (۱۰-٤)$$

از آنجایی که $\bar{y}$ فاصله مرکز سطح A' از محور می‌باشد. داریم:

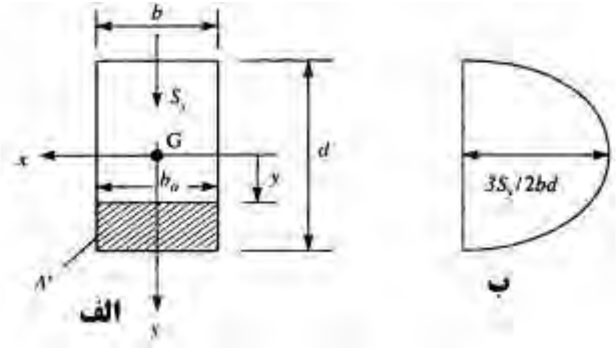
$$\tau = \frac{S_y}{I_x \times b_0}\int_{y}^{y_{max}} b \times y_1 \times dy_1 \qquad (۱۰-۵)$$

از روابط ۱۰-٤ و ۱۰-۵ می‌توان برای تعیین توزیع تنش برشی قائم در یک تیر که دارای حداقل یک محور تقارن افقی یا قائم که در معرض نیروی برشی در امتداد محور قائم است استفاده نمود.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\tau = \frac{S_y \times A' \times \bar{x}}{I_y \times b_0} \quad , \quad \tau = \frac{S_x}{I_y \times b_0}\int_{x}^{x_{\max}} b \times x_1 \times dx_1 \qquad (۱۰-٦)$$

مثال۱۰-۱) توزیع تنش در تیر با مقطع نشان داده شده در شکل۱۰-۳ به سبب نیروی برشی S_y را تعیین کنید.



شکل۱۰-۳ توزیع تنش برشی در مقطع مستطیلی

در این مثال مقدار $\bar{y}$ برای برش A' به آسانی با استفاده از رابطه ۱۰-۳ بدست می‌آید. با استفاده از شکل۱۰-۳ داریم.

$$b_0 = b \quad , \quad I_x = \frac{bd^3}{12}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

$$\tau = \frac{12S_y}{b^2d^3} b\left(\frac{d}{2} - y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y\right)$$

$$\tau_f = \frac{6S_y}{bd^3}\left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) \qquad (۱۰-۷)$$

توزیع تنش بدست آمده به صورت سهمی می‌باشد که در شکل۱۰-۳ب نشان داده شده است.

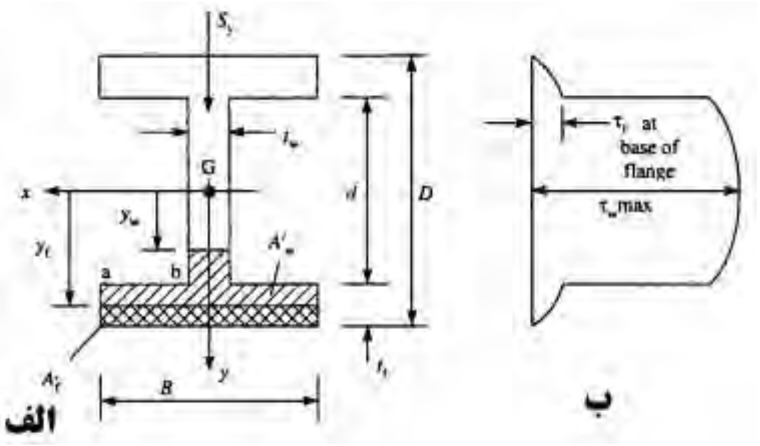
مثال۱۰-۲) توزیع تنش قائم در تیر با مقطع I شکل که در شکل۱۰-٤ نشان داده است را به سبب نیروی برشی S_y را تعیین کنید.

در این مثال با زدن برش‌های A'_f و A'_w به فاصله y_f و y_w ، از مرکز سطح مقطع مقدار تنش قائم برشی به صورت زیر بدست می‌آید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\tau_f = \frac{S_y}{B \times I_x} \frac{B}{2}\left(\frac{D}{2} - y_f\right)\left(\frac{D}{2} + y_f\right)$$

$$\tau_f = \frac{S_y}{2I_x}\left(\frac{D^2}{4} - y_f^2\right) \tag{۸-۱۰}$$



شکل ۱۰-۴ توزیع تنش برشی در مقطع I شکل

که I_x گشتاور دوم سطح مقطع نسبت به محور مرکز سطح شکل می‌باشد.

$$\tau_f = \frac{S_y}{8I_x}\left(D^2 - d^2\right) \tag{۹-۱۰}$$

$$\tau_w = \frac{S_y}{t_w I_x}\left[B\left(\frac{D}{2} - \frac{d}{2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{d}{2}\right) + t_w\left(\frac{d}{2} - y_w\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2} + y_w\right)\right]$$

$$\tau_w = \frac{S_y}{t_w I_x}\left[\frac{B}{8}\left(D^2 - d^2\right) + \frac{t_w}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y_w^2\right)\right] \tag{۱۰-۱۰}$$

یا

$$\tau_w = \frac{S_y}{I_x}\left[\frac{B}{8t_w}\left(D^2 - d^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2}{4} - y_w^2\right)\right] \tag{۱۱-۱۰}$$

توزیع تنش سهمی شکل به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\tau_w = \frac{S_y}{I_x}\frac{B}{8t_w}\left(D^2 - d^2\right) \tag{۱۲-۱۰}$$

در $y_w = d/2$ ، مقدار حداکثر تنش برشی به صورت زیر حاصل می‌شود.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\tau_{w(\max)} = \frac{S_y}{I_x}\left[\frac{B}{8t_w}\left(D^2 - d^2\right) + \frac{d^2}{8}\right] \qquad (۱۳-۱۰)$$

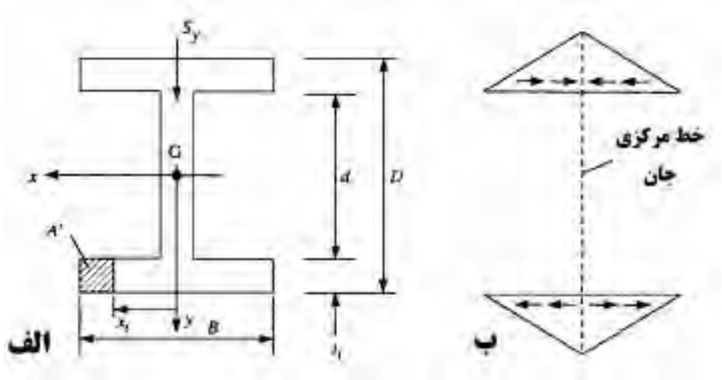
با استفاده از روابط ۱۰-٤ و ۱۰-۵ و با قرار دادن $b_0=t_f$ داریم:

$$\tau_{f(h)} = \frac{S_y}{t_f I_x} t_f \left(\frac{B}{2} - x_f\right)\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2} + \frac{d}{2}\right)$$

که $\tau_{f(h)}$ توزیع افقی تنش برشی در بال است.

$$\tau_{f(h)} = \frac{S_y\left(D + d\right)}{4I_x}\left(\frac{B}{2} - x_f\right) \qquad (۱٤-۱۰)$$

رابطه۱۰-٤ توزیع تنش برشی را در بال تیر نشان می‌دهد.



شکل۱۰-۵ توزیع تنش برشی افقی در بال تیر I شکل

در شکل۱۰-۵ توزیع تنش در بال تیر نشان داده شده است. دیده می‌شود توزیع تنش در بال به صورت خطی است. با استفاده از رابطه ۱۰-۱۲ در صورتی که مقدار برش را در بعد جان ضرب نماییم، داریم:

$$\tau_w t_w = \frac{S_y}{I_x}\frac{B}{8}\left(D + d\right)\left(D - d\right) = \frac{S_y}{I_x}\frac{B}{8}\left(D + d\right)2t_f \qquad (۱۵-۱۰)$$

حاصل ضرب مساحت بال افقی در تنش برشی برابر است با:

$$\tau_{f(h)} t_f = \frac{S_y}{I_x}\frac{B}{8}\left(D + d\right)t_f \qquad (۱٦-۱۰)$$

با مقایسه روابط ۱۰-۱٦و ۱۰-۱۵ داریم:

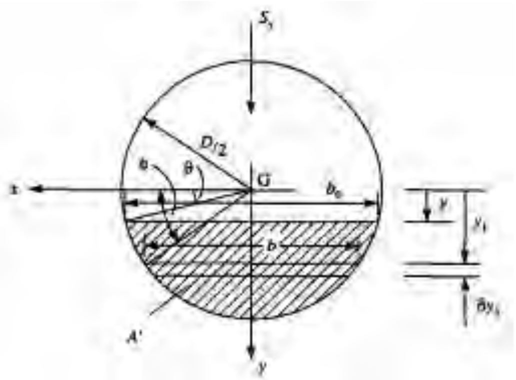
$$\tau_w t_w = 2\tau_{f(h)} t_f \qquad (۱۷-۱۰)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حاصل ضرب مقدار برش در ضخامت، جریان برش را بدست می‌دهد.

مثال۱۰-۳) توزیع تنش قائم در تیر با مقطع دایره‌ای که در شکل۱۰-۶ نشان داده است را به سبب نیروی برشی S_y را تعیین کنید.



شکل۱۰-۶ توزیع تنش برشی در مقطع دایره

$$\tau = \frac{S_y}{b_0 I_x}\int_{y}^{D/2} b\times y_1\times dy_1 \qquad (۱۰-۱۸)$$

که در این رابطه داریم:

$$I_x = \frac{\pi\times D^4}{64}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه ۱۰-۱۸ داریم:

$$b_0 = 2\times\frac{D}{2}\cos\theta$$

$$b = 2\times\frac{D}{2}\cos\phi$$

$$y_1 = \frac{D}{2}\sin\phi$$

$$dy_1 = \frac{D}{2}\cos\phi\times d\phi$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۱۰-۱۸ داریم:

$$\tau = \frac{16 S_y}{\pi\times D^2\cos\theta}\int_{\theta}^{\pi/2}\cos^2\phi\times\sin\phi\times d\phi$$

با استفاده از انتگرال گیری از رابطه اخیر داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\tau = \frac{16S_y}{\pi \times D^2 \cos\theta}\left[-\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_{\theta}^{\pi/2}$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{16S_y}{3\pi \times D^2}\cos^2\theta$$

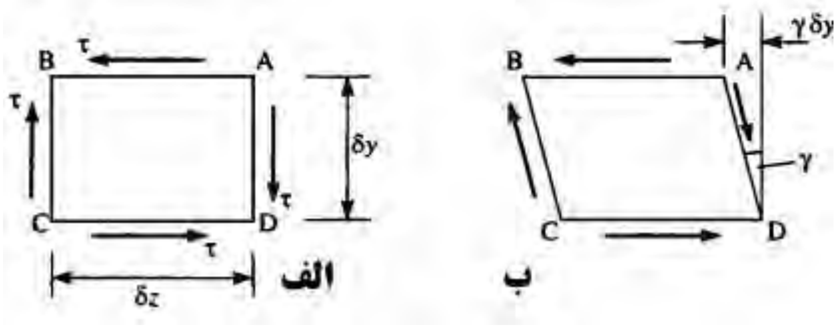
$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-\left(\frac{y}{D/2}\right)^2$$

بنابراین:

$$\tau = \frac{16S_y}{3\pi \times D^2}\left(1-\frac{4y^2}{D^2}\right) \qquad (۱۰-۱۹)$$

۱۰-۳ انرژی کرنشی به سبب برش

یک المان کوچک مستطیلی به ابعاد δy و δz و به ضخامت t را در نظر بگیرید که در معرض تنش برشی قرار دارد. در اثر این تنش برشی، المان دچار کرنش برشی γ می‌شود. این المان در شکل ۱۰-۷ب نشان داده شده است.



شکل ۱۰-۷ انرژی کرنشی به سبب برش ایجاد شده

مقدار جابجایی افقی ضلع AB برابر با $\gamma\delta y$ است. همچنین مقدار انرژی کرنشی بوجود آمده در این المان برابر است با:

$$\delta U = \frac{1}{2}\tau \times t \times \delta z \times \gamma \times \delta y$$

$$\delta U = \frac{1}{2}\tau \times \gamma \times t \times \delta z\delta y$$

حال با توجه به اینکه $\gamma = \tau / G$ و G مدول برشی و $t\delta z\delta y$ برابر حجم المان است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

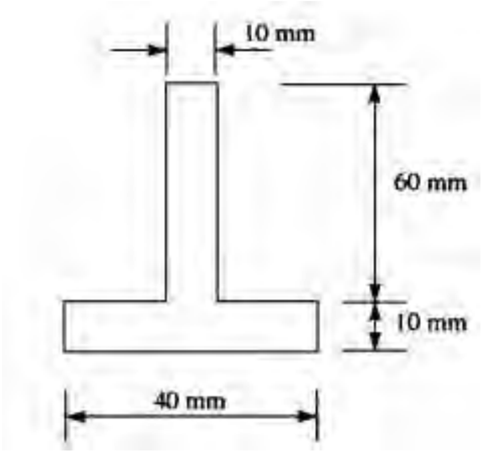
$$\delta U = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}\times(\text{volume of element})$$

بنابراین مقدار کرنش برشی ایجاد شده U برابر است با:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\tau^2}{G}\times(\text{volume of member}) \qquad (۱۰-۲۰)$$

مسائل

۱۰-۱) یک تیر کنسول به شکل T معکوس نشان داده شده در شکل زیر یک نیروی متمرکز به میزان $4kN$ که در جهت پایین به تیر اعمال می‌شود را تحمل می‌کند. توزیع تنش در این تیر را تعیین کنید.



$$A = 10\times 60 + 40\times 10 = 1000\,mm^2$$

با توجه شکل زیر داریم:

$$1000\,\bar{y} = 10\times 60\times 40 + 40\times 10\times 5 \quad\Rightarrow\quad \bar{y} = 26mm$$

$$I_z = \frac{10\times 60^3}{12} + 10\times 60\times 14^2 + \frac{40\times 10^3}{12} + 40\times 10\times 21^2$$

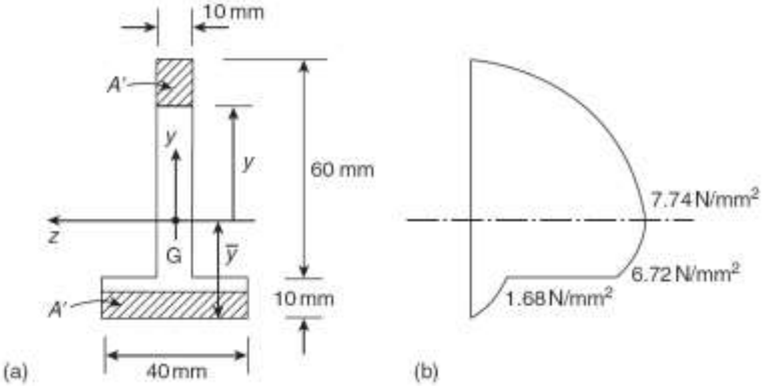
$$\Rightarrow I_z = 4.77\times 10^5\,mm^4$$

$$A' = 10(44-y) \quad , \quad b_0 = 10mm$$

$$\bar{y} = \frac{(44+y)}{2}$$

که با استفاده از رابطه ۱۰-٤ داریم:

$$\tau = \frac{4\times10^3\times10(44-y)\left(\frac{44+y}{2}\right)}{10\times4.77\times10^5} = 0.004\left(44^2-y^2\right)$$



که مقدار حداکثر تنش در $y=0$ برابر است با: $\tau = 7.74 N/mm^2$

به طور مشابه برای بال داریم:

$$\tau = \frac{4\times10^3\times40(26-y)\left(\frac{26+y}{2}\right)}{40\times4.77\times10^5} = 0.004\left(26^2-y^2\right)$$

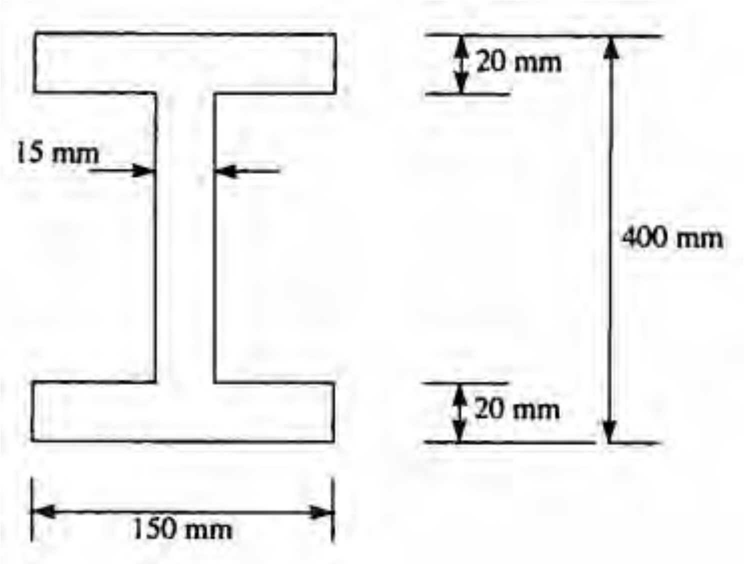
۱۰-۲) یک تیر با مقطع I شکل، یک بار متمرکز قائم برابر با $80kN$ را تحمل می‌کند. مقدار درصد برشی که جان تیر تحمل می‌کند را تعیین کنید.

حل)

$$I_z = \frac{150\times400^3}{12} - \frac{135\times360^3}{12} = 2.75\times10^8 mm^4$$

$$\text{در بال}\ \tau = \frac{80\times10^3\left(\frac{400^2}{4}-y^2\right)}{2\times2.75\times10^8} = 1.45\times10^{-4}\left(40000-y^2\right)$$

$$\tau=\frac{80\times10^{3}\left(\frac{150\left(400^{2}-360^{2}\right)}{8\times15}+\frac{\left(\frac{360^{2}}{4}-y^{2}\right)}{2}\right)}{2\times2.75\times10^{8}}=15.77-1.45\times10^{-4}y^{2}$$

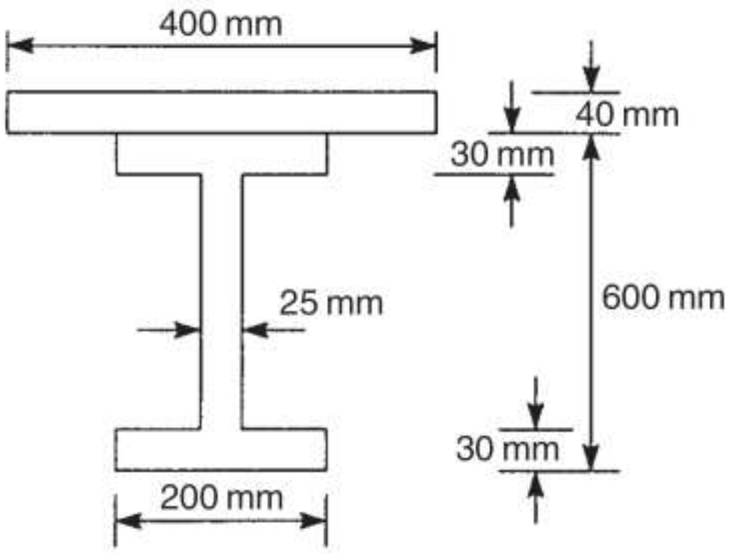


$$S(web)=2\int_{0}^{180}15\left(15.77-1.45\times10^{-4}y^{2}\right)dy=76701.6N$$

بنابراین میزان درصد برشی که به جان می‌رسد برابر است با:

$$\frac{76.7}{80}\times100=95.9\%$$

۱۱-۳) تیر I شکل نشان داده شده در شکل زیر توسط یک ورق مسطح در بالای خود تقویت شده است. در صورتی که تیر نشان داده شده تحت یک نیروی متمرکز به بزرگی $200kN$ قرار گرفته باشد، مقدار تنش برشی در نقاط بالای محور خنثی تیر مرکب را تعیین نمایید.



حل)

$$A = 400 \times 40 + 2 \times 200 \times 30 + 25 \times 540 = 21500\, m^2$$

با مراجعه به شکل تیر و با گشتاورگیری حول تار بالایی ورق داریم:

$$41500\, \bar{y} = 400 \times 40 \times 20 + 200 \times 30 \times 55 + 25 \times 540 \times 340 + 200 \times 30 \times 625$$

$$\bar{y} = 216.6mm$$

حال می‌توانیم گشتاور دوم سطح را برای شکل بدست آوریم:

$$I_z = \frac{400 \times 40^3}{12} + 400 \times 40 \times 196.6^2 + \left(\frac{200 \times 600^3}{12} - \frac{175 \times 540^3}{12} \right)$$

$$+ (200 \times 600 - 175 \times 540) \times 123.5^2 = 2.31 \times 10^9\, mm^4$$

در ورق بالایی:

$$A' = 400(216.6 - y) \quad , \quad \bar{y} = \frac{(216.6 + y)}{2} \quad , \quad b_0 = 400mm$$

$$\tau = 4.33 \times 10^{-5} \left(216.6^2 - y^2 \right)$$

وقتی که $y=216.6mm$ و $\tau = 0$

وقتی که $y=176.6mm$ و $\tau = 0.68 N / mm^2$

در بال بالایی تیر $b_0 = 200mm$ و

$$A'\bar{y} = [400 \times 40 \times 196.6 + 200(176.6 - y)(176.6 + y)/2]$$

در نتیجه:

$$\tau = 4.33 \times 10^{-7}\left(6.26 \times 10^6 - 100y^2\right)$$

وقتی که *y=176.6mm* باشد، $\tau = 1.36N/mm^2$

وقتی که *y=146.6mm* باشد، $\tau = 1.78N/mm^2$

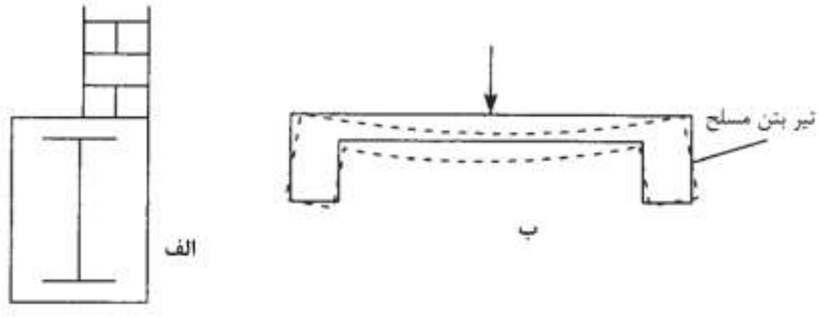
Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل یازدهم

پیچش

مقدمه

پیچش[1] در تیرها عموماً به سبب بارهای عمود بر محور تیر که محل اعمال آنها بر مرکز برش مقطع تیر منطبق نیست، بوجود می‌آید. شکل۱۱-۱ موقعیت‌های مختلف اعمال بار که باعث ایجاد پیچش در تیر می‌شود را نشان می‌دهد. در شکل ۱۱-۱الف یک تیر I شکل را نشان می‌دهد که توسط بتن دورگیر شده است و دیوار بنایی[2] روی تیر با فاصله‌ای از محور تقارن تیر بر روی آن اعمال می‌شود. همچنین در شکل۱۱-۱ب نیز یک دال بتنی نشان داده شده است که تحت اثر بارهای ثقلی اعمال شده بر روی دال، تیرهای پیرامونی تحت پیچش قرار گرفته است.



شکل۱۱-۱ علت‌های ایجاد پیچش در تیرها

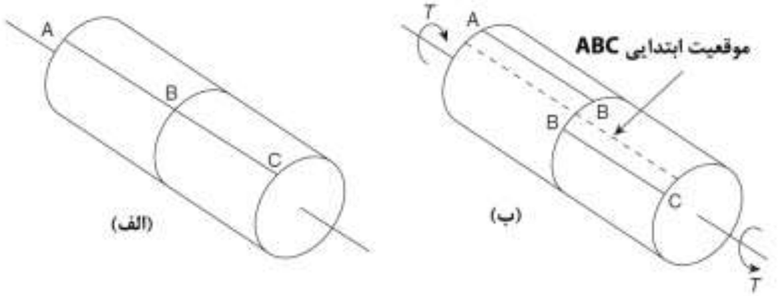
حل مسئله پیچش در تیرهای با مقطع غیر دایره‌ای و با شکل دلخواه کار پیچیده‌ای است، حتی گاهی جواب دقیقی برای آنها موجود نیست.

۱۱-۱ پیچش در مقاطع توپر و توخالی دایره‌ای

فرض کنید مقطع دایره‌ای نشان داده شده در شکل۱۱-۲ الف در موقعیت مشخص شده در امتداد محور طولی بریده و به دو قطعه تقسیم شده است.

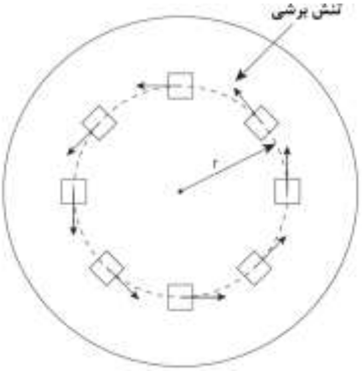
[1] Torsion
[2] Masonry wall

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱۱-۲ پیچش در یک مقطع دایره‌ای

خط ABC در امتداد میله در نظر گرفته شده و دو لنگر پیچشی به اندازه T مطابق شکل ۱۱-۲ب به میله اعمال می‌شود. توجه شود که جهت لنگرهای اعمال شده در جهت عکس یکدیگر هستند. دو قطعه از میله در جهت‌های مخالف نسبت به یکدیگر دوران می‌کنند بنابراین خط ABC به صورت پله‌ای از هم جدا خواهد شد. در این حالت بایستی یک لغزش نسبی بین دو سطح تماس ایجاد شده باشد.

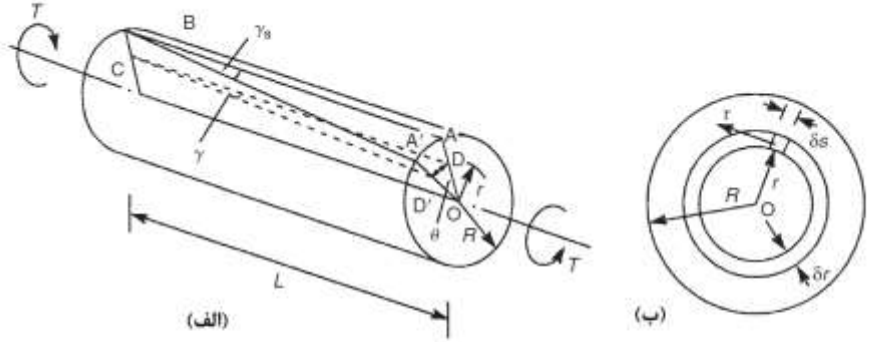


شکل ۱۱-۳ تنش برشی ایجاد شده در اثر یک گشتاور پیچشی خالص

در صورتی که این دو قسمت جدا شده را به هم بچسبانیم، از لغزش ایجاد شده جلوگیری می‌شود. بنابراین بایستی یک نیروی داخل صفحه‌ای به اندازه نیروی T ایجاد شود که از این حرکت جلوگیری کند. توزیع نیروهای داخلی ایجاد شده بر روی هر یک از سطوح مقطع باید به گونه‌ای باشد که برآیند کل آنها، با کل گشتاور T برابر شود. اثر این گشتاور پیچشی که باعث ایجاد تنش‌های برشی در مقطع می‌شود در شکل ۱۱-۳ نشان داده شده است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

یک مقطع دایره‌ای به طول L در معرض دو لنگر پیچشی معادل و مخالف جهت یکدیگر به اندازه T مطابق شکل ۱۱-٤الف در نظر بگیرید. مقدار پیچش در هر مقطعی از این میله ثابت و برابر با T می‌باشد. فرض می‌نماییم که هر مقطعی از میله بَعد از اعمال پیچش به صورت صفحه‌ای باقی می‌ماند. خط AB در امتداد محور طولی[1] میله قرار دارد.



شکل ۱۱-٤ پیچش در مقطع دایره‌ای شکل

در اثر پیچش ایجاد شده نقطه A به A' منتقل شده و شعاع OA به اندازه زاویه کوچک θ دوران یافته و در موقعیت OA' قرار می‌گیرد. کرنش برشی γ_s بر روی سطح برابر با اندازه زاویه ABA' بر حسب رادیان است.

$$\gamma_s = \frac{AA'}{L} = \frac{R\theta}{L}$$

به همین نحو، کرنش برشی γ در هر شعاع r توسط زاویه DCD' بدست خواهد آمد:

$$\gamma = \frac{DD'}{L} = \frac{r\theta}{L}$$

تنش برشی τ، در شعاع r، متناسب با کرنش برشی γ به صورت زیر قابل بیان است:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{r\theta}{L}$$

با ساده سازی خواهیم داشت:

$$\frac{\tau}{r} = G\frac{\theta}{L} \qquad (۱-۱۱)$$

با توجه به شکل ۱۱-٤ب مقدار تنش برشی τ ایجاد شده در یک المان δs بر روی حلقه‌ای به شعاع r و پهنای δr به صورت شعاعی، در صفحه مقطع، به صورت ثابت است. به

[1] Longitudinal axis

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

عبارت دیگر مقدار تنش برشی موجود بر روی این حلقه در تمام آن ثابت است. مقدار تنش برشی موجود برابر با $\tau\times\delta r\times\delta s$ می‌باشد. همچنین مقدار گشتاور ایجاد شده حول مرکز O برابر $\tau\times\delta r\times\delta s\times r$ می‌باشد. بنابراین مقدار کل گشتاور ایجاد شده ناشی از تنش‌های برشی روی این حلقه δT، را می‌توان به صورت زیر، با جمع کل آنها بدست آورد:

$$\delta T=\int_0^{2\pi}\tau\delta r.r\,ds=2\pi r^2\tau\delta r$$

همچنین مقدار کل گشتاور پیچش ایجاد شده در مقطع به صورت زیر قابل محاسبه خواهد بود:

$$T=\int_0^R 2\pi\,r^2\tau\,dr \tag{۱۱-۲}$$

با جایگذاری τ از رابطه ۱۱-۱ در رابطه۱۱-۲ داریم:

$$T=\int_0^R 2\pi\,r^2\mathrm{G}\frac{\theta}{\mathrm{L}}\,dr=\frac{\pi R^4}{2}G\frac{\theta}{\mathrm{L}}$$

یا به عبارت دیگر:

$$T=JG\frac{\theta}{L} \tag{۱۱-۳}$$

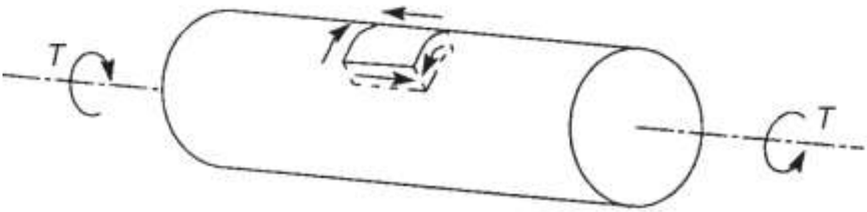
که $J=\pi R^4/2=\pi D^4/32$ گشتاور دوم قطبی[1] مقطع است. همچنین با ترکیب روابط ۱۱-۱ و ۱۱-۳ داریم:

$$\frac{T}{J}=\frac{\tau}{r}=G\frac{\theta}{L} \tag{۱۱-۴}$$

توجه نمایید که برای یک میله با گشتاور پیچشی معین، مقدار حداکثر تنش برشی ایجاد شده در دورترین شعاع آن ایجاد خواهد شد. همچنین تنش‌های برشی ایجاد شده، متمم تنش‌های برشی در صفحه موازی با محور میله هستند. (شکل ۱۱-۵)

[1] Polar second moment of area

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱۱-۵ برش و تنش‌های برشی متمم سطحی بر روی یک مقطع دایره‌ای

پیچش در مقاطع دایره‌ای توخالی

در صورتی که گشتاور پیچشی به مقطعی توخالی، به شعاع خارجی R_o و شعاع داخلی R_i اعمال شود. رابطه ۱۱-۲ به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$T = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi\, r^2 \tau\, dr$$

با جایگذاری مقدار τ از رابطه ۱۱-۲، رابطه فوق به صورت زیر در خواهد آمد:

$$T = \int_{R_i}^{R_o} 2\pi\, r^3 G \frac{\theta}{L}\, dr$$

در نتیجه خواهیم داشت:

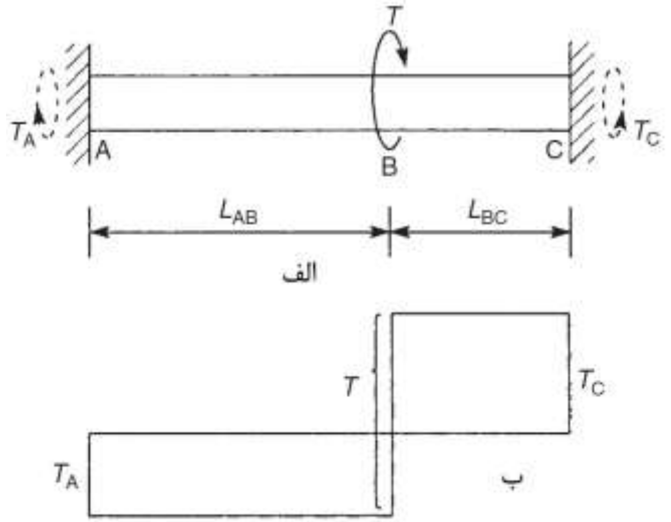
$$T = \frac{\pi}{2}\left(R_o^4 - R_i^4\right) G \frac{\theta}{L}$$

و گشتاور دوم قطبی سطح، J به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$J = \frac{\pi}{2}\left(R_o^4 - R_i^4\right) \qquad (۱۱-۵)$$

مقاطع دایره‌ای نامعین ایستایی تحت پیچش

در بسیاری از حالات مقاطعی که تحت پیچشی قرار می‌گیرند دارای تکیه‌گاه‌هایی هستند که برای آنها شرایط نامعین ایستایی فراهم می‌نمایند. شکل ۱۱-۶الف یک میله با سطح مقطع دایره‌ای یکنواخت را نشان می‌دهد که تحت یک گشتاور متمرکزی در نقطه B قرار دارد.



شکل ۱۱-۶ پیچش در یک مقطع دایره‌ای شکل با تکیه‌گاه‌های ثابت

با نوشتن معادله تعادل[1] داریم:

$$T = T_A + T_C \qquad (۱۱-۶)$$

می‌توان یک معادله همسازی[2] دیگر نیز برای تغییرمکان نقطه B در دو انتهای قسمت‌های AB و BC نوشت. بنابراین زاویه ایجاد شده در دو سمت نقطه B یعنی در قسمت‌های AB و BC باید برابر باشند.

$$\theta_{B(AB)} = \theta_{B(BC)}$$

و یا با استفاده از رابطه ۱۱-۳ داریم:

$$\frac{T_A L_{AB}}{GJ} = \frac{T_C L_{BC}}{GJ}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$T_A = T_C \frac{L_{BC}}{L_{AB}}$$

با جایگذاری در رابطه ۱۱-۶ برای T_A داریم:

$$T = T_C\left(\frac{L_{BC}}{L_{AB}} + 1\right)$$

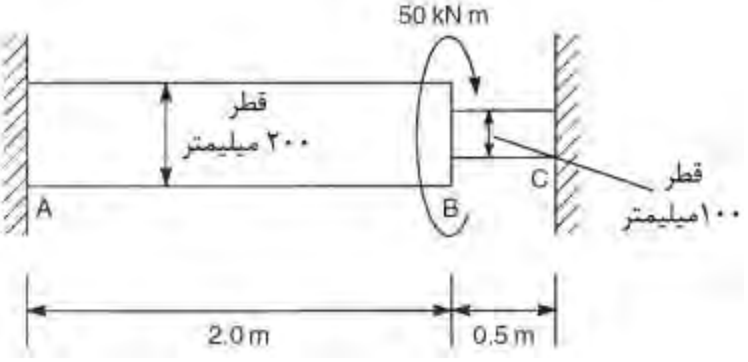
[1] Equilibrium
[2] Compatibility

$$T_C = \frac{L_{AB}}{L_{AB}+L_{BC}}T \qquad (۷-۱۱)$$

$$T_A = \frac{L_{BC}}{L_{AB}+L_{BC}}T \qquad (۸-۱۱)$$

توزیع گشتاور پیچشی در طول میله در شکل۱۱-٦ب نشان داده شده است. توجه داشته باشید، در صورتی که $L_{AB} > L_{BC}$ باشد، T_C حداکثر پیچش میله خواهد بود.

مثال۱۱-۱) یک میله مطابق شکل۱۱-۷ با مقطع دایره، به طول کلی ۲/۵متر را در نظر بگیرید. قسمتی از این میله به طول ۲متر دارای قطری برابر۲۰۰ میلیمتر بوده و نیم متر دیگر آن دارای قطری برابر ۱۰۰ میلیمتر است. در صورتی که میله در تکیه‌گاه‌های خود در مقابل پیچش گیردار شده باشد و یک گشتاور پیچشی معادل *50kN.m* مطابق شکل بر آن اعمال شود، مقدار حداکثر تنش ایجاد شده در میله و همچنین تغییر در زاویه نقطه اعمال نیرو را تعیین نمایید. مقدار مدول برشی G را برابر $80000N/mm^2$ فرض کنید.



شکل۱۱-۷ میله مثال۱۱-۱

در این مسئله به دلیل تغییر در مقطع میله ما قادر نیستیم تا از معادلات ۱۱-۷ و ۱۱-۸ به صورت مستقیم استفاده نماییم. بنابراین از تعادل داریم:

$$T = T_A + T_C \qquad \text{(الف)}$$

همچنین با استفاده از همسازی تغییرمکان‌ها در نقطه B در طول قسمت‌های AB و BC داریم:

$$\theta_{B(AB)} = \theta_{B(BC)}$$

و همچنین با استفاده از رابطه ۱۱-۳ خواهیم داشت:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\frac{T_A L_{AB}}{GJ_{AB}} = \frac{T_C L_{BC}}{GJ_{BC}}$$

در نتیجه:

$$T_A = \frac{L_{BC} J_{AB}}{L_{AB} J_{BC}} T_C \qquad \text{(ب)}$$

با جایگذاری در رابطه الف داریم:

$$T = T_C \left(\frac{L_{BC} J_{AB}}{L_{AB} J_{BC}} + 1 \right)$$

یا

$$50 = T_C \left(\frac{0.5}{2.0} \times \left(\frac{200 \times 10^{-3}}{100 \times 10^{-3}} \right)^4 + 1 \right)$$

بنابراین مقادیر گشتاور پیچشی در انتهای C برابر خواهد بود با:

$$T_C = 10 kN.m$$

و از رابطه (الف) داریم:

$$T_A = 40 kN.m$$

اگرچه مقدار حداکثر گشتاور پیچشی در طول AB اتفاق می‌افتد، لیکن طول BC دارای قطر کمتری می‌باشد. این نتیجه را می‌توان در رابطه ۱۱-٤ مشاهده نمود که مقدار تنش برشی دارای نسبت مستقیم با مقدار گشتاور و نسبت معکوس با قطر (یا شعاع) به توان سه است. بنابراین در این مثال دیده شد که مقدار حداکثر تنش در طول BC ایجاد شد که مقدار آن را می‌توان به سادگی بدست آورد:

$$\tau_{max} = \frac{10 \times 10^6 \times 100 \times 32}{2 \times \pi \times 100^4} = 50.9 \ \frac{N}{mm^2}$$

همچنین چرخش ایجاد شده در نقطه B به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\theta_B = \frac{T_A L_{AB}}{GJ_{AB}} \qquad \text{یا} \qquad \theta_B = \frac{T_C L_{BC}}{GJ_{BC}}$$

با استفاده از اولین عبارت فوق خواهیم داشت:

$$\theta_B = \frac{40 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 32}{80000 \times \pi \times 200^4} = 0.0064 \, \text{rad}$$

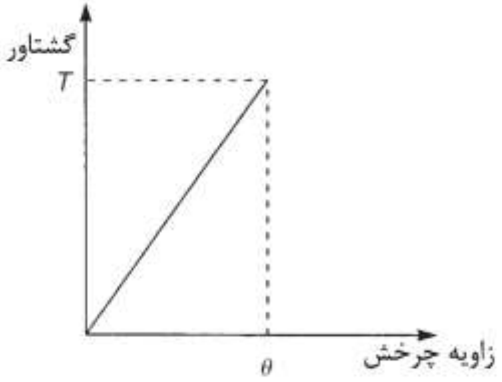
یا به عبارت دیگر

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$\theta_B = 0.37^\circ$

۱۱-۲ انرژی کرنشی ناشی پیچش

با استفاده از رابطه ۱۱-۳ می‌توان مشاهده نمود که زاویه چرخش ایجاد شده در میله، متناسب با گشتاور پیچشی موجود در آن است. بنابراین رابطه بین گشتاور و زاویه چرخش ایجاد شده به صورت خطی تغییر می‌کند که در شکل ۱۱-۸ این تناسب نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۸ رابطه بین گشتاور و چرخش ایجاد شده

در صورتی که فرض نماییم که گشتاور به صورت تدریجی اعمال شده باشد، کار انجام شده به سبب اعمال گشتاور پیچشی T، معادل با مساحت زیر منحنی گشتاور و زاویه چرخش می‌باشد. به عبارت دیگر:

$$\text{کار انجام شده} = \frac{1}{2}T\theta$$

در نتیجه انرژی ذخیره شده U، برابر خواهد بود با:

$$U = \frac{1}{2}T\theta$$

با جایگذاری T و θ از رابطه ۱۱-٤ در جمله مربوط به حداکثر تنش برشی $\tau_{\max}$، برای دورترین تارهای میله، خواهیم داشت:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\tau_{\max}J}{R} \times \frac{\tau_{\max}L}{GR}$$

یا

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$U=\frac{1}{2}\frac{\tau_{\max}^2}{G}\pi R^2 L$$

از آنجایی که $J=\frac{\pi R^4}{2}$ ،بنابراین داریم:

$$U=\frac{\tau_{\max}^2}{4G}\times \text{حجم میله} \qquad (۹-۱۱)$$

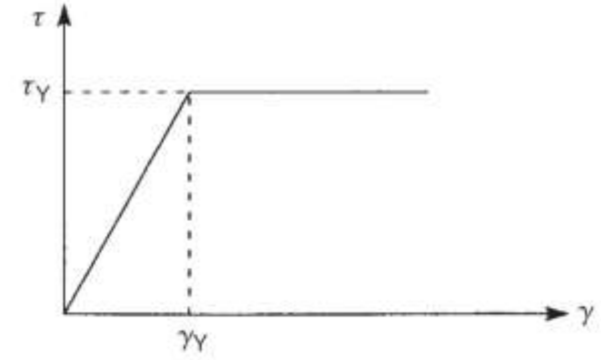
به عبارت دیگر

$$U=\frac{1}{2}T\theta=\frac{T^2 L}{2GJ} \qquad (۱۰-۱۱)$$

۱۱-۳ گشتاور پیچشی پلاستیک برای مقطع دایره‌ای

رابطه ۱۱-٤ تنها برای نمودار تنش برشی – کرنش برشی مواد در محدوده خطی صادق می‌باشد. تنش‌های بیش از حد تنش تسلیم برش τ_Y، باعث ورود دورترین تارهای مقطع به محدوده پلاستیک شده و به تدریج به سمت داخل توسعه می‌یابد.

در تحلیل پلاستیک مقاطع تحت گشتاور پیچشی فرض می‌نماییم که مقطع در طی پلاستیک شدن به صورت صفحه و بدون اعوجاج باقی می‌ماند. برای یک ماده همچون فولاد نرمه[1] که دارای نقطه تسلیم مشخصی می‌باشند، نمودار تنش برشی – کرنش برشی را می‌توان به صورت ایده‌آلی مانند شکل۱۱-۹ در نظر گرفت.



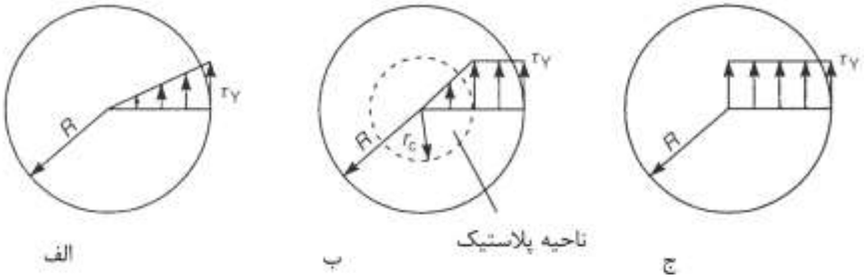
شکل۱۱-۹ منحنی ایده‌آل شده تنش برشی – کرنش برشی برای فولاد نرمه

[1] Mild steel

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در منحنی ایده‌آل دیده می‌شود که بعد از نقطه تسلیم، مقدار کرنش بدون افزایش در مقدار تنش مرتباً افزایش می‌یابد. بنابراین مشاهده می‌شود که مقدار تنش برشی در ناحیه پلاستیک شده ثابت و برابر τ_Y می‌باشد.



شکل ۱۱-۱۰ گشتاور پلاستیک در یک مقطع دایره‌ای شکل

شکل ۱۱-۱۰ مثالی از مراحل مختلف پلاستیک شدن یک مقطع دایره‌ای را از رسیدن اولین تار به تنش تسلیم تا پلاستیک شدن کامل مقطع را نشان می‌دهد. در شکل ۱۱-۱۰الف مقدار حداکثر تنش در دورترین تار مقطع برابر تنش تسلیم τ_Y می‌باشد که در دورترین تار آن ایجاد شده است. با به کاربردن رابطه ۱۱-٤ برای سطح بیرونی میله داریم:

$$\frac{T_Y}{J} = \frac{\tau_Y}{R}$$

یا

$$T_Y = \frac{\pi R^3}{2}\tau_Y \qquad (11\text{-}11)$$

که در آن T_Y مقدار گشتاور پیچشی است که باعث ایجاد تنش تسلیم می‌شود. در شکل ۱۱-۱۰ب دیده می‌شود که ناحیه پلاستیک در حال افزایش به سمت درون میله می‌باشد و تا شعاع r_e ادامه یافته است. در شعاعی کمتر از r_e مصالح تشکیل دهنده میله در حالت ارتجاعی به سر می‌برند. در این حالت کل گشتاور موجود در ناحیه ارتجاعی[1] و منطقه غیرارتجاعی[2] برابر است با:

$$T = \frac{\tau_Y J_e}{r_e} + \int_{r_e}^{R} 2\pi r^2 \tau_Y dr$$

---

[1] Elastic core
[2] Plastic zone

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در حالی که J_e گشتاور دوم سطح قطبی ناحیه ارتجاعی است، با توجه به رابطه ۱۱-۲ در ناحیه غیرارتجاعی مقدار $\tau = \tau_{\max}$ ثابت می‌باشد، بنابراین؛

$$T = \frac{\tau_Y \pi r_e^3}{2} + \frac{2}{3}\pi\tau_Y\left(R^3 - r_e^3\right)$$

با ساده سازی داریم:

$$T = \frac{2\pi R^3}{3}\tau_Y\left(1 - \frac{r_e^3}{4R^3}\right) \qquad (۱۱-۱۲)$$

در مرحله بعدی کل مقطع به صورت کامل پلاستیک می‌شود، بنابراین مقدار r_e در رابطه ۱۱-۱۲ برابر صفر خواهد بود. گشتاور پلاستیک مقطع T_p برابر خواهد بود با:

$$T_P = \frac{2\pi R^3}{3}\tau_Y \qquad (۱۱-۱۳)$$

با مقایسه روابط ۱۱-۱۱ و ۱۱-۱۳ داریم:

$$\frac{T_P}{T_Y} = \frac{4}{3} \qquad (۱۱-۱٤)$$

بنابراین تنها با افزایش یک سوم در مقدار گشتاور پیچشی، بعد از اولین تسلیم، مقطع به ظرفیت نهایی[1] خود خواهد رسید. با توجه به اینکه فرض نموده‌ایم شعاع میله در ناحیه پلاستیک مستقیم می‌ماند، زاویه پیچش ایجاد شده بایستی برابر با زاویه پیچش ناحیه الاستیک باشد که آن را می‌توان مستقیماً از رابطه ۱۱-۳ بدست آورد. بنابراین برای یک میله به طول L و مدول برشی G داریم:

$$\theta = \frac{TL}{GJ_e} = \frac{2TL}{\pi G r_e^4} \qquad (۱۱-۱۵)$$

یا بر حسب تنش برشی τ_Y در سطح بیرونی ناحیه الاستیک،

$$\theta = \frac{\tau_Y L}{G r_e} \qquad (۱۱-۱٦)$$

هر دو روابط ۱۱-۱۵ و ۱۱-۱٦ نشان می‌دهند که θ دارای نسبت عکس با شعاع r_e ناحیه الاستیک دارد. آشکارا پیداست که وقتی میله به طور کامل وارد ناحیه پلاستیک می‌شود $r_e \to 0$ ، θ به صورت تئوری بینهایت می‌شود. در عمل در حالتی که کل مقطع وارد ناحیه پلاستیک می‌شود، پیچش بدون افزایش در مقدار گشتاور پیچشی افزایش می‌یابد.

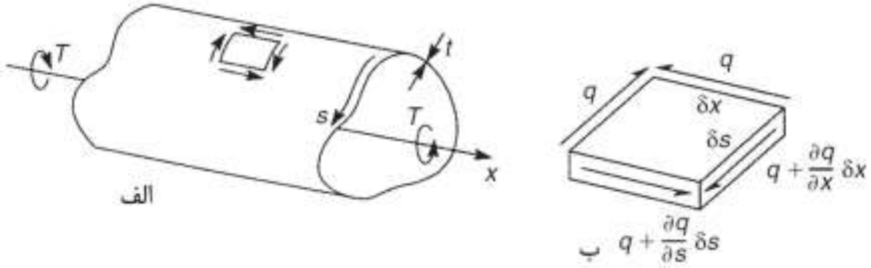
[1] Ultimate

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۱۱-٤ پیچش در مقاطع جدار نازک بسته

اگرچه مسئله تحلیل پیچش، عموماً پیچیده و در بعضی از موارد جواب‌ها به صورت تجربی می‌باشند، لیکن مسئله پیچش مقاطع جدار نازک[1] آسان می‌باشد. شکل ۱۱-۱۱الف یک تیر جدار نازک را تحت یک گشتاور پیچشی T نشان می‌دهد. مقدار ضخامت t در طول تیر ثابت می‌باشد ولی در مقطع تیر تغییر داشته باشد.



شکل ۱۱-۱۱ پیچش یک تیر جدار نازک

در صورتی که بر سیستم تنها گشتاور پیچشی خالص اعمال شود، در جداره‌های تیر تنها تنش‌های برشی ایجاد خواهند شد. مقدار تنش برشی موجود در یک المان از دیواره تیر ممکن است توسط جریان برش q، نشان داده شود که در شکل ۱۱-۱۱ب ارائه شده است. در این صورت ما فرض می‌کنیم که تغییرات t در امتداد لبه المان δs ناچیز می‌باشد. برای تعادل المان در جهت x داریم:

$$\left(q+\frac{\partial q}{\partial s}\delta s\right)\delta x-q\delta x=0$$

بنابراین:

$$\frac{\partial q}{\partial s}=0 \qquad (۱۱-۱۷)$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت s داریم:

$$\left(q+\frac{\partial q}{\partial x}\delta x\right)\delta s-q\delta s=0$$

و بنابراین:

$$\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (۱۱-۱۸)$$

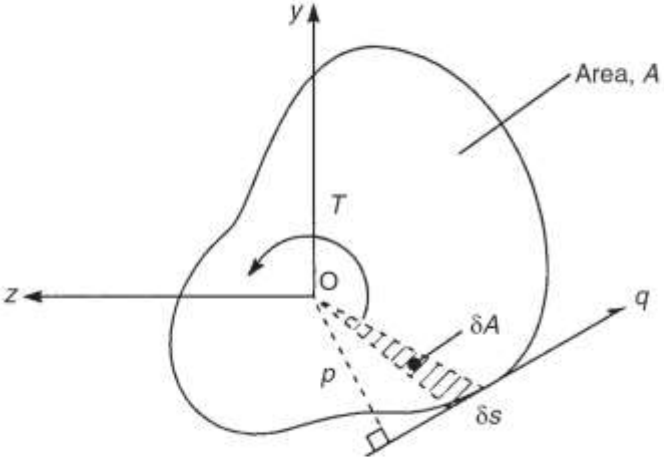
[1] Torsion of a thin-walled beam

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

برای ارضای روابط ۱۱–۱۷ و ۱۱–۱۸، باید مقدار q ثابت باشد. ارتباط بین گشتاور پیچشی و جریان برش ثابت را می‌توان با تعادل گیری در مقطع نشان داده شده در شکل ۱۱–۱۲ بدست آورد. گشتاور تولید شده توسط جریان برش در المان δs دیواره تیر به صورت زیر خواهد بود:

$$T = \oint pqds$$



شکل ۱۱–۱۲ جریان برش در جدار مقطع یک تیر

و چون q ثابت می‌باشد داریم:

$$T = q\oint pds \qquad (۱۱–۱۹)$$

به راحتی می‌توان ثابت نمود که $\oint pds = 2A$ که A مساحت محصور شده توسط خط میانی فرضی بر روی دیواره تیر است. بنابراین:

$$T = 2Aq \qquad (۱۱–۲۰)$$

تئوری پیچش مقاطع تیر جدار نازک توسط باتو[1] توسعه یافت و رابطه ۱۱–۲۰ تحت عنوان رابطه *Bredt-Batho*[2] شناخته می‌شود. براساس رابطه ۱۱–۲۰ داریم:

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2At} \qquad (۱۱–۲۱)$$

[1] Bredt Batho
[2] Bredt-Batho formula

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

بنابراین بیشینه تنش برشی در یک تیر تحت گشتاور پیچشی در نقطه‌ای که گشتاور پیچشی بیشتر و یا دارای کمترین ضخامت باشد روی می‌دهد. بنابراین:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{2At_{min}} \qquad (۱۱-۲۲)$$

نرخ تغییرات چرخش را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{q}{2A}\oint\frac{ds}{Gt} \qquad (۱۱-۲۳)$$

با جایگذاری q از رابطه ۱۱-۲۰ داریم:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{4A^2}\oint\frac{ds}{Gt} \qquad (۱۱-۲۴)$$

و همچنین در صورتی که مدول برشی G دارای مقدار ثابتی باشد:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{4A^2G}\oint\frac{ds}{t} \qquad (۱۱-۲۵)$$

مثال۱۱-۲) یک تیر جدار نازک با قطر ۲۰۰ میلیمتر و طول ۲ متر را در نظر بگیرید. این تیر در دو انتهای خود بطور کامل مقید شده است. یک گشتاور متمرکز به مقدار $30kN.m$ در وسط دهانه بر آن اعمال می‌شود. در صورتی که حداکثر مقدار تنش برشی در تیر به $200N/mm^2$ و حداکثر زاویه چرخش به 2° محدود شده باشد، مقدار حداقل ضخامت جدار تیر را تعیین نمایید. مقدار مدول برشی G را برابر $25000N/mm^2$ فرض کنید.

حداقل ضخامت تیر متناظر با حداکثر تنش برشی $200N/mm^2$ مستقیماً با استفاده از رابطه ۱۱-۲۲ بدست می‌آید، بنابراین؛

$$t_{min} = \frac{15\times10^6\times4}{2\times\pi\times200^2\times200} = 1.2mm$$

نرخ پیچش در طول تیر با استفاده از رابطه ۱۱-۲۵ بدست می‌آید،

$$\oint\frac{ds}{t} = \frac{\pi\times200}{t_{min}}$$

بنابراین:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{4A^2G}\times\frac{\pi\times200}{t_{min}} \qquad \text{الف}$$

با گرفتن مبداء x در یک انتهای ثابت و انتگرال‌گیری از رابطه (الف) برای نصف طول تیر داریم:

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \times \frac{\pi \times 200}{t_{\min}} x + C_1$$

مقدار C_1 یک ثابت انتگرال‌گیری است. در تکیه‌گاه ثابت انتهایی در حالی که $x=0$ و $\theta = 0$ باشد، بنابراین $C_1 = 0$ بنابراین:

$$\theta = \frac{T}{4A^2G} \times \frac{\pi \times 200}{t_{\min}} x$$

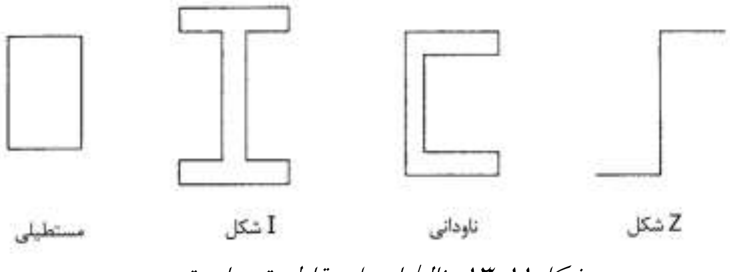
حداکثر پیچش ایجاد شده در تیر در وسط دهانه و در فاصله $x=1m$ ایجاد می‌شود:

$$t_{\min} = \frac{15 \times 10^6 \times 200 \times \pi \times 1 \times 10^3 \times 180}{4 \times \left(\pi \times \frac{200^2}{4} \right)^2 \times 25000 \times 2 \times \pi} = 2.7mm$$

بنابراین حداقل ضخامت برابر $2.7mm$ انتخاب می‌شود.

۱۱-۵ پیچش تیرهای با مقطع توپر

در اینجا تیرهایی را بررسی می‌نماییم که دارای فرم بسته‌ای نیستند. به عنوان مثال در شکل ۱۱-۱۳ چند نمونه از این مقاطع را که دارای کاربرد فراوانی در مهندسی هستند نشان داده شده است.



شکل ۱۱-۱۳ مثال‌هایی از مقاطع تیرهای توپر

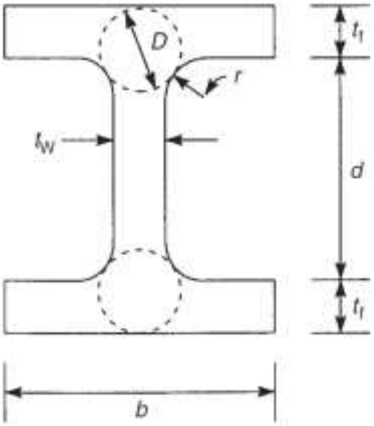
برای تمام حالات پیچش، ارتباط بین گشتاور پیچشی T و نرخ پیچش $d\theta/dx$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T = GJ\frac{d\theta}{dx} \qquad (۱۱-۲۶)$$

که G مدول برشی و J ثابت پیچشی است. برای یک میله با مقطع دایره‌ای J گشتاور دوم قطبی سطح از رابطه ۳-۱۱ بدست می‌آید. لیکن برای تیر با مقطع به فرم بسته جدار نازک، J از رابطه ۱۱-۲۵ معادل $4A^2\oint\frac{ds}{t}$ خواهد بود. برای مقاطع با جدار ضخیم مانند شکل‌های

نشان داده شده در شکل ۱۱-۱۳، J بطور تجربی بر اساس ابعاد اجزای آنها تعیین می‌شود. به عنوان مثال ثابت پیچشی برای مقطع I شکل نشان داده شده در شکل ۱۱-۱۴ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$J = 2J_1 + J_2 + 2\alpha D^4$$



شکل ۱۱-۱۴ ثابت پیچشی برای یک مقطع I شکل

که در رابطه فوق

$$J_1 = \frac{bt_f^3}{3}\left[1 - 0.63\frac{t_f}{b}\left(1 - \frac{t_f^4}{12b^4}\right)\right]$$

$$J_2 = \frac{1}{3}dt_w^3$$

$$\alpha = \frac{t_1}{t_2}\left(0.15 + 0.1\frac{r}{t_f}\right)$$

که در آن $t_1 = t_f$ و $t_2 = t_w$ اگر $t_f < t_w$ یا $t_1 = t_w$ و $t_2 = t_f$ اگر $t_f > t_w$ باشد.

در صورتی که مقدار ضخامت بال بسیار کوچکتر از عرض آن باشد، $t_f << b$ از جمله مربوط به D^4 می‌توان صرف نظر نمود. بنابراین:

$$J \approx 2\frac{bt_f^3}{3} + \frac{dt_w^3}{3}$$

بطور کلی برای یک مقطع جدار نازک، ثابت پیچشی J را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

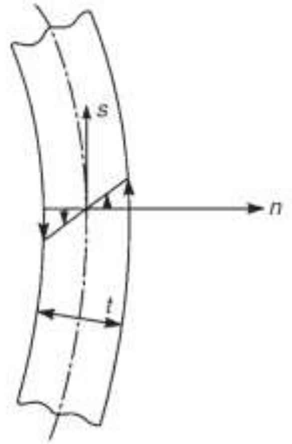
$$J = \frac{1}{3}\sum st^3 \tag{۱۱-۲۷}$$

که در رابطه فوق t ضخامت و s طول هر قسمت از مقطع می‌باشد. در صورتی که t متغییر باشد، رابطه به صورت زیر در می‌آید:

$$J = \frac{1}{3}\int_{section} t^3 ds \tag{۱۱-۲۸}$$

توزیع تنش برشی در یک مقطع تیر جدار نازک باز (شکل ۱۱-۱۵) را می‌توان بر حسب نرخ پیچش آن توسط رابطه زیر بیان نمود.

$$\tau = 2Gn\frac{d\theta}{dx} \tag{۱۱-۲۹}$$



شکل ۱۱-۱۵ توزیع تنش برشی به سبب پیچش در یک تیر جدار نازک باز

که در آن n فاصله هر نقطه بر روی مقطع تا خط میانی مقطع تیر است. بنابراین توزیع تنش برشی در این مقاطع به صورت خطی می‌باشد که مقدار آن در خط میانی برابر صفر است.

با جایگذاری نرخ پیچش $d\theta/dx$ از رابطه ۱۱-۲۶ در رابطه ۱۱-۲۹ خواهیم داشت:

$$\tau = 2n\frac{T}{J} \tag{۱۱-۳۰}$$

از هر دو رابطه ۱۱-۲۹ و ۱۱-۳۰ پیداست که مقدار حداکثر تنش برشی در سطح بیرونی جدار و هنگامی که $n = \pm t/2$ باشد ایجاد می‌شود، بنابراین:

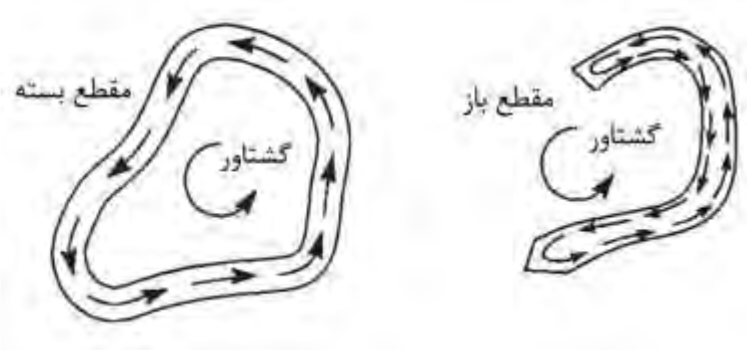
$$\tau_{\max} = \pm Gt\frac{d\theta}{dx} = \pm\frac{Tt}{J} \tag{۱۱-۳۱}$$

علامت مثبت و منفی در رابطه ۱۱-۳۰ جهت تنش برشی را نسبت به جهت s نشان می‌دهد.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در مقاطعی که تحت پیچش خالص قرار دارند باید تعادل در هر مقطعی از تیر برقرار باشد و جریان برش را می‌توان به صورت یک حلقه بسته[1] در نظر گرفت. در یک مقطع بسته[2]، تنش برشی به صورت پیوسته در حول مقطع گسترش خواهد یافت. در حالی که مقاطع جدار باز این گسترش برش در مقطع بر روی خود جدار خواهد بود. در شکل ۱۱-۱٦ جریان برش برای دو مقطع باز و بسته نشان داده شده است.



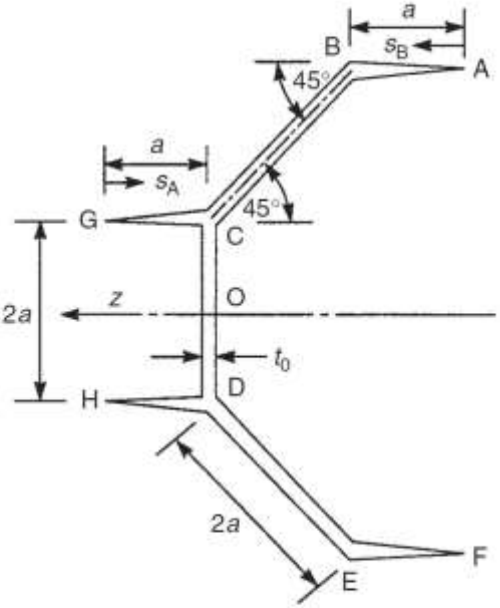
شکل ۱۱-۱٦ توسعه تنش برشی در مقاطع باز و بسته

مثال ۱۱-۳) مقطع جدار نازک نشان داده شده در شکل ۱۱-۱۷ نسبت به محور افقی نشان داده شده که از نقطه O عبور می‌کند، متقارن است. ضخامت جان CD ثابت و برابر t_0 می‌باشد در حالی که ضخامت جدارهای دیگر تغییر می‌کنند. تغییرات ضخامت آنها به صورت خطی از t_0 در نقطه C و D تا صفر در نقاط انتهایی A، F، G و H تغییر می‌کند. ثابت پیچشی J برای مقطع و همچنین حداکثر تنش برشی ایجاد شده توسط گشتاور پیچشی T را تعیین نمایید.

---
[1] Closed loop
[2] Closed section

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۱-۱۷ مقطع تیر مثال۱۱-۳

چون مقدار ضخامت در تمام مقطع بجز جان متغییر می‌باشد، ما از هر دو رابطه ۱۱-۲۷ و ۱۱-۲۸ برای تعیین ثابت پیچشی استفاده خواهیم نمود. بنابراین:

$$J = \frac{2at_0^3}{3} + 2\times\frac{1}{3}\int_0^a \left(\frac{s_A t_0}{a}\right)^3 ds_A + 2\times\frac{1}{3}\int_0^{3a}\left(\frac{s_B t_0}{3a}\right)^3 ds_B$$

که خواهیم داشت:

$$J = \frac{4at_0^3}{3}$$

حداکثر تنش برشی را می‌توان با استفاده از رابطه ۱۱-۳۱ بدست آورد:

$$\tau_{max} = \pm\frac{Tt_0}{J} = \pm\frac{3Tt_0}{4at_0^3} = \pm\frac{3T}{4at_0^3}$$

۱۱-۶ اعوجاج در مقاطع تحت پیچش

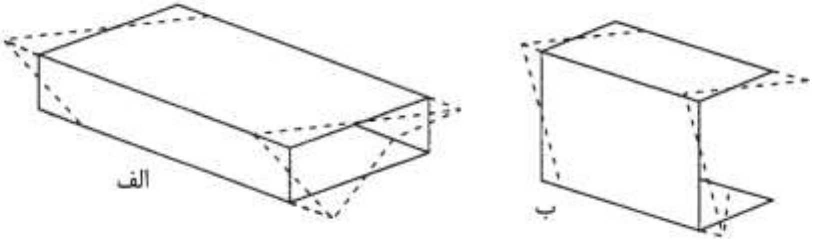
اگرچه ما فرض نمودیم که مقاطع باز و بسته تحت پیچش بدون اعوجاج[1] باقی می‌مانند، ولی آنها به صورت صفحه باقی نمی‌مانند. به عنوان مثال مقطع تیر مربع مستطیل و ناودانی

[1] Undistorted

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

نشان داده شده در شکل ۱۱–۱۸ را در نظر بگیرید، شکل مقطع، بعد از پیچش به صورت نشان داده شده در می‌آید.

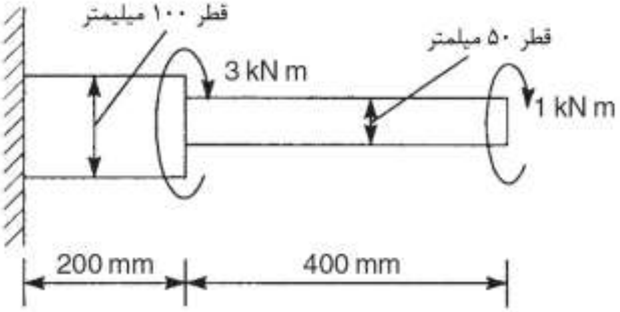


شکل ۱۱–۱۸ اعوجاج در تیر به سبب پیچش

بررسی چنین مقاطعی یکی از موضوعات پیشرفته می‌باشد که در طراحی حائز اهمیت فراوانی می‌باشد. بعضی از مقاطع مانند مقاطع دایره‌ای توپر و توخالی تحت پیچش دچار اعوجاج نمی‌شود.

مسائل

۱) میله توپر دایره‌ای شکل ۱۱–۱۹ را در نظر بگیرید که تحت یک گشتاور پیچشی برابر $1kN.m$ در انتهای آزاد و یک گشتاور پیچشی به اندازه $3kN.m$ در محل تغییر مقطع قرار دارد. مقدار تنش برشی حداکثر ایجاد شده و همچنین مقدار پیچش بوجود آمده در آن را محاسبه نمایید. $G = 70000\dfrac{N}{mm^2}$



شکل ۱۱–۱۹

حل) با استفاده از رابطه ۱۱–٤ مقدار تنش برشی در میله برابر است با:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\tau = \frac{Tr}{J}$$

در حالی که $J = \frac{\pi D^4}{32}$ داریم:

$$\tau = \frac{16T}{\pi D^3}$$

بنابراین مقدار تنش برشی به صورت مستقیم با مقدار گشتاور پیچشی تغییر می‌نماید و با توان سوم قطر به صورت معکوس تغییر می‌کند. بنابراین

$$\tau_{(\max)} = \frac{16 \times 1 \times 10^6}{\pi \times 50^3} = 40.7 \frac{N}{mm^2}$$

براساس رابطه ۱۱-٤ زاویه ایجاد شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\theta = \frac{TL}{GJ}$$

$$\theta = \frac{\left(\frac{4 \times 10^6 \times 200 \times 32}{70000 \times \pi \times 100^4} + \frac{1 \times 10^6 \times 400 \times 32}{70000 \times \pi \times 50^4} \right)}{\frac{180}{\pi}} = 0.6^\circ$$

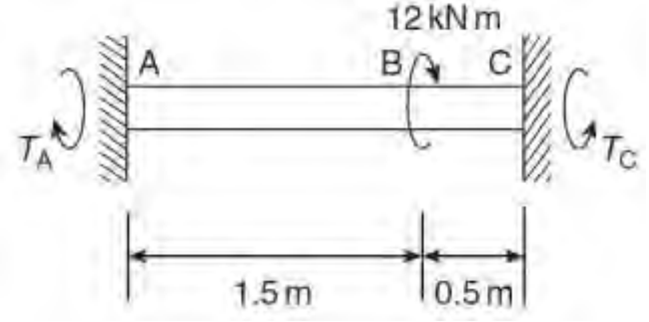
۲) یک محور انتقال نیرو با مقطع دایره‌ای توخالی به طول ۲متر به صورت محکم در دو انتهای خود نگه‌داشته شده است. قطر خارجی آن برابر ۸۰ میلیمتر می‌باشد. محور انتقال نیرو تحت یک گشتاور پیچشی برابر *12kN.m* در نقطه ۱/۵ متری از ابتدای خود قرار دارد. در صورتی که تنش برشی حداکثر ایجاد شده در محور به $150N/mm^2$ و مقدار حداکثر پیچش ایجاد شده در آن نیز به 1.5° محدود شده باشد، حداکثر قطر داخلی این محور را تعیین نمایید. $G = 80000 \frac{N}{mm^2}$

حل) با مراجعه به شکل زیر و استفاده از رابطه ۱۱-۸ داریم:

$$T_A = \left(\frac{0.5}{2.0} \right) \times 12 = 3kN.m$$

بنابراین با استفاده تعادل داریم:

$$T_C = 9kN.m$$



شکل ۱۱-۲۰

شرایط حداکثر تنش برشی با استفاده از رابطه ۱۱-٤ به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{T_{\max}}{J}=\frac{\tau_{\max}}{\left(\frac{D}{2}\right)}$$ الف

که در آن D قطر خارجی و $J=\frac{\pi\left(D^4-d^4\right)}{32}$ که d قطر داخلی محور می‌باشد. با جایگذاری در رابطه (الف) داریم:

$$\frac{9\times10^6}{\left[\frac{\pi\left(80^4-d^4\right)}{32}\right]}=\frac{150}{\left(\frac{80}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad d=63.7 \text{ mm}$$

شرایط حداکثر پیچش ایجاد شده در محور به صورت زیر خواهد بود. حداکثر پیچش ایجاد شده در محور در نقطه B خواهد. هر یک از دو جزء AB و BC را می‌توان به صورت مجزا مورد بررسی قرار داد. در اینجا ما بخش AB را مورد بررسی قرار می‌دهیم. با استفاده از رابط ۱۱-٤ داریم:

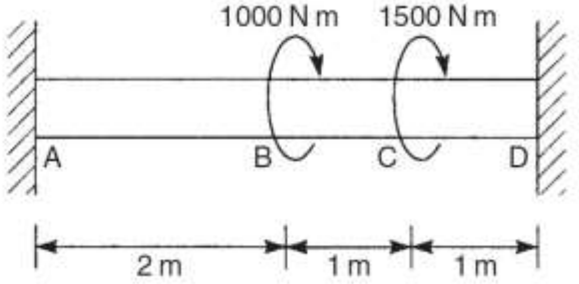
$$\theta_B=\frac{T_{AB}L_{AB}}{GJ}$$

$$\Rightarrow 1.5\times\frac{\pi}{180}=\frac{3\times10^6\times1.5\times10^3}{80000\times\pi\left[\frac{\left(80^4-d^4\right)}{32}\right]}$$

$$\Rightarrow \quad d=66.1 \text{ mm}$$

بنابراین مقدار حداکثر قطر داخلی برابر ٦٣/٧ میلیمتر می‌باشد.

۳) میله $ABCD$ نشان داده شده در شکل ۱۱-۲۱ را در نظر بگیرید که مقطع آن دایره‌ای دارای قطری برابر ۵۰ میلیمتر است که در دو انتهای خود به طور کامل توسط تکیه‌گاه‌هایی نگه‌داشته شده است. دو گشتاور متمرکز در نقطه B و C بر آن اعمال می‌شوند. مقدار تنش برشی حداکثر ایجادش شده و همچنین مقدار حداکثر پیچش ایجاد شده در آن را تعیین نمایید. $G = 70000\dfrac{N}{mm^2}$



شکل ۱۱-۲۱

حل) با استفاده از تعادل داریم:

$$T_A + T_D = 2500\, N.m$$ الف

با استفاده از همسازی داریم:

$$\theta_{B(AB)} = \theta_{B(BC)} + \theta_{C(CD)}$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۱۱-٤ و از آنجایی که GJ مقدار ثابتی است، داریم:

$$T_A \times 2 = \left(T_D - 1500\right) \times 1 + T_D \times 1$$

$$T_A = T_D - 750$$ ب

با حل روابط (الف) و (ب) داریم:

$$T_A = 875\, N.m \qquad T_D = 1625\, N.m$$

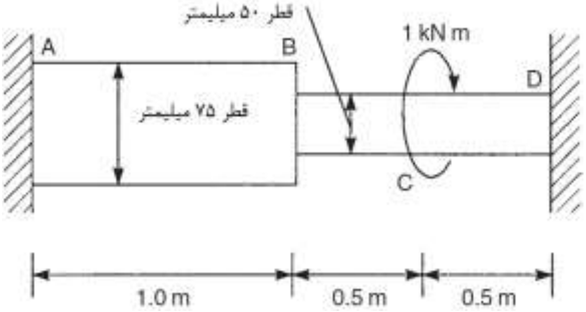
بنابراین با استفاده از روابط ۱۱-٤ داریم:

$$\tau_{\max} = 1625 \times 10^3 \times \frac{25}{\pi\left(\dfrac{50^4}{32}\right)} = 66.2\frac{N}{mm^2}$$

حداکثر پیچش ایجاد شده در نقطه B ایجاد شده و برابر است با:

$$\theta_B = \frac{875\times10^3\times2\times10^3}{70000\times\pi\left(\frac{50^4}{32}\right)} = 0.0407\ \text{rad} = 2.3^\circ$$

٤) میله $ABCD$ نشان داده شده در شکل زیر با مقطع دایره‌ای دارای قطری برابر ۷۵ میلیمتر در نصف طول خود و قطر ۵۰ میلیمتر در نصف طول باقیمانده است که در دو انتهای خود به صورت محکم توسط تکیه‌گاه‌هایی نگه‌داشته شده است. یک گشتاور پیچشی به اندازه $1kN.m$ در نقطه C مطابق شکل بر آن اعمال شده است. توزیع گشتاور پیچشی در طول میله را ترسیم و مقدار حداکثر تنش و پیچش ایجاد شده را بدست آورید. $G = 70000\dfrac{N}{mm^2}$



شکل ۱۱-۲۲

حل) با استفاده از تعادل داریم:

الف $T_A + T_D = 1$

با استفاده از همسازی داریم:

$$\theta_{B(AB)} = \theta_{B(BC)} + \theta_{C(CD)}$$

بنابراین با استفاده از رابطه ۱۱-٤، داریم:

$$\frac{T_A\times1.0}{\pi\left(\frac{75^4}{32}\right)} = \frac{(T_D-1)\times0.5}{\pi\left(\frac{50^4}{32}\right)} + \frac{T_D\times0.5}{\pi\left(\frac{50^4}{32}\right)}$$

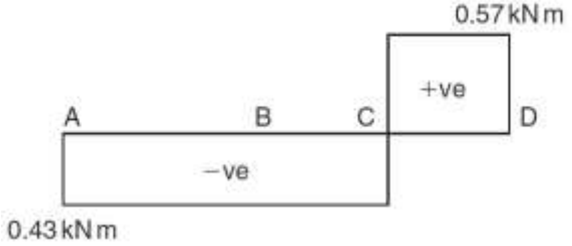
ب $\Rightarrow T_A = 5.1T_D - 2.5$

با حل روابط (الف) و (ب) داریم:

$T_A = 0.43N.m \qquad T_D = 0.57N.m$

بنابراین:

$$\tau_{\max} = \frac{0.57\times10^{6}\times25}{\pi\left(\frac{50^{4}}{32}\right)} = 23.2\frac{N}{mm^{2}}$$

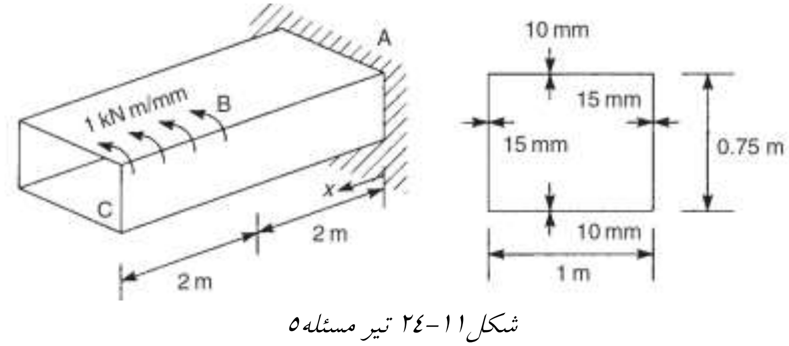


شکل ۱۱-۲۳ دیاگرام گشتاور پیچشی

حداکثر تغییر در زاویه میله برابر است با:

$$\theta_{C} = \frac{0.57\times10^{6}\times0.5\times10^{3}}{70000\times\pi\left(\frac{50^{4}}{32}\right)} = 0.00664\ \text{rad} = 0.38^{\circ}$$

۵) یک تیر با مقطع مستطیل جدار نازک تحت یک لنگر گسترده به شدت *1kN.m/mm* در طولی برابر نصف طول خود مطابق شکل ۱۱-۲۴ قرار دارد. مقدار تنش برشی حداکثر ایجاد شده و همچنین توزیع پیچش در طول تیر را محاسبه و ترسیم نمایید. $G = 70000\frac{N}{mm^{2}}$



شکل ۱۱-۲۴ تیر مسئله ۵

حل) حداکثر گشتاور پیچشی ایجاد شده در تیر برابر $1\times2\times10^{3}kN.m$ است. با استفاده از رابطه ۱۱-۲۲ داریم:

$$\tau_{\max} = \frac{1\times2\times10^{3}\times10^{6}}{2\times1000\times750\times10} = 133.3\frac{N}{mm^{2}}$$

نرخ تغییرات پیچش ایجاد شده در تیر با استفاده از رابطه ۱۱-۲۵ و با توجه به اینکه G ثابت است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{2\times1000}{10} + \frac{2\times750}{15} = 300$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T\times300}{4\times(1000\times750)^2\times70000} = 1.905\times10^{-15}T$$

در AB مقدار $T = 2000\times10^6\,N.mm$ است. بنابراین:

$$\theta_{AB} = 2000\times10^6\times1.8905\times10^{-15}x + B = 3.81\times10^{-6}x + B$$

وقتی که $x = 0$ باشد $\theta_{AB} = 0$ خواهد بود. بنابراین $B=0$ خواهد شد. همچنین در $x=2000mm$ مقدار $\theta_{AB} = 0.00762\ \text{rad} = 0.44^\circ$ خواهد بود.

در BC مقدار $T = 1\times10^6(4000-x)$ است. بنابراین:

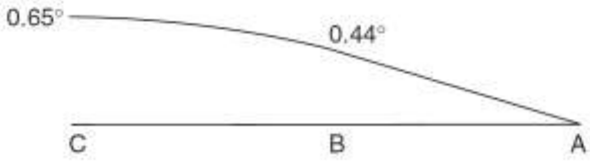
$$\theta_{BC} = 1.905\times10^{-9}\left(4000x - \frac{x^2}{2}\right) + C$$

وقتی که $x=2000mm$ باشد، $\theta_{BC} = 0.00762\ \text{rad}$ بنابراین $C=-0.00381$ خواهد بود.

$$\theta_{BC} = 1.905\times10^{-9}\left(4000x - \frac{x^2}{2}\right) - 0.00381$$

وقتی که $x=4000mm$ باشد، $\theta_{BC} = 0.01143\ \text{rad} = 0.65^\circ$

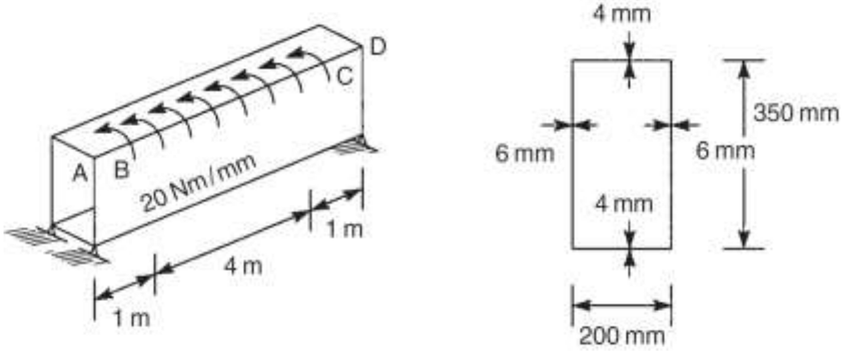
توزیع زوایه پیچشی ایجاد شده بر حسب درجه در شکل۲۲-۲۵ نشان داده شده است:



شکل۱۱-۲۵ توزیع زوایه پیچشی ایجاد شده بر حسب درجه

۶) تیر جدار نازک $ABCD$ نشان داده شده در شکل۱۱-۲۶ با مقطع مستطیل توسط دو تکیه‌گاه که از حرکت قائم و افقی آن جلوگیری می‌کنند نگهداری می‌شود. تیر مطابق شکل تحت یک گشتاور پیچشی گسترده به شدت $20N.m/mm$ در طول قسمت BC خود قرار

دارد. مقدار تنش حداکثر تولید شده را محاسبه و توزیع زاویه پیچش بوجود آمده در آن را تعیین نمایید. $G = 70000 \dfrac{N}{mm^2}$



شکل ۱۱-۲۶ تیر مسئله۶

حل) مقدار کل گشتاور اعمال شده به تیر برابر $20 \times 4 \times 10^3 N.m$ می‌باشد. با استفاده از تقارن شکل می‌توان به راحتی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست آورد. مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در A و D برابر $40 \times 10^3 N.m$ می‌باشد. بنابراین

$$T_{AB} = 40 \times 10^3 N.m$$

$$T_{BC} = (40 \times 10^3) - 20(x - 1000) = 60000 - 20x$$

که در رابطه فوق x بر حسب میلیمتر است. توجه داشته باشید که توزیع پیچش حول مرکز تیر به صورت نامتقارن است. حداکثر گشتاور پیچشی در تیر برابر $40 \times 10^3 N.m$ می‌باشد. بنابراین

$$\tau_{max} = \frac{4000 \times 10^3}{2 \times 200 \times 350 \times 4} = 71.4 \frac{N}{mm^2}$$

نرخ پیچش در امتداد طول تیر توسط رابطه ۱۱-۲۵ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\oint = \frac{2 \times 200}{4} + \frac{2 \times 350}{6} = 216.7$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \left[\frac{216.7}{4 \times (200 \times 350)^2 \times 70000} \right] T = 15.79 \times 10^{-14} T$$

که در AB مقدار $40000 N.m$ است. بنابراین

$$\theta_{AB} = 6.32 \times 10^{-6} x + B$$

وقتی که $x=0$، مقدار $\theta_{AB}=0$ بنابراین $B=0$ خواهد بود. وقتی $x=1000mm$ باشد $\theta_{AB}=0.0063\,rad\left(0.631^{\circ}\right)$ خواهد بود. در قسمت BC مقدار $T_{BC}=60000-20xN.m$ خواهد بود. حال با استفاده از رابطه ۱۱–۲۵ داریم:

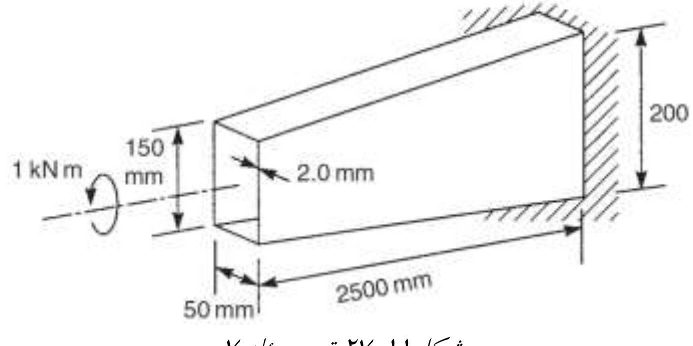
$$\theta_{BC}=15.79\times10^{-14}\left(60000\,x-10x^{2}\right)\times10^{3}+C$$

وقتی $x=1000mm$ باشد، $\theta_{BC}=0.0063$ خواهد بود. بنابراین $C=-0.0016$. پس

$$\theta_{BC}=15.79\times10^{-14}\left(60000\,x-10x^{2}\right)\times10^{3}-0.0016$$

در وسط دهانه، جایی که $x=3000mm$ است، $\theta_{BC}=0.0126\,rad\left(0.722^{\circ}\right)$ خواهد بود.

۷) یک تیر طره به صورت جدار نازک همانند شکل ۱۱–۲۷ را در نظر بگیرید که دارای عرض ۵۰ و عمق ۱۵۰ میلیمتر بوده که به صورت خطی تا عمق ۲۰۰ میلیمتری در انتهای خود افزایش می‌یابد. در صورتی که تیر تحت یک گشتاور پیچشی به میزان $1kN.m$ در انتهای خود باشد. میزان حداکثر تنش ایجاد شده در مقطع و همچنین میزان پیچش موجود در آن در فاصله ۵۰۰ میلیمتری آن را تعیین نمایید. $G=25000\dfrac{N}{mm^{2}}$



شکل ۱۱–۲۷ تیر مسئله ۷

حل) مقدار گشتاور پیچشی در طول تیر ثابت و مقدار آن برابر $1kN.m$ می‌باشد. مقدار ضخامت تیر در طول آن ثابت می‌باشد. بنابراین تنش حداکثر در جایی ایجاد می‌شود که مساحت داخل خط میانی تیر حداقل باشد. بنابراین در نقطه انتهایی تیر داریم:

$$\tau_{\max}=\frac{1000\times10^{3}}{2\times50\times150\times2}=33.3\frac{N}{mm^{2}}$$

نرخ پیچش توسط رابطه ۱۱–۲۵ بدست می‌آید.

$$\oint\frac{ds}{t}=\left[\frac{2\times 50+\left(150+\dfrac{50}{2500}\right)}{2}\right]=125+0.01x$$

همچنین

$$A=50\left(150+\frac{50x}{2500}\right)=7500+x$$

سپس:

$$\frac{d\theta}{dx}=\left(\frac{1\times 10^6}{4\times 25000}\right)\frac{(125+0.01x)}{(7500+x)^2}$$

یا به عبارت دیگر:

$$\frac{d\theta}{dx}=10\left(\frac{12500+x}{100(7500+x)^2}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dx}=0.1\left(\frac{5000}{(7500+x)^2}+\frac{1}{(7500+x)}\right)$$

$$\Rightarrow\theta=0.1\left(\frac{-5000}{(7500+x)^2}+\log_e(7500+x)+B\right)$$

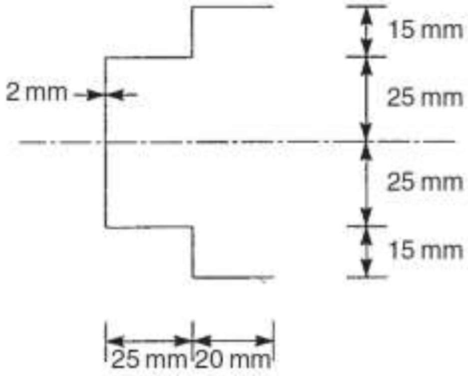
وقتی که $x=2500mm$ مقدار $\theta=0$ بنابراین $B=-6.41$ و خواهیم داشت:

$$\theta=0.1\left(\frac{-5000}{(7500+x)}+\log_e(7500+x)-6.41\right)rad$$

وقتی که $x=0$ مقدار $\theta=10.6^\circ$

۸) یک تیر سرد نورد شده مطابق شکل۱۱-۲۸ تحت یک گشتاور پیچشی به میزان *50N.m* قرار دارد. میزان تنش حداکثر و نرخ پیچش در آن را تعیین نمایید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱۱-۲۸ تیر مسئله ۸

حل) حداکثر تنش ایجاد شده در مقطع با استفاده از رابطه ۱۱-۳۱ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$J = 2\times 2^3\left(\frac{20+15+25+25}{3}\right) = 453.3mm^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{50\times 10^3\times 2}{453.3} = 220.6\frac{N}{mm^2}$$

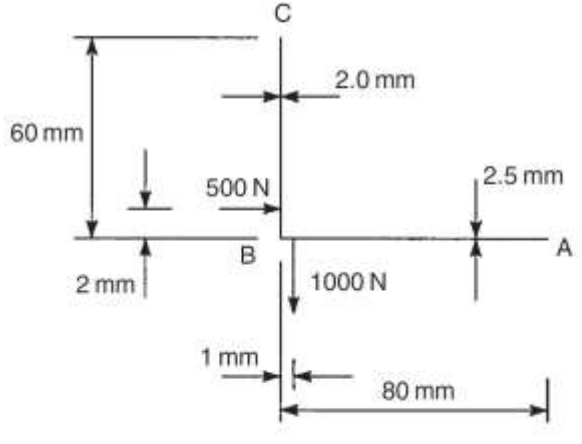
با استفاده از رابطه ۱۱-۳۱ داریم

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{T}{GJ}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{d\theta}{dx} = \frac{50\times 10^3}{25000\times 453.3} = 0.0044\frac{rad}{mm}$$

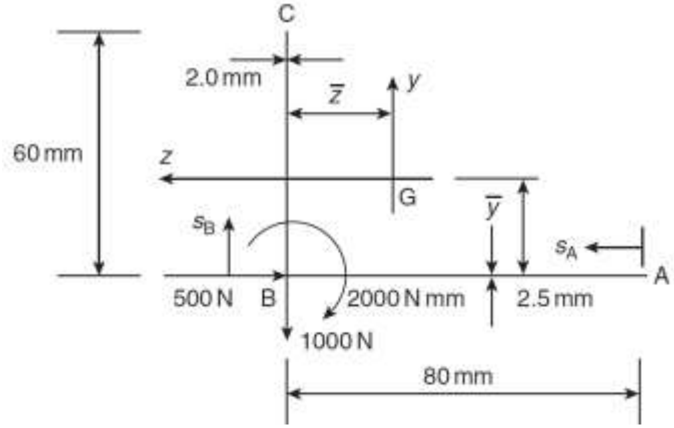
۹) نبشی جدار نازک نشان داده شده در شکل ۲-۲۹ تحت نیروهایی برشی است که باعث تولید برش و پیچشی در تیر می‌شود. مقدار حداکثر تنش برشی ایجاد شده در تیر را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱۱-۲۹ نبشی مسئله ۹

حل) مطابق شکل فوق می‌توانیم نیروهای برشی اعمال شده به تیر را به نقطه B منتقل نموده و در اثر انتقال این نیروها یک گشتاور پیچشی نیز با آنها بایستی اعمال شود.



شکل ۱۱-۳۰

حداکثر تنش برشی ایجاد شده در اثر پیچش با استفاده از رابطه ۱۱-۲۷ به صورت زیر خواهد بود:

$$J=\frac{60\times 2^3}{3}+\frac{80\times 2.5^3}{3}=576.7mm^4$$

$$\tau_{\max}(\text{torsion})_{AB}=\frac{2000\times 2.5}{576.7}=8.67\frac{N}{mm^2}$$

$$\tau_{\max}(\text{torsion})_{BC}=\frac{2000\times 2.0}{576.7}=6.94\frac{N}{mm^2}$$

مقدار تنش برشی به سبب نیروی برشی به صورت زیر خواهد بود:

$$S_z = -500\,N \qquad S_y = -1000\,N$$

$$A = 80 \times 2.5 + 60 \times 2.0 = 320\,mm^2$$

سپس

$$320\bar{z} = 80 \times 2.5 \times 40$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{z} = 25mm$$

همچنین

$$320\,\bar{y} = 60 \times 2.5 \times 30$$

$$\Rightarrow \qquad \bar{y} = 11.25mm$$

$$I_z = 80 \times 2.5 \times 11.25^2 + \frac{2 \times 60^3}{12} + 60 \times 2 \times 18.75^2 = 103500mm^4$$

$$I_y = 60 \times 2 \times 25^2 + \frac{2.5 \times 80^3}{12} + 80 \times 2.5 \times 15^2 = 226667mm^4$$

$$I_{zy} = 60 \times 2(25)(18.75) + 80 \times 2.5 \times (-15)(-11.25) = 90000\,mm^4$$

$$I_z I_y - I_{zy}^2 = 103500 \times 226667 - 90000^2 = 1.54 \times 10^{10}$$

$$\Rightarrow q_s = \left[\frac{(-1000 \times 90000 + 500 \times 103500)}{1.54 \times 10^{10}}\right]\int_0^s tzds + \left[\frac{(-500 \times 90000 + 1000 \times 226667)}{1.54 \times 10^{10}}\right]\int_0^s tyds$$

$$\Rightarrow q_s = -0.0025\int_0^s tzds + 0.0118\int_0^s tyds$$

$$\Rightarrow q_{AB} = -0.0025\int_0^s 2.5(-55 + s_A)ds + 0.0118\int_0^s 2.5(-11.25)ds$$

$$\Rightarrow q_{AB} = 0.0119\,s_A - 0.0031 s_A^2 \qquad \text{الف}$$

در B وقتی $s_A = 80mm$ باشد، $q_{AB} = -18.9\frac{N}{mm}$

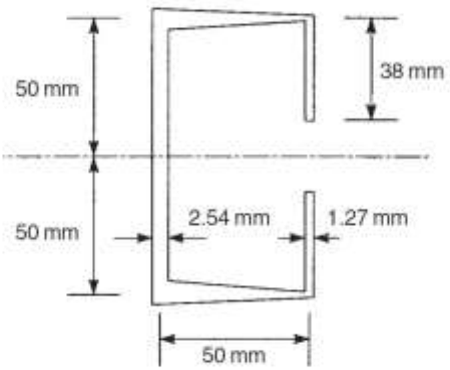
با بررسی رابطه الف دیده می‌شود که q_{AB} در $s_A = 28.8mm$

$$q_{BC} = -0.0025\int_0^s 2 \times 25ds + 0.0118\int_0^s 2(-11.25 + s_B)ds - 18.9$$

$$\Rightarrow q_{BC} = -0.3905\,s_B + 0.0118\,s_B^2 - 18.9 \qquad \text{ب}$$

با ترکیب تنش‌های برشی خواهیم دید که مقدار تنش حداکثر برشی برابر $6.9 + 11.1 = 18.0\frac{N}{mm^2}$ خواهد بود که در فاصله ۱۶/۵ از B ایجاد می‌شود.

۱۰) در شکل ۱۱-۳۱ یک ناودانی که دارای لبه‌هایی با ضخامت ثابت می‌باشد نشان داده شده است. مقدار ضخامت جان نیز ثابت و برابر ۲/۵۴ میلیمتر می‌باشد. مدول برشی $G = 26700\frac{N}{mm^2}$ فرض کنید. مقدار تنش برشی حداکثر و نرخ تغییرات پیچش را در صورتی که گشتاور پیچشی *100N.m* بر آن اعمال شود را تعیین نمایید.



شکل ۱۱-۳۱ ناودانی مسئله ۱۰

حل) حداکثر تنش برشی ایجاد شده با استفاده از رابطه ۱۱-۳۱ به صورت زیر است:

$$J = \frac{100\times 2.54^3}{3} + \frac{2\times 38\times 1.27^3}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)\int_0^{50}\left[1.27 + 1.27\left(\frac{s}{50}\right)\right]^3 ds = 854.2mm^4$$

در اینجا s از لبه بال اندازه‌گیری می‌شود. در نتیجه:

$$\tau_{\max} = \pm\frac{100\times 10^3\times 2.54}{854.2} = \pm 297.4\frac{N}{mm^2}$$

میزان نرخ پیچش توسط رابطه ۱۱-۳۱ برابر است با:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{100\times 10^3}{26700\times 854.2} = 0.0044\frac{rad}{mm}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل دوازدهم
تیرهای مرکب

مقدمه

در بسیاری از سازه‌ها برای اقتصادی شدن طرح، از ترکیب مواد با مشخصات مختلف استفاده می‌شود. به عنوان مثال در تیرهای بتنی برای جبران ضعف کششی بتن، در ناحیه کششی از آرماتورهای کششی استفاده می‌کنند. همچنین سقف‌های مرکب، که از تیرهای فولادی و دال بتنی تشکیل شده‌اند برای پوشش سقف مورد استفاده قرار می‌گیرند. به دلیل ترکیب دو ماده در یک مقطع، رفتار و عملکرد آن اصولاً با مقاطع یکپارچه متفاوت خواهد بود.

۱۲-۱ تیر چوبی مسلح شده توسط فولاد

تیر چوبی به عرض b و عمق d نشان داده شده در شکل ۱۲-۱ که توسط صفحه‌های فولادی در دو طرف خود به ارتفاع d و ضخامت t مسلح شده است را در نظر بگیرید. فرض نمایید که تیر در این مقطع نشان داده شده توسط لنگر مثبت M دچار انحنایی به شعاع R شده است. به وضوح روشن است که چون صفحه‌های فولادی به نحو مناسبی به تیر متصل هستند، آنها نیز با شعاع R دچار انحنا خواهند شد. بر اساس رابطه ۹-۷، گشتاور خمشی M_t که توسط تیر چوبی حمل می‌شود برابر است با:

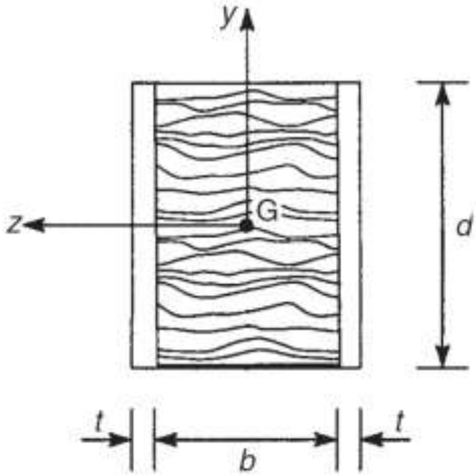
$$M_t = \frac{E_t I_t}{R} \qquad (۱۲-۱)$$

که در آن E_t ضریب ارتجاعی[1] برای تیر چوبی و I_t گشتاور دوم سطح مقطع تیر حول محور مرکزی G_z است. به طور مشابه برای صفحه‌های فولادی خواهیم داشت:

$$M_s = \frac{E_s I_s}{R} \qquad (۱۲-۲)$$

[1] Young's modulus

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱۲-۱ تیر چوبی مسلح شده توسط فولاد

که در آن I_s گشتاور دوم سطح صفحه‌های فولادی حول محور مرکزی Gz است. بنابراین گشتاور خمشی برابر است با:

$$M = M_t + M_s = \frac{1}{R}\left(E_t I_t + E_s I_s\right)$$

یا به عبارت دیگر:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{\left(E_t I_t + E_s I_s\right)} \qquad (۱۲-۳)$$

از مقایسه روابط ۱۲-۳ و ۹-۷ می‌بینیم که رفتار تیر مرکب همچون تیری با سختی خمشی معادل EI است.

$$EI = E_t I_t + E_s I_s$$

$$EI = E_t\left(I_t + \frac{E_s}{E_t} I_s\right) \qquad (۱۲-٤)$$

بنابراین سختی خمشی یک تیر مرکب چوبی و فولادی، برابر ضریب ارتجاعی چوب در گشتاور دوم سطح تبدیل شده به صورت زیر می‌باشد.

$$I_t + \frac{E_s}{E_t} I_s$$

این بدان معناست که برای بررسی این تیر مرکب، صفحه‌های فولادی را می‌توان با موادی از جنس همان چوب ولی به ضخامت $(E_s / E_t)t$ مانند شکل ۱۲-۲الف جایگزین نمود و یا

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

به عبارت دیگر می‌توان کل مقطع را با بازنویسی رابطه ۱۲-٤ به صورت فولادی در نظر گرفت.

$$EI = E_s\left(\frac{E_t}{E_s}I_t + I_s\right)$$

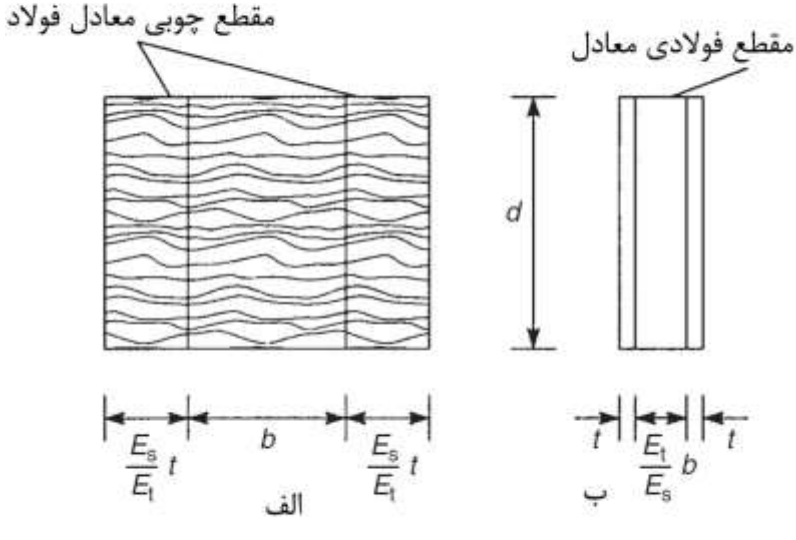
بنابراین گشتاور دوم سطح معادل تیر فولادی[1] به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\frac{E_t}{E_s}I_t + I_s$$

این معادل است با اینکه تیر چوبی را با یک تیر فولادی به پهنای $(E_t / E_s)b$ جایگزین نمود. توجه نمایید که این حالت تنها مربوط به خمشی حول محور افقی Gz است. همچنین عمق مقطع با این تبدیل، تغییری نمی‌کند.

تنش نرمال[2] ایجاد شده در تیر به سبب خمش توسط رابطه ۹-۹ به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_t = -\frac{M_t y}{I_t} \qquad (۵-۱۲)$$



شکل۱۲-۲ مقطع تیر معادل

با استفاده از روابط ۱۲-۱ و ۱۲-۳ داریم:

---
[1] Second moment of area of the equivalent steel beam
[2] Direct stress

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$M_t = \frac{E_t I_t}{E_t I_t + E_s I_s} M$$

$$M_t = \frac{M}{1 + \frac{E_s I_s}{E_t I_t}} \qquad (۱۲-۶)$$

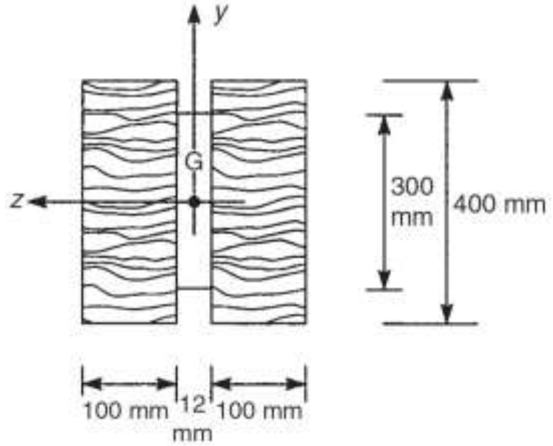
با جایگذاری رابطه۱۲-۵ در رابطه ۱۲-۶ خواهیم داشت:

$$\sigma_t = -\frac{M_y}{I_t + \frac{E_s}{E_t} I_s} \qquad (۱۲-۷)$$

به طور مشابه با جایگذاری تیر معادل فولادی همچون شکل۱۲-۲ب، توزیع تنش نرمال در فولاد به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_s = -\frac{M_y}{I_s + \frac{E_t}{E_s} I_t} \qquad (۱۲-۸)$$

مثال۱۲-۱) یک تیر مانند شکل۱۲-۳ از دو قسمت چوبی که ابعاد هر کدام $100 \times 400mm$ و یک صفحه فولادی به ابعاد $12 \times 300mm$ به صورت متقارن در بین دو قسمت چوبی قرار دارد. در صورتی که تیر تحت یک گشتاور خمشی به اندازه $50kN$ باشد، حداکثر تنش ایجاد شده در تیر چوبی و فولاد را تعیین نمایید. نسبت ضریب ارتجاعی فولاد به چوب را ۱۲ به ۱ در نظر بگیرید.



شکل۱۲-۳ تیر مرکب مثال ۱۲-۱

حل) گشتاور دوم سطح تیر مرکب حول محور مرکزی Gz برابر است با:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$I_t = 2\times100\times\frac{400^3}{12} = 1067\times10^6 mm^4$$

$$I_s = 12\times\frac{300^3}{12} = 27\times10^6 mm^4$$

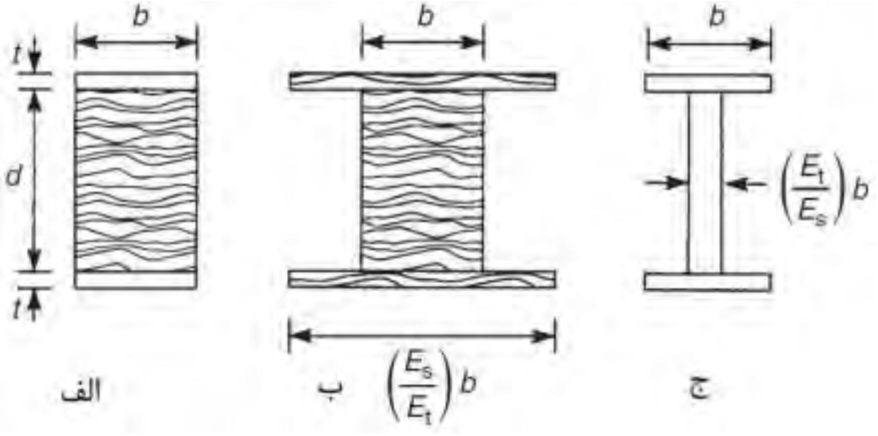
بنابراین براساس رابطه ۱۲-۷ خواهیم داشت:

$$\sigma_t = \pm\frac{50\times10^6\times200}{1067\times10^6+12\times27\times10^6} = \pm7.2\frac{N}{mm^2}$$

و با استفاده از رابطه ۱۲-۸ داریم:

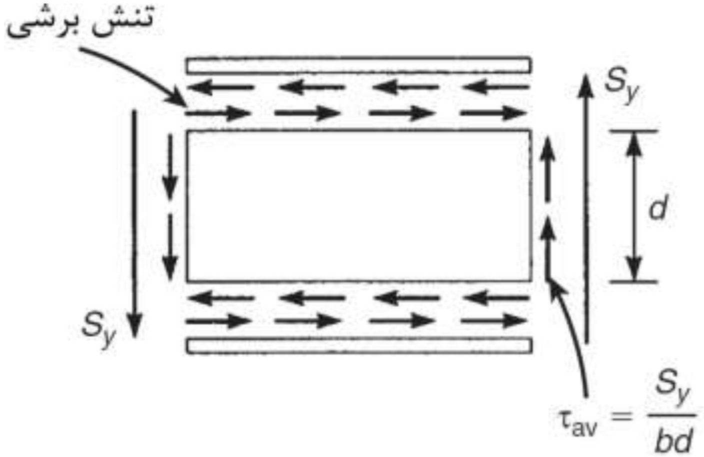
$$\sigma_s = \pm\frac{50\times10^6\times150}{27\times10^6+\dfrac{1067\times10^6}{12}} = \pm64.7\frac{N}{mm^2}$$

با بررسی تیر مرکب نشان داده شده در شکل۱۲-٤الف دیده می‌شود که تیر چوبی توسط دو ورق فولادی در بالا و پایین خود مسلح شده است.



شکل۱۲-٤تیر مرکب تشکیل شده از ورق فولادی در سطح بالا و پایینی

تیر فوق را می‌توان یا به صورت شکل نشان داده شده در شکل ۱۲-٤ب به صورت یک تیر کاملاً چوبی و یا مانند تیر شکل ۱۲-٤ج به صورت تیر کاملاً فولادی تبدیل نماییم. بعد از تبدیل آنها، تنش موجود در اثر خمش را می‌توان به سادگی توسط رابطه ۱۲-۷ و ۱۲-۸ محاسبه نمود. تفاوت عمده شکل۱۲-٤ با شکل ۱۲-۱ در آن است که اگر تیر تحت برش قرار گیرد، اتصال بین تیر چوبی و فولادی بایستی توانایی مقاومت در برابر نیروهای برشی بوجود آمده در مابین آنها مانند شکل۱۲-۵ را داشته باشد.



شکل۱۲-۵ تنش برشی مابین صفحه فولادی و تیر چوبی

به طور کلی فرض می‌نماییم که تمام نیروی برشی قائم توسط تیر چوبی تحمل می‌شود. مقدار تنش برشی متوسط برابر است با:

$$\tau_{av} = \frac{S_y}{bd}$$

بنابراین، مقدار تنش برشی افقی موثر نیز برابر با S_y / bd خواهد بود.

مثال۱۲-۲) یک تیر چوبی به مقطع مستطیلی به ابعاد $100 \times 200mm$ در سطح بالایی و پایینی خود توسط صفحه‌های فولادی به ضخامت 15 وعرض 100 مسلح شده است. تیر مرکب ایجاد شده دارای تکیه‌گاه‌های ساده می‌باشد. طول دهانه تیر برابر ٤متر است. این تیر تحت یک بار گسترده به شدت *10kN/m* قرار دارد. مقدار تنش حداکثر در صفحه‌های فولادی و تیر چوبی را تعیین نموده و همچنین مقدار تنش موجود در محل اتصال دو ماده بر حسب واحد طول را تعیین نمایید. $E_s / E_t = 15$

حل) گشتاور دوم سطح تیر مرکب حول محور مرکزی تیر برابر است با:

$$I_t = \frac{100 \times 200^3}{12} = 66.7 \times 10^6 mm^4$$

$$I_s = 2 \times 15 \times 100 \times 107.5^2 = 34.7 \times 10^6 mm^4$$

مقدار تنش حداکثر تیر، در وسط دهانه و جایی که مقدار گشتاور حداکثر باشد ایجاد می‌شود. بنابراین داریم:

$$M_{\max} = \frac{10\times 4^2}{8} = 20kN.m$$

با استفاده از رابطه ۱۲–۷ داریم:

$$\sigma_{t,\max} = \pm\frac{20\times 10^6 \times 100}{66.7\times 10^6 + 15\times 34.7\times 10^6} = \pm 3.4\frac{N}{mm^2}$$

و با استفاده از رابطه ۱۲–۸ داریم:

$$\sigma_{s,\max} = \pm\frac{20\times 10^6 \times 115}{34.7\times 10^6 + \dfrac{66.7\times 10^6}{15}} = \pm 58.8\frac{N}{mm^2}$$

مقدار حداکثر برش تیر در محل تکیه‌گاه‌ها ایجاد شده و مقدار آن برابر $10\times 4/2 = 20kN$ است. بنابراین مقدار تنش برشی متوسط در تیر چوبی برابر است با:

$$\tau_{av} = \frac{20\times 10^3}{100\times 200} = 1\frac{N}{mm^2}$$

نیروی برشی بر واحد طول در محل اتصال دو قطعه برابر $1\times 100 = 100 N/mm$ است.

۱۲-۲ تیرهای بتن مسلح

در فصل هشتم به بعضی از خصوصیات مواد اشاره شد و گفته شد که بتن ماده‌ای ترد و شکننده بوده و دارای مقاومت کششی پایینی می‌باشد. در صورتی که بتن به صورت خالص به کار رود رفتار تردی را در ناحیه کششی از خود نشان داده و دچار ترک‌هایی در این ناحیه می‌شود. برای غلبه بر این ضعف، آنها را در ناحیه کششی (و گاهی حتی در ناحیه فشاری) توسط آرماتورهای فولادی مسلح می‌کنند. از اجتماع این دو ماده بتن مسلح یا بتن آرمه ایجاد شده که ماده‌ای مرکب است. در طراحی سازه‌های بتنی روش تحلیل ارتجاعی[1] کمتر مورد استفاده قرار گرفته و روش طراحی معمولاً روش بار نهایی[2] می‌باشد. در اینجا هر یک از این دو روش به صورت مختصر بیان می‌گردند.

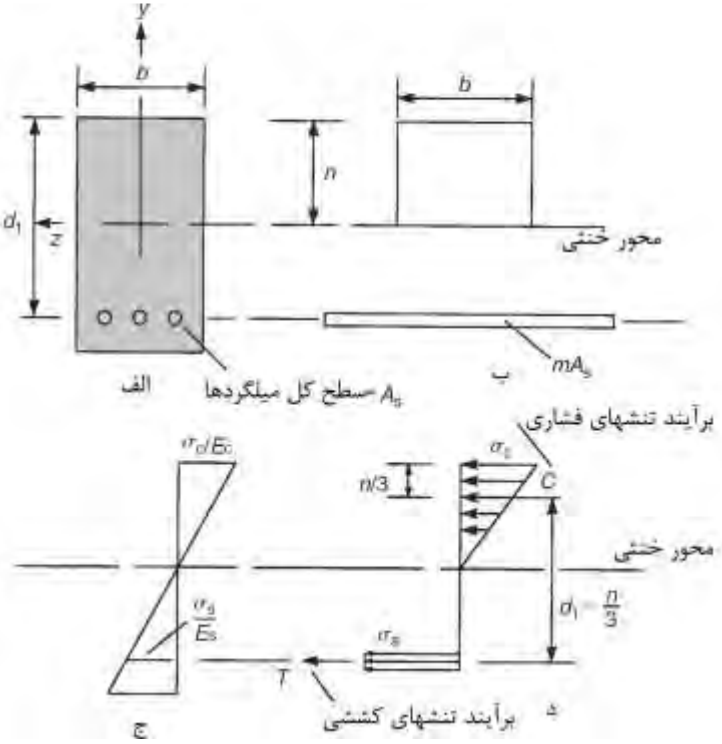
روش تحلیل ارتجاعی

تیر نشان داده شده در شکل ۱۲–۶الف را در نظر بگیرید. تیر مورد بحث تحت یک گشتاور خمشی M، می‌باشد و در ناحیه کششی خود توسط میلگردهای فولادی به مساحت A_s

[1] Elastic method
[2] Ultimate load method

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مسلح شده است. مرکز سطح میلگردها به فاصله d_1 از سطح بالایی تیر قرار دارد. عمق d_1 تحت عنوان عمق موثر[1] تیر شناخته می‌شود.



شکل۱۲-۶ تیر بتن مسلح

گشتاور خمشی باعث تولید فشار در ناحیه بالای محور خنثی می‌شود. فاصله محور خنثی تا سطح بالایی برابر n فرض می‌شود. قسمت پایین تارخنثی چون تحت کشش قرار دارد فرض می‌شود که ترک خورده و سهمی از نیروهای کششی را تحمل نمی‌نماید، بنابراین تمام نیروهای کششی توسط میلگردها منتقل و تحمل می‌شوند. با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۱۲-۱ می‌توان این تیر مرکب را تحلیل نمود. در این حالت می‌توان میگردهای فولادی را به بتن تبدیل نمود تا جنس کل مقطع یکی شود. مساحت معادل، برابر mA_s می‌باشد که m نسبت مدولی[2] نامیده می‌شود و به صورت زیر تعیین می‌شود:

---

[1] Effective depth

[2] Modular ratio

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$m = \frac{E_s}{E_c}$$

در حالی که E_s و E_c به ترتیب ضریب ارتجاعی[1] فولاد و بتن هستند. مقطع تبدیل یافته در شکل۱۲–۶ب نشان داده شده است. با گرفتن گشتاور حول محور خنثی داریم:

$$bn\frac{n}{2} = mA_s\left(d_1 - n\right)$$

با بازنویسی رابطه اخیر، یک معادله درجه دوم[2] برحسب n حاصل می‌شود.

$$\frac{bn^2}{2} + mA_s n - mA_s d_1 = 0 \qquad (۱۲–۹)$$

با حل رابطه بدست آمده خواهیم داشت:

$$n = \frac{mA_s}{b}\left(\sqrt{1 + \frac{2bd_1}{mA_s}} - 1\right) \qquad (۱۲–۱۰)$$

گشتاور دوم سطح I_c، مقطع تبدیل یافته برابر است با:

$$I_c = \frac{bn^3}{3} + mA_s\left(d_1 - n\right)^2 \qquad (۱۲–۱۱)$$

بنابراین حداکثر تنش σ_c، ایجاد شده در بتن برابر است با:

$$\sigma_c = -\frac{Mn}{I_c} \qquad (۱۲–۱۲)$$

تنش σ_s موجود در فولاد می‌تواند با استفاده از دیاگرام کرنش نشان داده شده در شکل ۱۲–۶ج حاصل شود. تغییرات کرنش در عمق تیر به صورت خطی در نظر گرفته شده است. از آنجایی که فرض می‌نماییم تیر بعد از خمش به صورت صفحه باقی می‌ماند، با استفاده از تشابه مثلثاتی داریم:

$$\frac{\dfrac{\sigma_s}{E_s}}{d_1 - n} = -\frac{\dfrac{\sigma_c}{E_c}}{n}$$

بنابراین

$$\sigma_s = -\sigma_c \frac{E_s}{E_c}\left(\frac{d_1 - n}{n}\right) = -\sigma_c m\left(\frac{d_1 - n}{n}\right) \qquad (۱۲–۱۳)$$

با جایگذاری σ_c در رابطه ۱۲–۱۲ داریم:

---

[1] Young's moduli

[2] Quadratic equation

$$\sigma_s = \frac{mM}{I_c}(d_1 - n) \tag{۱۴-۱۲}$$

در خیلی از اوقات به جای محاسبه مقدار تنش بوجود آمده در تیر تحت اثر گشتاور اعمال شده، تمایل به محاسبه گشتاور مقاوم تیر را داریم که در آن لحظه بتن و فولاد به حداکثر مقدار تنش مجاز خود می‌رسند. با استفاده از روابط ۱۲-۱۲ و ۱۲-۱۴ می‌توان به این هدف رسید. با استفاده از دیاگرام تنش نشان داده شده در شکل ۱۲-۶د داریم:

$$M = C\left(d_1 - \frac{n}{3}\right)$$

بنابراین؛

$$M = \frac{\sigma_c}{2} bn\left(d_1 - \frac{n}{3}\right) \tag{۱۵-۱۲}$$

با گرفتن گشتاور حول محور مرکزی دیاگرام تنش بتن داریم:

$$M = T\left(d_1 - \frac{n}{3}\right)$$

$$M = \sigma_s A_s\left(d_1 - \frac{n}{3}\right) \tag{۱۶-۱۲}$$

مثال۱۲-۳) یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی با عرض ۲۰۰ و در عمق ۳۰۰ میلیمتری توسط دو میلگرد با قطر هر یک برابر ۲۰ میلیمتر مسلح شده است. در صورتی که تیر تحت گشتاور خمشی *30kN.m* قرار داشته و نسبت مدولی آنها برابر ۱۵ باشد، مقدار تنش در بتن و فولاد را محاسبه کنید.

حل) مساحت میلگردهای مسلح کننده برابر است با:

$$A_s = 2 \times \frac{\pi}{4} \times 20^2 = 628.3mm^2$$

موقعیت محور خنثی با استفاده از رابطه ۱۲-۱۰ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$n = \frac{15 \times 628.3}{200}\left(\sqrt{1 + \frac{2 \times 200 \times 350}{15 \times 628.3}} - 1\right) = 140.5mm$$

حال با استفاده از رابطه ۱۲-۱۱ داریم:

$$I_c = \frac{200 \times 140.5^3}{3} + 15 \times 628.3(350 - 140.5)^2 = 598.5 \times 10^6 mm^4$$

حداکثر تنش در بتن با استفاده از رابطه ۱۲-۱۲ به صورت زیر خواهد بود:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\sigma_c = -\frac{30\times10^6\times140.5}{598.5\times10^6} = -7\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

با استفاده از رابطه ۱۲-۱٤ داریم:

$$\sigma_s = \frac{15\times30\times10^6}{598.5\times10^6}(350-140.5) = 157.5\frac{N}{mm^2}$$ کششی

مثال۱۲-٤) یک تیر بتنی مستطیلی به عرض ۲۵۰ میلیمتر را در نظر بگیرید که در عمق ٤۰۰ میلیمتری خود توسط سه میلگرد به قطر ۲۰ میلیمتر مسلح شده است. تنش مجاز فولاد و بتن به ترتیب برابر $7N/mm^2$ و $140N/mm^2$ است. مقدار حداکثر گشتاوری که می‌تواند به تیر اعمال شود را تعیین نمایید. نسبت مدولی آنها را برابر ۱۵در نظر بگیرید.

حل) مساحت میلگردهای مسلح کننده برابر است با:

$$A_s = 3\times\frac{\pi}{4}\times20^2 = 942.5mm^2$$

موقعیت محور خنثی با استفاده از رابطه ۱۲-۱۰ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$n = \frac{15\times942.5}{250}\left(\sqrt{1+\frac{2\times250\times400}{15\times942.5}}-1\right) = 163.5mm$$

حداکثر گشتاور قابل اعمال به صورتی که مقدار تنش‌ها از مقادیر مجاز تجاوز نکنند با استفاده از رابطه ۱۲-۱۵ بدست می‌آید.

$$M = \frac{7}{2}\times250\times163.5\left(400-\frac{163.5}{3}\right)\times10^{-6} = 49.4kN.m$$

بهمین نحو با استفاده از رابطه ۱۲-۱٦ مقدار گشتاور اعمالی به صورتی که از حد تنش مجاز فولاد تجاوز ننماید به صورت زیر است:

$$M = 140\times942.5\left(400-\frac{163.5}{3}\right)\times10^{-6} = 45.6kN.m$$

بنابراین مقدار کمترین گشتاور بدست آمده ملاک عمل خواهد بود.

مثال۱۲-۵) یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی برای تحمل لنگری به میزان *40kN.m* مورد نیاز است. در صورتی که عرض تیر برابر ۲۵۰ میلیمتر و عمق موثر آن نیز برابر ٤۰۰ میلیمتر باشد، حداکثر تنش مجاز در فولاد و بتن بترتیب برابر ۱۲۰ و ٦/۵ نیوتن بر میلیمتر مربع

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

باشد، همچنین نسبت مدولی برابر ۱۵ باشد، مساحت فولاد مورد نیاز برای این تیر را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۱۳ داریم:

$$120 = 6.5 \times 15\left(\frac{400}{n} - 1\right)$$

که مقدار $n = 179.3mm$ می‌باشد. مقدار مساحت میلگرد مورد نیاز با استفاده از رابطه ۱۲-۱۶ بصورت زیر تعیین می‌شود.

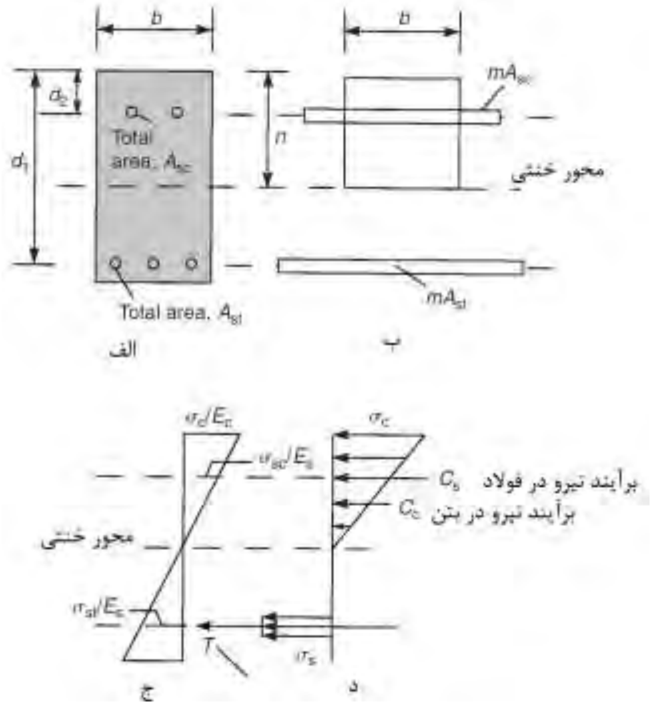
$$A_s = \frac{M}{\sigma_s\left(d_1 - \frac{n}{3}\right)}$$

$$\Rightarrow A_s = \frac{40 \times 10^6}{120\left(400 - \frac{179.3}{3}\right)} = 979.7mm^2$$

تیر نشان داده شده در شکل۱۲-۷الف در نواحی فشاری و کششی خود مسلح شده است. مرکز سطح میلگردهای واقع در ناحیه کششی[1] به فاصله d_2 از لبه بالایی قرار دارد. مساحت میلگردهای موجود در ناحیه فشاری برابر A_{sc} است در حالی که مساحت میلگردهای موجود در ناحیه کششی برابر A_{st} بوده که در فاصله d_1 از سطح بالایی قرار دارد. مقطع را می‌توان به شکل ۱۲-۷ب تبدیل نمود.

[1] Compression zones

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۲-۷ تیر بتنی با میلگرد در ناحیه کششی و فشاری

با گرفتن گشتاور حول محور خنثی داریم:

$$\frac{bn^2}{2} - A_{sc}(n-d_2) + mA_{sc}(n-d_2) = mA_{st}(d_1 - n)$$

با بازنویسی رابطه اخیر خواهیم داشت:

$$\frac{bn^2}{2} + (m-1)A_{sc}(n-d_2) = mA_{sc}(d_1 - n) \qquad (۱۷-۱۲)$$

گشتاور دوم سطح برای مقطع تبدیل یافته برابر است با:

$$I_c = \frac{bn^3}{3} + (m-1)A_{sc}(n-d_2)^2 + mA_{sc}(d_1 - n)^2 \qquad (۱۸-۱۲)$$

و حداکثر تنش در بتن برابر است با:

$$\sigma_c = -\frac{Mn}{I_c}$$

تنش در فولاد کششی و فولاد فشاری با استفاده از دیاگرام کرنش نشان داده شده در شکل۱۲-۷ج بدست می‌آید. بنابراین:

$$\frac{\frac{\sigma_{sc}}{E_s}}{n-d_2}=\frac{\frac{\sigma_c}{E_c}}{n} \qquad (۱۹-۱۲)$$

همچنین

$$\sigma_{sc}=\frac{m(n-d_2)}{n} \qquad \sigma_c=\frac{mM(n-d_2)}{I_c} \qquad (۲۰-۱۲)$$

$$\sigma_{st}=\frac{mM}{I_c}(d_1-n) \qquad (۲۱-۱۲)$$

با استفاده از دیاگرام تنش نشان داده شده در شکل ۱۲-۷د داریم:

$$M=T(d_1-d_2)-C_c\left(\frac{n}{3}-d_2\right)$$

$$M=\sigma_{st}A_{st}(d_1-d_2)-\frac{\sigma_c}{2}bn\left(\frac{n}{2}-d_2\right) \qquad (۲۲-۱۲)$$

مثال۱۲-۶) یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی به عرض ۱۸۰ و عمق ۳۶۰ میلیمتر را در نظر بگیرید که تحت یک لنگر خمشی به اندازه $45kN.m$ قرار گرفته است. این تیر در قسمت فشاری خود نیز توسط میلگردهای فولادی مسلح شده است که به فاصله ۴۰ میلیمتری از سطح بالایی تیر قرار گرفته‌اند. در صورتی که تنش مجاز بتن و فولاد به ترتیب برابر $8.5N/mm^2$ و $140N/mm^2$ بوده و نسبت مدولی نیز برابر ۱۵ فرض شود، مساحت میلگرد مورد نیاز را بدست آورید.

حل) فرض می‌نماییم که تنش در بتن و فولاد به حد مجاز خود رسیده، حال توسط رابطه ۱۲-۱۲ محور خنثی تیر محاسبه می‌شود. بنابراین:

$$140=8.5\times15\left(\frac{360}{n}-1\right)$$

$$\Rightarrow \qquad n=171.6mm$$

با جایگزین نمودن مقدار n در رابطه ۱۲-۲۲ داریم:

$$45\times10^6=140A_{st}(360-40)+\frac{8.5}{2}\times180\times171.6\left(\frac{171.6}{3}-40\right)$$

$$\Rightarrow \qquad A_{st}=954mm^2$$

برای تعیین مقدار A_{sc}، با جایگزینی n و A_{st} در رابطه ۱۲-۱۷ داریم:

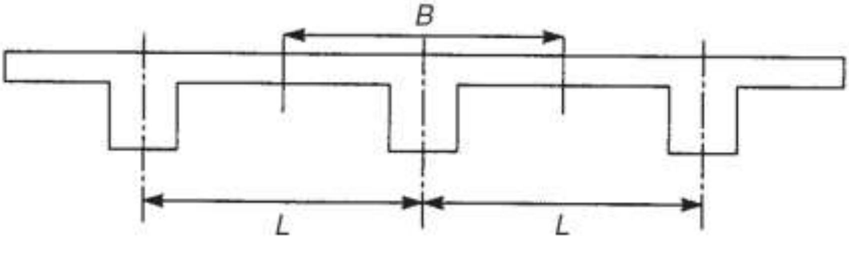
$$\frac{180\times171.6^2}{2}+(15-1)A_{sc}(171.6-40)=15\times954(360-171.6)$$

$$\Rightarrow \qquad A_{sc}=24.9mm^2$$

مقدار تنش فشاری در فولاد را می‌توان با استفاده از رابطه ۱۲-۲۰ بدست آورد.

$$\sigma_{sc}=-15\frac{(171.6-40)}{171.6}\times8.5=-97.8\frac{N}{mm^2}$$ فشاری

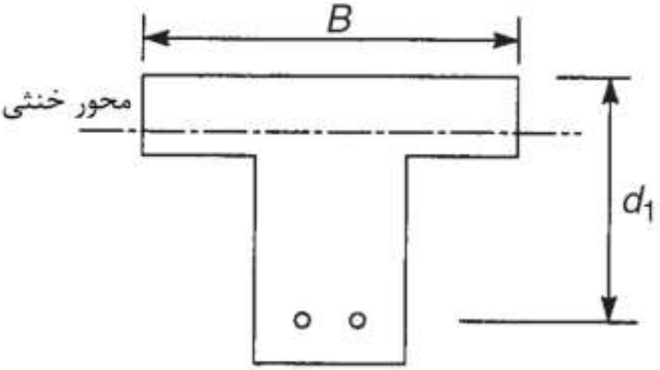
در بسیاری از کارهای عملی، تیرهای بتن مسلح همراه با دال‌های بتنی همانند شکل۱۲-۸ اجرا می‌شود. در این حالت قسمتی از دال بالایی تیر نیز در باربری آن نقش ایفا کرده و قسمتی از دال را می‌توان جزو تیر در نظر گرفت. بنابراین همانند شکل نشان داده شده طول B از دال نیز جزو تیر بوده و با جدا نمودن آن کل تیر به صورت یک تیر T شکل می‌شود و همواره از طول L کوچکتر است. مقدار B در آیین‌نامه‌ها ذکر شده است. در تیر T شکل تار خنثی ممکن است داخل بال و یا پایین آن قرار گیرد. در این حالت نیز می‌توان مشابه تیرهای مستطیلی عمل نمود.



شکل۱۲-۸ دال بتن مسلح

شکل۱۲-۹ یک تیر T شکل را نشان می‌دهد که دارای عرض B و عمق موثر d_1 است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



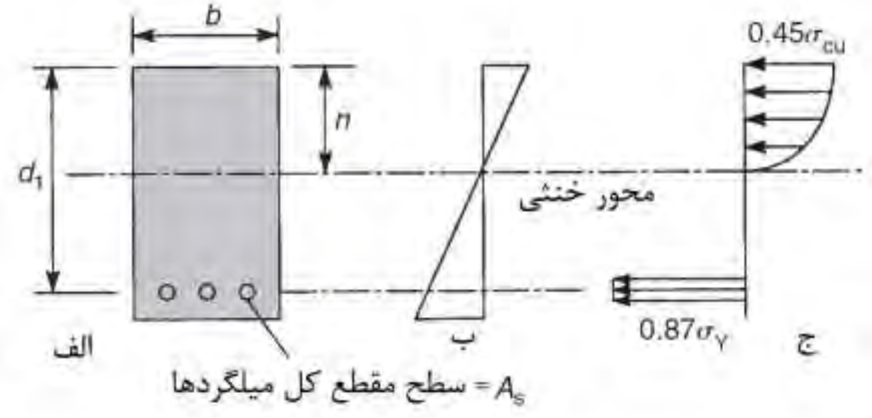
شکل۱۲-۹ تحلیل تیر بتن مسلح T شکل

تئوری بار نهایی

آیین‌نامه‌های جدید در زمینه طراحی سازه‌های بتنی براساس روش‌های مقاومت نهایی استوار هستند. برآورد میزان گشتاور مقاوم مقطع بر اساس خرابی بتن در فشار و تسلیم فولاد در کشش استوار است. برای حفظ حاشیه ایمنی در طراحی لازم است ضرائب اطمینانی در طراحی به کار برده شود. این ضرائب اطمینان در آیین‌نامه‌ها متفاوت منظور شده‌اند. در ادامه بحث فرض نمایید ضریب کاهش مقاومت برابر ۱/۵ برای بتن (براساس مقاومت ۲۸ روزه نمونه مکعبی شکل) و ۱/۱۵ برای فولاد می‌باشد. هنگامی که بتن به مقاومت نهایی خود رسیده خرابی آن به صورت ناگهانی خواهد بود، لیکن تسلیم شدن فولاد به صورت تدریجی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۲-۱۰ توزیع تنش و کرنش در یک تیر بتن مسلح

بنابراین ارجع آن است که ابتدا تسلیم در فولاد ایجاد شود تا تا حاشیه اطمینانی وجود داشته باشد. زیرا که هدف آیین‌نامه‌ها جلوگیری از یک خرابی ترد و ناگهانی است. با توجه به ضرائب اطمینان ارائه شده در فوق فرض کنید مقاومت طراحی برای بتن در فشار به صورت زیر است:

$$\frac{\sigma_{cu}}{1.5}\times 0.67 = 0.45\sigma_{cu}$$

که در آن σ_{cu} مقاومت مشخصه نمونه ۲۸ روزه بتن مکعبی شکل است و برای فولاد نیز داریم[1]:

$$\frac{\sigma_Y}{1.15} = 0.87\sigma_Y$$

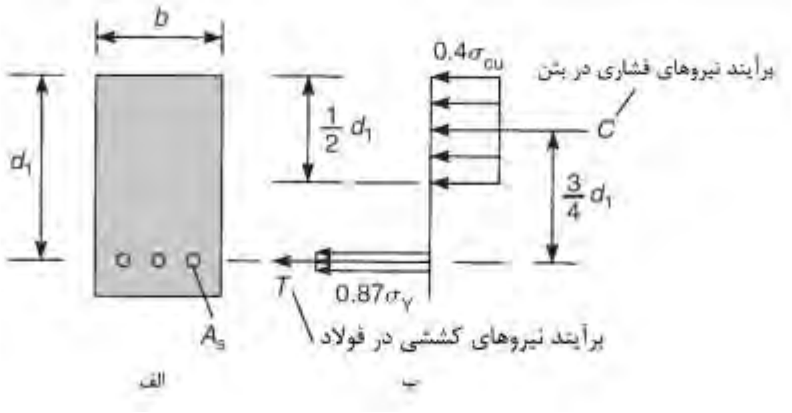
در تحلیل تیرهای بتنی فرض می‌شود که مقطع بعد از خمش به صورت مسطح باقی می‌ماند. این فرض بدان معناست که مانند شکل۱۲-۱۰ب تغییرات کرنش در عمق تیر به صورت خطی خواهد بود لیکن تغییرات تنش در تیر مانند شکل۱۲-۱۰ج به شکل سهمی[2] می‌باشد. در صورتی که بجای توزیع تنش به شکل سهمی از یک توزیع مستطیلی شکل

[1] توجه شود مقادیر مقاومت طراحی ارائه شده فرضی است و اصولاً با مقادیر توصیه شده آیین‌نامه‌های طراحی ممکن است متفاوت باشد.

[2] Parabolic

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

همانند شکل ۱۲-۱۱ب استفاده نماییم به راحتی می‌توان مقدار گشتاور طراحی M_u برای تیر را به صورت زیر محاسبه نمود:



شکل۱۲-۱۱ توزیع تقریبی تنش در تیر بتن مسلح /

$$M_u = C\frac{3}{4}d_1 = 0.4\sigma_{cu}b\frac{1}{2}d_1\frac{3}{4}d_1$$

$$M_u = 0.15\sigma_{cu}b(d_1)^2 \qquad (۲۳-۱۲)$$

و یا به عبارتی دیگر:

$$M_u = T\frac{3}{4}d_1 = 0.87\sigma_Y A_s\frac{3}{4}d_1$$

$$M_u = 0.65\sigma_Y A_s d_1 \qquad (۲٤-۱۲)$$

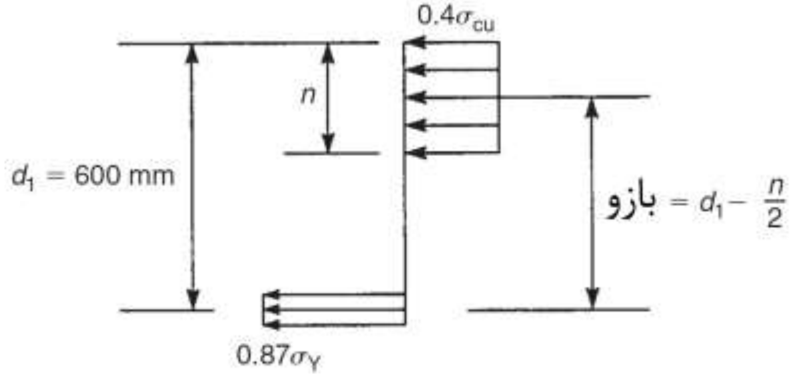
مثال۱۲-۷) یک تیر بتن مسلح دارای عمق موثر ٦۰۰ میلیمتر و عرض ۲۵۰ میلیمتر تحت گشتاور خمشی به اندازه *350kN.m* قرار گرفته است. در صورتی که مقاومت ۲۸ روزه نمونه مکعبی شکل برابر $30N/mm^2$ و تنش تسلیم فولاد مسلح کننده برابر $400N/mm^2$ باشد، مقدار فولاد مورد نیاز را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۲۳ داریم:

$$M_u = 0.15\times 30\times 250\times 600^2\times 10^{-6} = 405kN.m$$

چون مقدار گشتاور نهایی مقطع بیش از گشتاور خمشی اعمال شده است، به آرماتورهای فشاری نیازی نیست. فرض می‌نماییم که توزیع تنش در مقطع مطابق شکل۱۲-۱۲ است و تار خنثی به فاصله n از سطح بالایی مقطع قرار دارد.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۲-۱۲ توزیع تنش در تیر مثال۱۲-۷

با گرفتن گشتاور حول محور فولادهای مسلح کننده داریم:

$$350\times10^6 = 0.4\times30\times250n\left(600-\frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad n = 243.3mm$$

مقدار بازوی نیروها برابر $600 - 243.3/2 = 478.4mm$ می‌باشد. حال با گشتاورگیری حول مرکز برآیند نیروهای فشاری بتن داریم:

$$0.87\times400\times A_s\times478.4 = 350\times10^6$$

$$\Rightarrow \qquad A_s = 2102.3mm^2$$

مثال۱۲-۸) یک تیر بتنی به عرض ۲۵۰ میلیمتر و با حداقل عمق موثر ممکن را برای تحمل گشتاوری به میزان *350kN.m* طراحی نمایید. فرض کنید که $\sigma_{cu} = 30N/mm^2$ و $\sigma_Y = 400N/mm^2$ باشد.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۲۳ و چون می‌خواهیم مقدار عمق موثر مقطع حداقل باشد، فرض می‌کنیم که گشتاور اعمال شده برابر با مقاومت نهایی مقطع است.

$$350\times10^6 = 0.15\times30\times250\times d_1^2$$

$$\Rightarrow \qquad d_1 = 557.8mm$$

مقدار $d_1 = 558mm$ فرض می‌شود. از آنجایی که تنش به حد نهایی خود رسیده است، با توجه به شکل ۱۲-۱۱ب مقدار بازوی نیرو برابر است با:

$$\frac{3}{4}d_1 = \frac{3}{4}\times558 = 418.5mm$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

از اینرو با استفاده از رابطه ۱۲-۲٤ داریم:

$$350 \times 10^6 = 0.87 \times 400 A_s \times 418.5$$

$$\Rightarrow \qquad A_s = 2403.2 mm^2$$

با مقایسه مثال‌های ۱۲-۸ و ۱۲-۷ می‌توان به این نتیجه رسید، در صورتی که عمق موثر مقطع کم شود، به مساحت فولادهای کششی اضافه خواهد شد. همچنین بایستی توجه داشت که برای کاهش مقطع نیز می‌توانیم از فولادهای فشاری نیز استفاده نمود که در این صورت تنش طراحی برابر $0.72\sigma_Y$ خواهد بود. در مثال زیر نحوه تحلیل تیر بتنی همراه با فولاد فشاری نشان داده شده است.

مثال۱۲-۹) یک تیر بتنی به عرض ۳۰۰ میلیمتر و فولادهای کششی در عمق موثر ٦۱۸ میلیمتری و فولادهای فشاری در عمق ٦۰ میلیمتری تیر قرار گرفته‌اند. اگر $\sigma_{cu} = 30 N/mm^2$ و $\sigma_Y = 410 N/mm^2$ باشد، فولاد مورد نیاز برای این تیر که تحت گشتاور خمشی برابر *650kN.m* است را طراحی نمایید.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۲۳ مقدار گشتاور خمشی نهایی به صورت زیر است.

$$M_u = 0.15 \times 30 \times 300 \times 618^2 \times 10^{-6} = 515.6 kN.m$$

مقدار گشتاور بدست آمده از گشتاور اعمال شده بر تیر کمتر بوده، بنابراین در تیر به فولاد فشاری برای تحمل گشتاور $650 - 515.6 = 134.4 kN.m$ نیاز است. در صورتی که A_{sc} مقدار مساحت فولاد فشاری باشد، خواهیم داشت:

$$134.4 \times 10^6 = \text{بازوی نیرو} \times 0.72 \times 410 A_{sc}$$

$$134.4 \times 10^6 = (618 - 60) \times 0.72 \times 410 A_{sc}$$

$$\Rightarrow \qquad A_{sc} = 815.9 mm^2$$

فولاد کششی A_{st} برای تحمل گشتاور خمشی معادل با $515.6 kN.m$ بعلاوه گشتاور اضافی $134.4 kN.m$ مورد نیاز است.

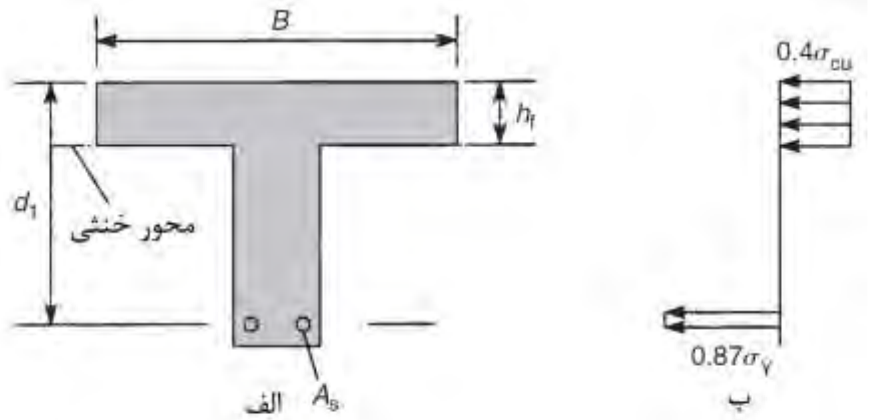
$$A_{st} = \frac{515.6 \times 10^6}{0.72 \times 618 \times 0.87 \times 410} + \frac{134.4 \times 10^6}{(618 - 60) \times 0.87 \times 410}$$

$$\Rightarrow \qquad A_{st} = 3793.8 mm^2$$

تحلیل مقاومت نهایی تیرهای T شکل بتن مسلح نیز مانند تیرهای مستطیلی است. در صورتی که تار خنثی در بالای بال قرار گیرد تمام روابط قبلی صادق می‌باشد. در صورتی که تار خنثی مانند شکل ۱۲-۱۳الف در پایین تار خنثی قرار گیرد، گشتاور خمشی نهایی تیر کمترین مقادیر زیر خواهد بود.

$$M_u = 0.4\sigma_{cu} B h_f \left(d_1 - \frac{h_f}{2} \right) \qquad (۱۲-۲۵)$$

$$M_u = 0.87\sigma_Y A_s \left(d_1 - \frac{h_f}{2} \right) \qquad (۱۲-۲۶)$$



شکل ۱۲-۱۳ بار نهایی یک تیر T شکل

تیرهای T شکل توسط هندسه‌ای که دارند، موجب کاهش مصرف فولاد شده و از مقاومت فشاری بتن به نحو موثرتری استفاده می‌شود.

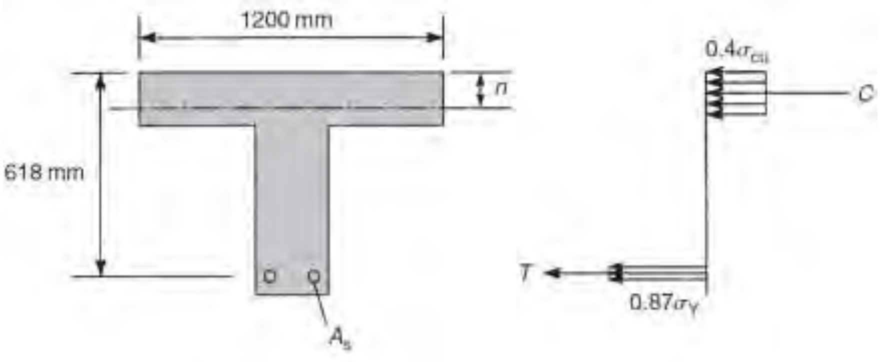
مثال۱۲-۱۰) یک تیر بتن مسلح با مقطع T شکل و به عرض بال ۱۲۰۰ میلیمتر و عمق موثر ۶۱۸ میلیمتر و عمق بال برابر ۱۵۰ میلیمتر را در نظر بگیرید. در صورتی که تیر تحت گشتاور خمشی $500kN.m$ قرار داشته باشد مقدار فولاد مورد نیاز آن را تعیین نمایید. مقدار $\sigma_{cu} = 30N/mm^2$ و $\sigma_Y = 410N/mm^2$ فرض شوند.

حل) مقدار M_u با استفاده از رابطه ۱۲-۲۵ به صورت زیر خواهد بود

$$M_u = 0.4 \times 30 \times 1200 \times 150 \left(618 - \frac{150}{2} \right) \times 10^{-6} = 1173 kN.m$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

چون مقدار گشتاور اعمال شده کمتر از گشتاور حد نهایی تیر می‌باشد پس می‌توان نتیجه گرفت که تار خنثی در بال قرار دارد. با توجه به شکل ۱۲-۱۴ داریم:



شکل ۱۲-۱۴ تیر بتن مسلح مثال ۱۲-۱۰

$$500\times10^6 = 0.4\times30\times1200n\left(618-\frac{n}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad n = 59mm$$

با گشتاورگیری حول مرکز بتن فشاری داریم:

$$500\times10^6 = 0.87\times410\times A_s\left(618-\frac{59}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad A_s = 2381.9mm^2$$

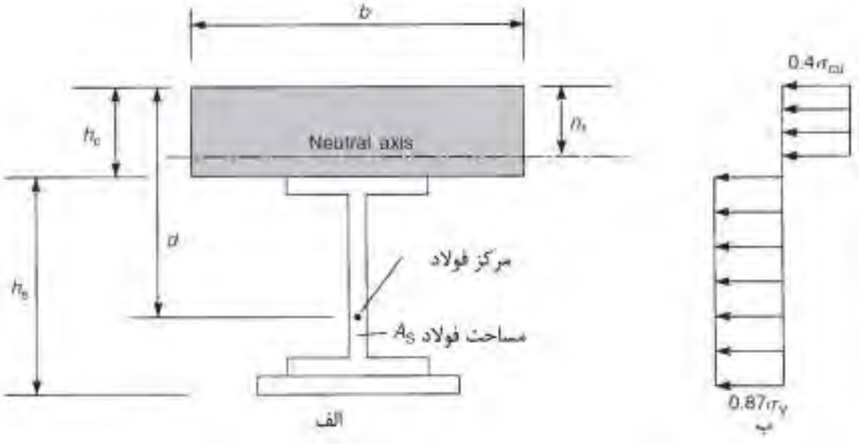
۱۲-۳ تیرهای فولادی و بتنی

در بسیاری از موارد از یک دال بتنی و تیر فولادی با یکدیگر مورد استفاده قرار گرفته و این دو ماده توسط اتصالات برشی[1]، یک تیر مرکب را تشکیل می‌دهند. این وسایل اتصال باعث جلوگیری لغزش بین بتن و فولاد در حین خمش شده و کل مقطع به صورت یکدست رفتار خواهد نمود.

در اینجا نیز فرض می‌شود که صفحه خمش بعد از خمش به صورت صفحه باقی می‌ماند. با توجه به تیر مرکب نشان داده شده در شکل ۱۲-۱۵الف و با فرض اینکه تار خنثی در بتن ایجاد می‌شود. همچنین از سهم بتن ناحیه کششی در تحمل مقاومت خمشی تیر صرف نظر می‌شود، توزیع تنش در ارتفاع تیر مانند شکل ۱۲-۱۵ب خواهد بود.

[1] Shear connectors

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۲-۱۵ تحلیل بار نهایی یک تیر مرکب از فولاد و بتن، تار خنثی در بتن

بنابراین:

$$M = 0.87\sigma_Y A_s \frac{(h_c + h_s)}{2} \qquad (۱۲-۲۷)$$

مقدار نیروی فشاری موجود در دال بتنی در صورتی که نیروی کششی از $0.87\sigma_Y A_s$ در فولاد تجاوز نکند برابر $0.4\sigma_{cu} bh_c$ خواهد بود. با استفاده از معادله تعادل داریم:

$$0.4\sigma_{cu} bn_1 = 0.87\sigma_Y A_s \qquad (۱۲-۲۸)$$

سپس با استفاده از رابطه ۱۲-۱۵ داریم:

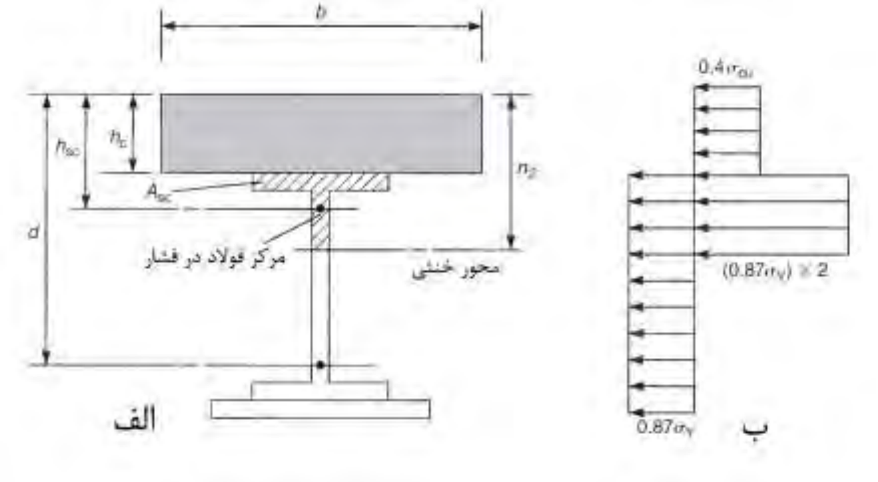
$$M_u = 0.87\sigma_Y A_s \left(d - \frac{n_1}{2} \right) \qquad (۱۲-۲۹)$$

در صورتی که مساحت فولاد در فشاری برابر A_{sc} بایستی نیروهای فشاری و کششی برابر شوند.

$$0.4\sigma_{cu} bh_c + 2 \times (0.87\sigma_Y) A_{sc} = 0.87\sigma_Y A_s \qquad (۱۲-۳۰)$$

با گشتاور گیری داریم:

$$M_u = 0.87\sigma_Y A_s \left(d - \frac{h_c}{2} \right) - 2 \times (0.87\sigma_Y) A_{sc} \left(h_{sc} - \frac{h_c}{2} \right) \qquad (۱۲-۳۱)$$



شکل۱۲-۱۶ تحلیل بار نهایی یک تیر مرکب از فولاد و بتن، تار خنثی در فولاد

مثال۱۲-۱۱) یک تیر بتنی به ضخامت ۱۵۰ میلیمتر و به عرض ۱/۸ متر که بر روی یک تیر فولادی قرار دارد را در نظر بگیرید. در صورتی که گشتاور خمشی *709kN.m* بر آن اثر نماید. مقطع تیر مناسب برای این تیر مرکب را تعیین نمایید. مقدار $\sigma_{cu}=30N/mm^2$ و $\sigma_Y=350\,N/mm^2$ فرض شود.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۲۷ داریم

$$A_s=\frac{2\times 709\times 10^6}{0.87\times 350\times 562}=8286mm^2$$

نیروی کششی در فولاد برابر است با:

$$0.87\times 350\times 8286\times 10^{-3}=2523\,kN$$

و نیروی فشاری در بتن برابر است با:

$$0.4\times 1.8\times 10^3\times 150\times 30\times 10^{-3}=3240\,kN$$

تارخنثی در محل بتن ایجاد شده و مقدار مساحت فولاد کششی برابر A_s می‌باشد. از جدول استاندارد مقاطع *IPE400* انتخاب می‌شود که دارای مساحت $8450mm^2$ می‌باشد. با استفاده از رابطه ۱۲-۲۸ داریم:

$$0.4\times 30\times 1800\,n_1=0.87\times 350\times 8450$$

$$\Rightarrow \qquad n_1=119.12mm$$

با جایگذاری مقدار n_1 در رابطه ۱۲-۲۹ مقدار گشتاور مقاوم مقطع مرکب تیر بدست می‌آید.

$$M_u = 0.87\times 350\times 8450\left(350-60\right)\times 10^{-6} = 746.17\,kN.m$$

از آنجایی که مقدار بدست آمده بیشتر از لنگر اعمال شده است، بنابراین مقطع تیر برای نیروهای اعمالی کفایت می‌کند.

مسائل

۱) یک تیر چوبی به عرض ۲۰۰ و عمق ۳۰۰ میلیمتر در سطح بالا و پایینی خود توسط صفحه‌های فولادی به عرض ۲۰۰ و ضخامت ۱۲ میلیمتر مسلح شده است. در صورتی که تنش مجاز در چوب برابر $8N/mm^2$ و در فولاد $110N/mm^2$ باشد، گشتاور خمشی مجاز را تعیین نمایید. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد به بتن را برابر ۲۰ در نظر بگیرید.

حل) گشتاور دوم سطح چوب و فولاد به ترتیب برابر است با:

$$I_t = \frac{200\times 300^3}{12} = 450\times 10^6 mm^2$$

$$I_s = 2\times 12\times 200\times 156^2 = 117\times 10^6 mm^4$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۷ داریم:

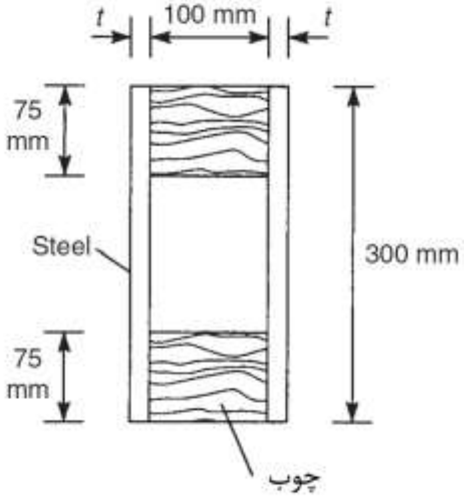
$$8 = \frac{150M\times 10^6}{\left(450+20\times 117\right)\times 10^6} \qquad \Rightarrow \quad M = 148.8kN.m$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۸ داریم:

$$110 = \frac{162M\times 10^6}{\left(117+\dfrac{450}{20}\right)\times 10^6} \qquad \Rightarrow \quad M = 94.7kN.m$$

بنابراین گشتاور خمشی مجاز برابر $M = 94.7kN.m$ خواهد بود.

۲) یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده با دهانه تحت یک بار گسترده یکنواخت به شدت $46.5kN/m$ قرار دارد. مقطع تیر مانند شکل۱۲-۱۷ به صورت جعبه‌ای است. در صورتی که تنش مجاز فولاد و چوب به ترتیب برابر $124N/mm^2$ و $8N/mm^2$ باشد، مقدار ضخامت فولاد را تعیین نمایید.



شکل ۱۲-۱۷

حل) حداکثر گشتاور خمشی برابر است با:

$$M_{\max} = \frac{46.5 \times 3.5^2}{8} = 71.2 kN.m$$

همچنین برای تیر چوبی

$$I_t = 2\left(\frac{100 \times 75^3}{12} + 100 \times 75 \times 112.5^2\right) = 196.9 \times 10^6 mm^4$$

و برای فولاد داریم:

$$I_s = \frac{2t \times 300^3}{12} = 4.5 \times 10^6 mm^4$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۷ داریم:

$$8 = \frac{71.2 \times 10^6 \times 150}{(196.9 + 20 \times 4.5t) \times 10^6} \quad \Rightarrow \quad t = 12.6$$

با استفاده از رابطه ۱۲-۸ داریم

$$124 = \frac{71.2 \times 10^6 \times 150}{\left(4.5t + \frac{196.9}{20}\right) \times 10^6} \quad \Rightarrow \quad t = 17.0 mm$$

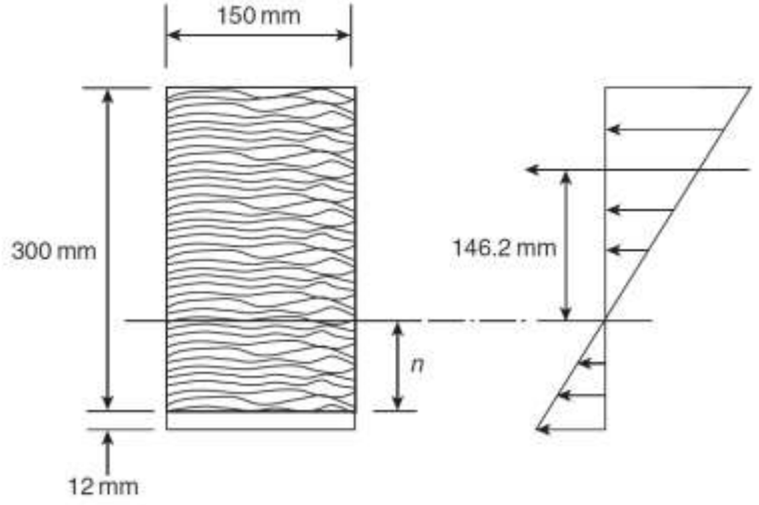
بنابراین مقدار ضخامت را برابر با ۱۷ میلیمتر در نظر می‌گیریم.

۳) یک تیر چوبی به عرض ۱۵۰ و عمق ۳۰۰ میلیمتر توسط یک صفحه فولادی به ضخامت ۱۲ و عرض ۱۵۰ میلیمتر در سطح پایینی خود مسلح شده است. میزان افزایش در لنگر خمشی مقاوم را تعیین نمایید. تنش مجاز چوب و فولاد به ترتیب $12N/mm^2$ و در فولاد $155N/mm^2$ باشد، همچنین نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد به بتن را برابر ۲۰ در نظر بگیرید.

حل)

حداکثر تنش خمشی در تیر چوبی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\sigma_t = \frac{M_t \times 150}{\left(\frac{150\times 300^3}{12}\right)} = 12\frac{N}{mm^2}$$



شکل ۱۲-۱۸

$$\Rightarrow \qquad M_t = 27kN.m$$

همچنین از آنجایی که $\sigma_s = 20\sigma_t$ است، بنابراین حد تنش فولاد برابر $\sigma_t = \frac{155}{20} = 7.75\frac{N}{mm^2}$ است. با توجه به شکل بالا

$$\frac{150(300-n)^2}{2} = \frac{150n^2}{2} + 20\times150\times12(n+6)$$

$n = 80.7mm$

با گشتاورگیری حول محوری که از محل برآیند نیروهای فشاری مقطع می‌گذرد داریم:

$$M\times10^6=155\times150\times12(146.2+80.7+6)+\left(\frac{7.75}{2}\right)\times150$$
$$\times80.7\left(\frac{2\times80.7}{3}+146.2\right)$$

$$\Rightarrow \qquad M=74.4kN.m$$

بنابراین $M_s/M_t=74.4/27=2.76$ و مقدار افزایش تولید شده توسط فولاد برابر ۱۷۶٪ است.

٤) یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی با دهانه ٤/٥ متر برای تحمل بار یکنواخت به شدت *16.8kN/m* مورد نیاز است. مقدار عمق D دو برابر عرض و همچنین فاصله مرکز فولادها تا سطح پایینی تیر برابر *0.1D* می‌باشد. با استفاده از تئوری الاستیک ابعاد تیر و مساحت فولاد مورد نیاز را تعیین کنید. مقدار تنش مجاز بتن و فولاد به ترتیب $8N/mm^2$ و $140N/mm^2$ است. همچنین مقدار $m=15$ است.

حل) با استفاده از رابطه ۱۲-۱۳ برای یک مقطع بحرانی داریم:

$$140=8\times15\left[\frac{0.9d_1}{n}-1\right] \qquad \Rightarrow \quad n=0.415d_1$$

همچنین با گشتاورگیری حول مرکز فولادهای مسلح کننده (شکل۱۲-٦) داریم:

$$M=\left(\frac{8}{2}\right)\times0.5d_1\times0.415d_1\left(0.9d_1-\frac{0.415d_1}{3}\right) \quad \Rightarrow \qquad M=0.632d_1^3$$

$$0.632d_1^3=\frac{16.8\times4.5^2\times10^6}{8} \quad \Rightarrow \qquad d_1=406.7mm$$

با برابر قرار دادن نیروی کششی در فولاد و نیروی فشاری در بتن داریم:

$$140A_s=\left(\frac{8}{2}\right)\times(0.5\times406.7)\times0.415\times406.7 \quad \Rightarrow \qquad A_s=980.6mm^2$$

٥) یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی به عرض ۳۰۰ و عمق ۷۷۵ میلیمتر را در نظر بگیرید. در صورتی که پنج میلگرد با قطر ۲۵ میلیمتر در یک لایه با ۲۵ میلیمتر پوشش و سه میلگرد با قطر ۲۵ میلیمتر در ناحیه فشاری و در یک لایه با پوشش ۲۵ میلیمتر قرار داشته باشد، با استفاده از تئوری ارتجاعی و با فرض تنش مجاز فولاد و بتن برابر $125N/mm^2$ و

$7.5N/mm^2$ مقدار گشتاور مقاوم خمشی مقطع را تعیین نمایید. همچنین نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد به بتن را برابر ۱۶ در نظر بگیرید.

حل) مساحت فولاد فشاری برابر با $3\times\pi\times\frac{25^2}{4}=1472.6mm^2$ است. همچنین مقدار فولاد کششی $5\times\pi\times\frac{25^2}{4}=2454.4mm^2$ می‌باشد. حال با استفاده از رابطه ۱۲-۱۷ داریم:

$$\frac{300n^2}{2}+(16-1)\times1472.6(n-25)=16\times2454.4(750-n)$$

$$n=242.8mm$$

با استفاده از شرایط همسازی کرنش با استفاده از رابطه ۱۲-۱۳ داریم:

$$\sigma_s=\frac{16\sigma_c(750-242.8)}{242.8}\quad\Rightarrow\quad\sigma_s=33.4\sigma_c$$

بنابراین حد تنش فولاد $\sigma_c=125/33.4=3.7N/mm^2$ است. حال با گشتاوگیری حول مرکز فولاد فشاری داریم:

$$M\times10^6=125\times2454.4(750-25)-\left(\frac{3.7}{2}\right)\times300\times242.8\left(\frac{242.8}{3}-25\right)$$

$$\Rightarrow\qquad M=214.5kN.m$$

۶) یک تیر بتنی با مقطع T شکل با تکیه‌گاه‌های ساده و دهانه ۶ متر تحت بار گسترده یکنواخت به شدت *42kN/m* قرار دارد. در صورتی که ضخامت دال برابر ۱۲۵ و ضخامت جان برابر ۲۵۰ و عمق موثر برای فولادهای کششی برابر ۵۵۰ میلیمتر باشد، و همچنین تنش مجاز فولاد و بتن به ترتیب برابر $140N/mm^2$ و $8.5N/mm^2$ باشد، مقدار مساحت فولاد مورد نیاز را تعیین نمایید. نسبت مدول الاستیسیته برای فولاد به بتن را برابر ۱۵ در نظر بگیرید.

۷) مسئله ٤ را با استفاده از روش بارنهایی و با فرض $\sigma_{cu}=24N/mm^2$ و $\sigma_Y=280N/mm^2$ حل نمایید.

۸) مسئله ۵ را با استفاده از روش بارنهایی و با فرض $\sigma_{cu} = 22.5 N/mm^2$ و $\sigma_Y = 250\, N/mm^2$ حل نمایید.

۹) مسئله ٦ را با استفاده از روش بارنهایی و با فرض $\sigma_{cu} = 25.5 N/mm^2$ و $\sigma_Y = 280\, N/mm^2$ حل نمایید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل سیزدهم
خیز تیرها

مقدمه

در فصل‌های ۹، ۱۰ و۱۱ در مورد مقاومت تیرها به ترتیب در برابر بارهای خمشی، برشی و پیچشی صحبت شد. در فصل جاری توضیحاتی در مورد خیز تیرها ارائه خواهد شد که تکمیل کننده بحث‌های گذشته می‌باشد. اعضای سازه‌ای بخصوص تیرها که در معرض بارهایی عمود بر محور خود می‌باشند، باید دارای سختی کافی باشند تا در برابر بارهای اعمال شده خارجی دچار خیزهای بیش از اندازه نشوند. در آیین‌نامه‌های طراحی سازه خیز در اعضای مختلف ساختمان محدود شده است. به عنوان مثال در مبحث دهم از مقررات ملی ایران که مربوط به طراحی سازه‌های فولادی می‌باشد، مقدار خیز تیرها و شاهتیرها ناشی از بارهای مرده و زنده به *1/240* طول دهانه محدود شده است. برای تامین این شرایط لازم است در طراحی اعضا، مقدار خیز آنها نیز کنترل گردد.

روش‌های مختلفی برای تعیین مقدار خیز تیرها وجود دارد که بسته به شرایط مسئله می‌توان از هر یک از آنها استفاده نمود. به عنوان مثال با استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل می‌توان خیز تیر را در تمام نقاط آن بدست آورد در حالی با استفاده از روش گشتاور سطح[۱] تنها می‌توان خیز تیر را در یک مقطع مشخص از آن تعیین نمود. روش دوم در تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی[۲] بسیار مفید است.

در تیرهایی که دارای عمق کمی در مقایسه با طول آنها (مثلاً عمق آنها یک دهم طول آنها است) می‌باشند، خیز ایجاد شده عمدتاً ناشی از خمش در آنهاست. لیکن در تیرهای عمیق یا تیرهایی که دارای ارتفاع زیادی نسبت به طولشان هستند، اثر برش در ایجاد خیز آنها قابل توجه بوده و بایستی آن را مورد توجه قرار داد.

[1] Moment-area method
[2] Statically indeterminate

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

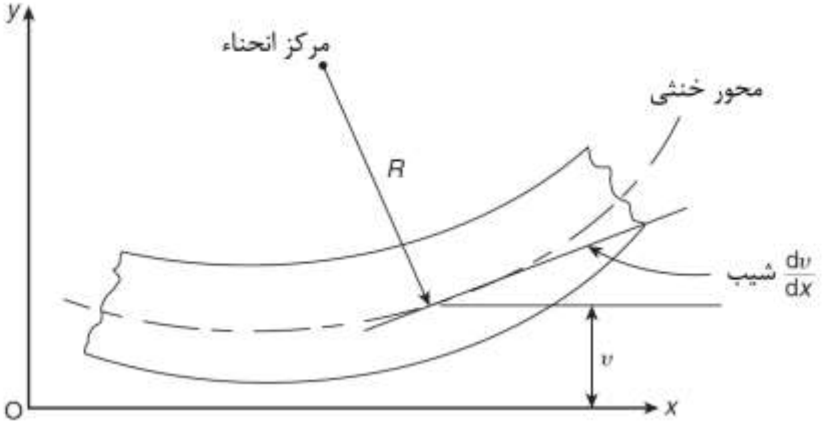
۱۳-۱ معادله دیفرانسیل خمش متقارن

در فصل نهم مطالبی در ارتباط با نحوه تعیین انحناء $1/R$، تیری تحت گشتاور خمشی M و سختی خمشی EI بیان شد.

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$ (۹-۱۱)تکراری

برای یک تیر که کل طول آن از یک جنس و سطح مقطع آن ثابت باشد، (مقدار EI ثابت باشد) مقدار انحناء مستقیماً متناسب با گشتاور خمشی اعمال شده است. گشتاور خمشی ایجاد شده توسط برش در طول تیر تغییر کرده و مقدار انحناء نیز در طول تیر دارای تغییرات است. رابطه ۹-۱۱ مقدار انحناء را در یک مقطع مشخص از تیر نتیجه می‌دهد.

یک تیری را در نظر بگیرید که نسبت به صفحه قائم متقارن می‌باشد و خمش ایجاد شده در آن حول محور خنثی آن می‌باشد. مقدار خیز ایجاد شده در آن نسبت به یک محور دلخواه مانند محورهای Oxy، برابر υ و مقدار شیب محور خنثی در آن نقطه برابر $d\upsilon/dx$ می‌باشد.



شکل۱۳-۱ خیز و انحنا برای یک تیر تحت خمش

گشتاور مثبت اعمال شده به تیر باعث ایجاد فشردگی در سطح بالایی شده و به عبارتی سطح بالایی تیر مقعر شده است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\frac{1}{R}=\frac{\frac{d^2\upsilon}{dx^2}}{\left(1+\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2\right)^{3/2}} \qquad (۱-۱۳)$$

در حالتی که خیز کم باشد می‌توان از جمله $(d\upsilon/dx)^2$ صرف نظر نمود. بنابراین رابطه ۱۳-۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه نمود:

$$\frac{1}{R}=\frac{d^2\upsilon}{dx^2} \qquad (۲-۱۳)$$

با توجه به رابطه۹-۱۱ داریم:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M}{EI} \qquad (۳-۱۳)$$

با دوبار انتگرال‌گیری از رابطه ۱۳-۳، خیز تیر بدست می‌آید. در بسیاری از مسائل مقدار گشتاور خمشی M در رابطه ۱۳-۳ تابعی از x است. بنابراین بایستی توسط یکی از روش‌های متداول اقدام به انتگرال‌گیری از آن نمود. در حالتی که بار اعمال شده تابعی از x است و در طول تیر تغییر می‌کند با استفاده از رابطه ۳-۸ داریم:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=-\frac{S}{EI} \qquad (۴-۱۳)$$

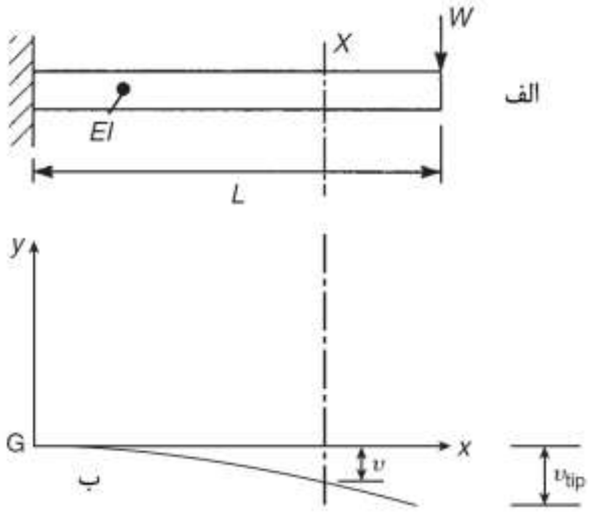
$$\frac{d^4\upsilon}{dx^4}=-\frac{w}{EI} \qquad (۵-۱۳)$$

در زیر با استفاده از چند مثال کاربرد روابط ۱۳-۳ تا ۱۳-۵ نشان داده می‌شود.

مثال۱۳-۱) در تیر شکل۱۳-۲الف معادله خیز را تعیین و همچنین مقدار خیز ایجاد شده در انتهای تیر را بدست آورید. مقدار سختی خمشی تیر برابر EI است.

حل) بار W در انتهای تیر باعث ایجاد خیز تیر حول محور طولی آن مانند شکل ۱۳-۲ب خواهد شد. مقدار خیز در هر مقطعی از تیر برابر υ و در انتهای آزاد آن برابر υ_{tip} می‌باشد. مبداء سیستم مختصات در ابتدای تیر فرض می‌شود و در نتیجه با توجه به تکیه‌گاه تیر، مقدار خیز در این مقطع برابر صفر است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۳-۲ خیز یک تیر طره‌ای تحت بار متمرکز در انتهای آزاد مثال۱۳-۱

مقدار گشتاور خمشی M در مقطعی به فاصله X از مبداء با توجه به شکل۱۳-۲الف به صورت زیر خواهد بود:

$$M = -W(L-x) \qquad \text{الف}$$

با جایگزینی مقدار M در رابطه ۱۳-۳ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -\frac{W}{EI}(L-x)$$

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -W(L-x) \qquad \text{ب}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ب) نسبت به x داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = -W\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) + C_1$$

که در آن C_1 ثابت انتگرال‌گیری است که با توجه شرایط مرزی مسئله می‌توان آن را تعیین نمود. با توجه به اینکه در ابتدای تیر یعنی در $X=0$ مقدار $\frac{d\upsilon}{dx} = 0$ است، در نتیجه $C_1 = 0$ خواهد بود. همچنین

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = -W\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{ج}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ج) داریم:

$$EI\upsilon = -W\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) + C_2$$

دیده می‌شود که دوباره ثابت انتگرالی در جواب ظاهر شد که می‌توان به شیوه قبلی آن را بدست آوریم. با توجه به شرایط مرزی در $X=0$ یعنی $\upsilon = 0$ مقدار $C_2 = 0$ خواهد بود. بنابراین رابطه خیز تیر به صورت زیر خواهد بود.

$$\upsilon = -\frac{W}{EI}\left(3Lx^2 - x^3\right) \qquad \text{د}$$

با قرار دادن $x=L$ در رابطه (د) مقدار خیز در انتهای آزاد تیر حاصل می‌شود:

$$\upsilon_{tip} = -\frac{WL^3}{3EI} \qquad \text{هـ}$$

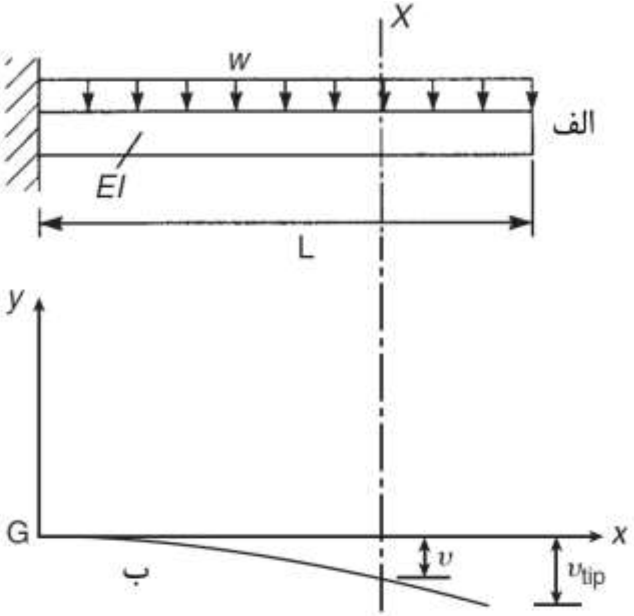
علامت منفی ظاهر شده در رابطه فوق نشان دهنده خیز به سمت پایین تیر می‌باشد.

مثال۱۳-۲) در تیر شکل۱۳-۳الف معادله خیز را تعیین و همچنین مقدار خیز ایجاد شده در انتهای تیر را بدست آورید. مقدار سختی خمشی تیر برابر EI است.

حل) بار گسترده w در طول تیر باعث ایجاد خیز تیر حول محور طولی آن مانند شکل ۱۳-۳ب خواهد شد. مقدار خیز در هر مقطعی از تیر برابر υ و در انتهای آزاد آن برابر υ_{ti_1} می‌باشد. مبداء سیستم مختصات در ابتدای تیر تعیین می‌شود و در نتیجه با توجه به تکیه‌گاه تیر، مقدار خیز و شیب در این مقطع برابر صفر است.

مقدار گشتاور خمشی M در مقطعی به فاصله X از مبداء با توجه به شکل۱۳-۳الف به صورت زیر خواهد بود:

$$M = -\frac{w}{2}\left(L - x\right)^2 \qquad \text{الف}$$



شکل۱۳-۳ خیز یک تیر طره‌ای تحت بار گسترده در انتهای آزاد مثال۱۳-۲

با جایگزینی مقدار M در رابطه ۱۳-۳ خواهیم داشت:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=-\frac{w}{2}(L-x)^2=-\frac{w}{2}\left(L^2-2Lx+x^2\right) \qquad \text{ب}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ب) نسبت به x داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=-\frac{w}{2}\left(L^2x-Lx^2+\frac{x^3}{3}\right)^2+C_1$$

وقتی که $x=0$ باشد، $\frac{d\upsilon}{dx}=0$ است، در نتیجه $C_1=0$ خواهد بود. همچنین

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=-\frac{w}{2}\left(L^2x-Lx^2+\frac{x^3}{3}\right) \qquad \text{ج}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ج) داریم:

$$EI\upsilon=-\frac{w}{2}\left(L^2\frac{x^2}{2}-\frac{Lx^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)+C_2$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

دیده می‌شود که دوباره ثابت انتگرالی در جواب ظاهر شد که می‌توان به شیوه قبلی آن را بدست آوریم. با توجه به شرایط مرزی در $X=0$ یعنی $\upsilon=0$ مقدار $C_2=0$ خواهد بود. بنابراین رابطه خیز تیر به صورت زیر خواهد بود.

$$\upsilon=-\frac{w}{24EI}\left(6L^6x^2-4Lx^3+x^4\right) \quad \text{د}$$

با قرار دادن $x=L$ در رابطه د، مقدار خیز در انتهای آزاد تیر حاصل می‌شود:

$$\upsilon_{tip}=-\frac{wL^4}{8EI} \quad \text{هـ}$$

علامت منفی ظاهر شده در رابطه فوق نشان دهنده خیز به سمت پایین تیر می‌باشد. برای حل نیز می‌توانستیم از رابطه۱۳–۵ استفاده نماییم؛

$$\frac{d^4\upsilon}{dx^4}=-\frac{w}{EI} \quad \text{و}$$

در صورتی که w ثابت باشد، با انتگرال‌گیری از رابطه (و) خواهیم داشت:

$$EI\frac{d^3\upsilon}{dx^3}=-wx+C_1$$

همچنین با توجه به رابطه۱۳–٤ داریم:

$$\frac{d^3\upsilon}{dx^3}=-\frac{S}{EI}$$

وقتی $x=0$ باشد، $S=-wL$ بنابراین:

$$C_1=wL$$

بنابراین مقدار C_1 را می‌توانیم با استفاده از شرایط مرزی تعیین نماییم.

$$EI\frac{d^3\upsilon}{dx^3}=-w(x-L) \quad \text{ز}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=-w\left(\frac{x^2}{2}-Lx\right)+C_2$$

با استفاده از رابطه ۱۳–۳ داریم:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M}{EI}$$

و وقتی که $x=0$ باشد، $M=-wL^2/2$ بنابراین

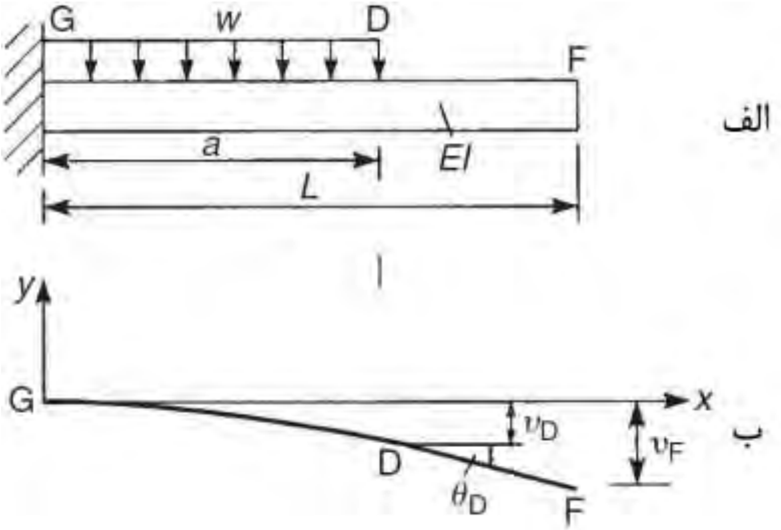
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$C_2 = -\frac{wL^2}{2}$$

$$\Rightarrow EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -\frac{w}{2}\left(x^2 - 2Lx + L^2\right)$$

که همان رابطه (ب) می‌باشد. با استفاده از روش ارائه شده در قبل می‌توانیم به معادله خیز برسیم.

مثال۱۳-۳)تیر نشان داده شده در شکل۱۳-٤الف تحت یک بار گسترده یکنواخت است که در قسمتی از طول آن تاثیر می‌کند. معادله خیز تیر را تعیین و همچنین مقدار خیز ایجاد شده در انتهای تیر را بدست آورید. مقدار سختی خمشی تیر برابر EI است.



شکل۱۳-٤ تیر طره‌ای مثال۱۳-۳

حل) بار گسترده w در قسمتی از طول تیر باعث ایجاد خیز تیر حول محور طولی آن مانند شکل ۱۳-٤ب خواهد شد. مقدار خیز در هر مقطعی از تیر برابر υ و در انتهای آزاد آن برابر υ_{tip} می‌باشد. سیستم مختصات در ابتدای تیر تعیین می‌شود و در نتیجه با توجه به تکیه‌گاه تیر، مقدار خیز و شیب در این مقطع برابر صفر است. در اینجا فرض می‌کنیم که تیر مورد بحث فاقد وزن بوده و بنابراین مقدار خیز مابین D و F برابر صفر است. بنابراین

طول DF تیر مستقیم باقی می‌ماند. خیز تیر در D را می‌توان از رابطه (هـ) مثال ۱۳-۲ بدست آورد.

$$\upsilon_D = -\frac{wa^4}{8EI}$$

همچنین مقدار شیب تیر در D با جایگذاری $x=a$ و $L=a$ در رابطه (ج) مثال۱۳-۲ بدست می‌آید.

$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_D = \theta_D = -\frac{wa^3}{6EI}$$

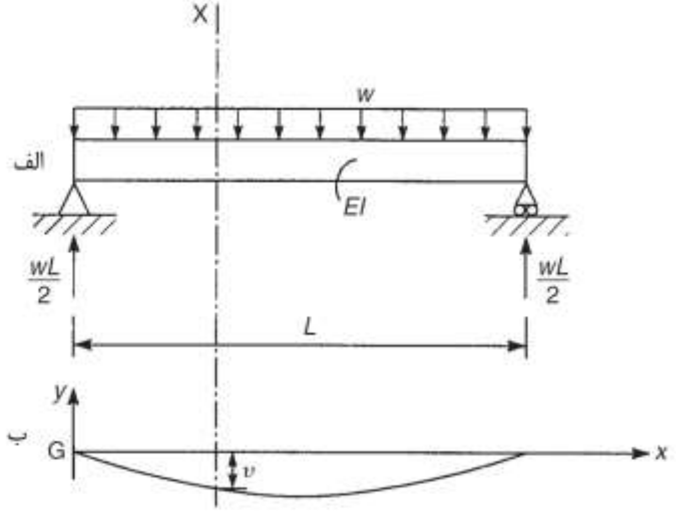
خیز υ_F در انتهای تیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\upsilon_F = -\frac{wa^4}{8EI} - (L-1)\frac{wa^3}{6EI}$$

با ساده سازی داریم:

$$\upsilon_F = -\frac{wa^4}{24EI}(4L-a)$$

مثال۱۳-٤) در شکل۱۳-٥الف یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده نشان داده شده است که تحت یک بار گسترده خطی قرار دارد. مقدار خیز را در وسط دهانه تیر بدست آورید.



شکل۱۳-٥ خیز در تیر دو سر ساده مثال۱۳-٤

حل) با توجه به تقارن تیر، مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی هر یک از تکیه‌گاه‌ها برابر $wL/2$ و مقدار گشتاور خمشی در مقطعی به فاصله X از تکیه‌گاه سمت چپ تیر برابر است با:

الف
$$M=\frac{wl}{2}x-\frac{wx^2}{2}$$

با جایگزینی مقدار M در رابطه ۱۳-۳ داریم:

ب
$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{w}{2}\left(Lx-x^2\right)$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$\Rightarrow EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{w}{2}\left(\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+C_1$$

با توجه به تقارن به وضوح روشن است که مقدار شیب $d\upsilon/dx=0$ در وسط تیر برابر صفر است. بنابراین

$$0=\frac{w}{2}\left(\frac{L}{8}-\frac{L^3}{24}\right)+C_1$$

$$\Rightarrow C_1=-\frac{wL^3}{24}$$

به عبارت دیگر

پ
$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{w}{24}\left(6Lx^2-4x^3-L^3\right)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه فوق داریم:

$$EI\upsilon=\frac{w}{24}\left(2Lx^2-x^4-L^3x\right)+C_2$$

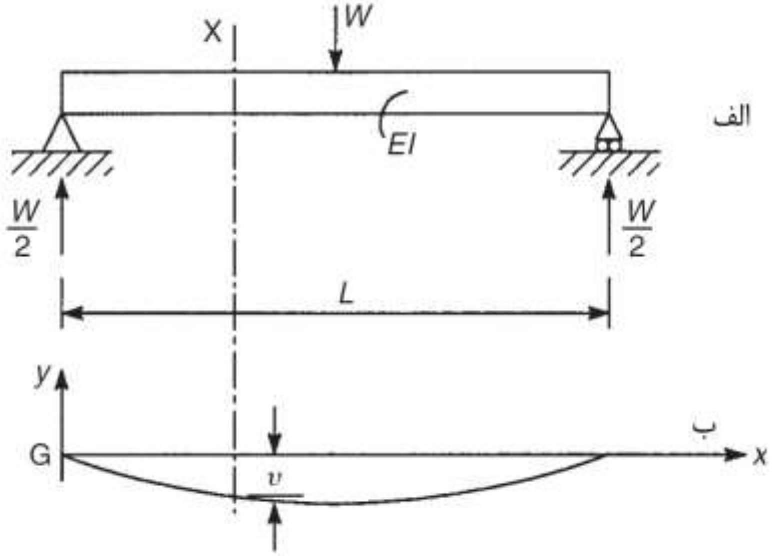
از آنجایی که در $x=0$ مقدار $\upsilon=0$ است، مقدار $C_2=0$ بدست خواهد آمد. بنابراین معادله خیز تیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\upsilon=\frac{w}{24EI}\left(2Lx^2-x^4-L^3x\right)$$

مقدار حداکثر خیز در وسط تیر ایجاد می‌شود و مقدار آن برابر است با:

ت
$$\upsilon_{\text{mid-span}}=-\frac{5wL^4}{386EI}$$

مثال۱۳–۵) در شکل۱۳–٦ الف یک تیر دو سر ساده که تحت یک بار متمرکز W در وسط خود قرار دارد. مقدار حداکثر خیز تیر در وسط آن را بدست آورید.



شکل۱۳–٦ تیر دو سر ساده تحت بار متمرکز در وسط مثال۱۳–۵

حل) با توجه به تقارن تیر، مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی هر یک از تکیه‌گاه‌ها برابر $W/2$ و مقدار گشتاور خمشی در مقطعی به فاصله X از تکیه‌گاه سمت چپ تیر برابر است با:

$$M = \frac{W}{2}x \qquad \text{الف}$$

با جایگزینی مقدار M در رابطه۱۳–۳ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{W}{2}x \qquad \text{ب}$$

با انتگرال‌گیری داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{W}{2}\frac{x^2}{2} + C_1$$

با توجه به تقارن تیر مقدار شیب در وسط تیر برابر صفر است. بنابراین $C_1 = -WL^2/16$

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{W}{16}\left(4x^2 - L^2\right) \qquad \text{پ}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (پ) داریم:

$$EI\upsilon = \frac{W}{16}\left(\frac{4}{3}x^2 - L^2x\right) + C_2$$

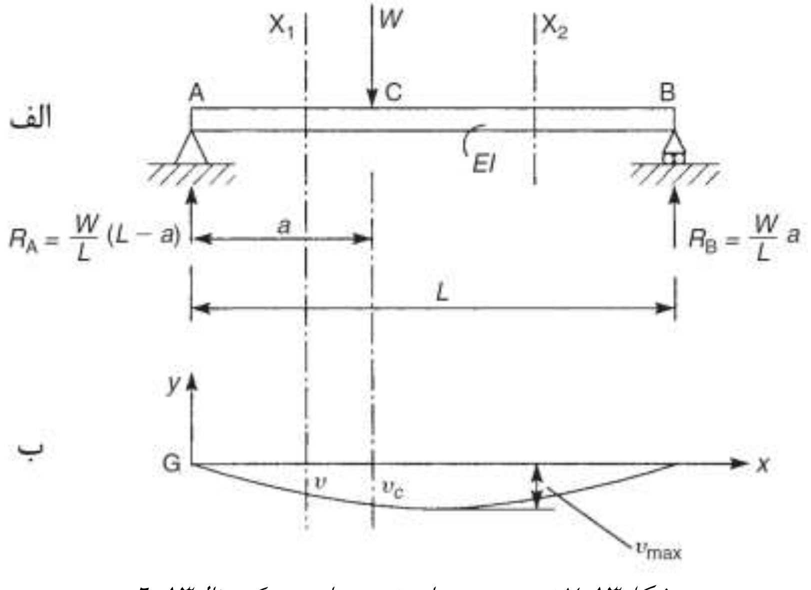
وقتی که $x=0$ باشد، $\upsilon=0$ و بنابراین $C_2=0$ خواهد بود. رابطه خیز تیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\upsilon=\frac{W}{48EI}\left(4x^2-3L^2x\right)$$ ت

مقدار حداکثر خیز تیر در وسط تیر برابر است با:

$$\upsilon_{\text{mid-span}}=-\frac{WL^3}{48EI}$$

مثال۱۳-٦) تیر دو سر ساده نشان داده شده در شکل ۱۳-۷الف تحت یک نیروی متمرکز به مقدارW و به فاصله a از تکیه‌گاه A قرار دارد. معادله خیز تیر، مقدار خیز در زیر بار و همچنین مقدار حداکثر خیز ایجاد شده در تیر را بدست آورید.



شکل۱۳-۷ تیر دو سر ساده تحت بار متمرکز مثال۱۳-٦

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای تیر مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر بدست می‌آید.

$$R_A=\frac{W}{L}\left(L-a\right) \qquad R_B=\frac{Wa}{L}$$

با رسم مقطع X_1 که از تکیه‌گاه سمت چپ به مقدار x فاصله دارد (در حالی که $x\le a$)، و نوشتن معادله تعادل برای قسمت بریده شده سمت چپ داریم:

الف		$M = R_A x$

همچنین با رسم مقطع X_2 (در حالی که $x \geq a$)، داریم:

ب		$M = R_A x - W(x-a)$

با جایگذاری M در رابطه۱۳-۳ داریم:

پ		$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = R_A x \qquad (x \leq a)$$

ت		$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = R_A x - W(x-a) \qquad (x \geq a)$$

با انتگرال‌گیری از روابط (پ) و (ت) خواهیم داشت:

ث		$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} + C_1 \qquad (x \leq a)$$

ج		$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} - W\left(\frac{x^2}{2} - ax\right) + C_1' \qquad (x \geq a)$$

ح		$$EI\upsilon = R_A\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \qquad (x \leq a)$$

خ		$$EI\upsilon = R_A\frac{x^3}{6} - W\left(\frac{x^3}{6} - \frac{ax^2}{2}\right) + C_1' x + C_2' \qquad (x \geq a)$$

که در روابط فوق C_1، C_1'، C_2 و C_2' ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند که با اعمال شرایط مرزی مسئله مقدار آنها تعیین خواهد شد. توجه داشته باشید که روابط (ث) و (ح) تنها در محدوده $0 \leq x \leq a$ و روابط (ج) و (خ) تنها در محدوده $a \leq x \leq L$ معتبر خواهند بود. در $x=0$ یعنی در تکیه‌گاه سمت چپ، $\upsilon = 0$ خواهد بود و بنابراین در رابطه (ح) مقدار $C_2 = 0$ خواهد بود. همچنین در $x=L$ مقدار $\upsilon = 0$ است. بنابراین در رابطه (خ) داریم:

$$0 = R_A\frac{L^3}{6} - W\left(\frac{L^3}{6} - \frac{aL^2}{2}\right) + C_1' L + C_2'$$

بعد از جایگذاری $R_A = \frac{W}{L}(L-a)$ و ساده سازی داریم:

د		$$0 = \frac{WaL^2}{3} + C_1' L + C_2'$$

با توجه به پیوستگی نقطه‌ای که بر روی آن نیرو اعمال می‌شود، با اعمال روابط (ث) تا (خ) و در ابتدا با استفاده از روابط (ث) و (ج) داریم:

$$R_A \frac{a^2}{2} + C_1 = R_A \frac{a^2}{2} - W\left(\frac{a^2}{2} - a^2\right) + C_1'$$

بنابراین:

ذ
$$C_1 = \frac{Wa^2}{2} C'$$

حال با برابر قرار دادن خیز در $x=a$ از روابط (ح) و (خ) داریم:

$$R_A \frac{a^3}{6} + C_1 a = R_A \frac{a^3}{6} - W\left(\frac{a^3}{6} - \frac{a^3}{2}\right) + C_1' a + C_2'$$

ر
$$C_1 a = \frac{Wa^3}{3} + C_1' a + C_2'$$

با حل همزمان رابط (د)، (ذ) و (ر) داریم:

$$C_1 = -\frac{Wa}{6L}(a-2L)(a-L)$$

$$C_1' = -\frac{Wa}{6L}\left(a^2 + 2L^2\right)$$

$$C_2' = \frac{Wa^3}{6}$$

با استفاده از روابط (ث) و (ح) داریم:

ز
$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{W(a-L)}{6L}\left[3x^2 + a(a-2L)\right] \qquad (x \le a)$$

س
$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = -\frac{Wa}{6L}\left(3x^2 - 6Lx + a^2 + 2L^2\right) \qquad (x \ge a)$$

ش
$$EI\upsilon = -\frac{W(a-L)}{6L}\left(x^2 + a(a-2L)x\right) \qquad (x \le a)$$

ص
$$EI\upsilon = -\frac{Wa}{6L}\left(x^3 - 3Lx^2 + \left(a^2 + 2L^2\right)x - a^2 L\right) \qquad (x \ge a)$$

با قرار دادن $x=a$ در هر دو رابطه (ش) و (ص) داریم:

ض
$$\upsilon_C = -\frac{Wa^2(a-L)^2}{6EIL}$$

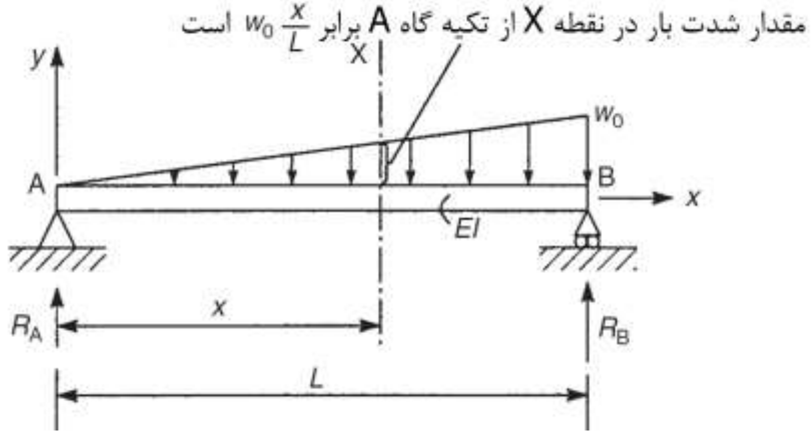
بهرحال مقدار بدست آمده، مقدار حداکثر خیز نخواهد بود. با قرار دادن $d\upsilon/dx = 0$ در رابطه (س) داریم:

ط
$$0 = 3x^2 - 6Lx + a^2 + 2L^2$$

با قرار دادن جواب (ط) در رابطه (ث) مقدار حداکثر خیز تیر بدست خواهد آمد. در صورتی که بار متمرکز در وسط تیر اعمال شود، مقدار خیز تیر برابر خواهد بود با:

$$\upsilon_C = -\frac{WL^3}{48EI}$$

مثال۱۳-۷) در شکل۱۳-۸ مقدار منحنی خیز تیر را تعیین نمایید. تیر AB به صورت دو سر ساده می‌باشد که تحت یک بار گسترده با توزیع مثلثی می‌باشد.



شکل۱۳-۸ تیر دو سر ساده تحت بار گسترده با توزیع مثلثی مثال۱۳-۷

حل) با نوشتن معادلات تعادل برای تیر مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر بدست می‌آید. با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:

$$R_A L = \frac{1}{2} w_0 L \frac{L}{3} \qquad \Rightarrow \quad R_A = \frac{w_0 L}{6}$$

با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$\Rightarrow \quad R_B = \frac{w_0 L}{3}$$

مقدار گشتاور خمشی M در هر مقطع به فاصله x از تکیه‌گاه A به صورت زیر است:

$$M = R_A x - \frac{1}{2}\left(w_0 \frac{x}{L} \right) x \frac{x}{3}$$

یا:

$$M = \frac{w_0}{6L}\left(L^2 x - x^3 \right) \qquad \text{الف}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

با جایگزینی مقدار بدست آمده برای M در رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{w_0}{6L}\left(L^2x-x^3\right) \qquad \text{ب}$$

که با انتگرال‌گیری داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{w_0}{6L}\left(L^2\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right)+C_1 \qquad \text{پ}$$

و با انتگرال‌گیری از رابطه (پ):

$$EI\upsilon=\frac{w_0}{6L}\left(L^2\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{20}\right)+C_1x+C_2 \qquad \text{ت}$$

مقدار خیز در $x=0$ و در $x=L$ برابر صفر است. با جایگذاری اولین شرط $C_2=0$ بدست می‌آید. همچنین با جانشانی دومین شرط مقدار ثابت دوم بدست می‌آید.

$$C_1=\frac{7w_0L^4}{360}$$

بنابراین منحنی خیز به صورت زیر خواهد بود.

$$\upsilon=-\frac{w_0}{360EIL}\left(3x^5-10L^2x^3+7L^4x\right) \qquad \text{ث}$$

۱۳-۲ تابع تکین

با یک مقایسه اجمالی بین مثال‌های ۱۳-۵ و ۱۳-٦ می‌توان دریافت که استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل برای حالت‌هایی که سیستم دارای تقارن نباشد بسیار طولانی خواهد بود. روش دیگر که معرفی خواهد شد روش تکینی[1] می‌باشد. این روش توسط ماکاولی در سال ۱۹۱۹ مورد استفاده قرار گرفت و تحت عنوان روش ماکاولی[2] شناخته می‌شود.

در اینجا ما کمیت $[x-a]$ را معرفی می‌نماییم که در صورتی که $(x-a)<0$ یا $x<a$ باشد، مقدار آن برابر صفر می‌باشد. در مثال۱۳-٦ گشتاور خمشی در یک مقطع به فاصله x از مبدأ به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$M=R_Ax-W\left[x-a\right]$$

---

[1] Singularity

[2] Macauley's method

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

این رابطه برای هر دو ناحیه AC و CB برقرار است ولی $W[x-a]$ برای $x<a$ ناپدید می‌شود. روابط(پ) و (ت) در مثال۱۳-۶ به یک رابطه تبدیل می‌شوند:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = R_A x - W[x-a]$$

که با انتگرال‌گیری از آن داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} - \frac{W}{2}[x-a]^2 + C_1$$

و همچنین با یک بار دیگر انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$EI\upsilon = R_A\frac{x^3}{6} - \frac{W}{2}[x-a]^3 + C_1x + C_2$$

براکت موجود در رابطه بایستی ثابت نگه داشته شود. ثابت‌های انتگرال‌گیری C_1 و C_2 با استفاده از شرایط مرزی تعیین می‌شوند. در $x=0$ و $x=L$ ، مقدار $\upsilon=0$ خواهد بود. با توجه به شرط اول و اینکه $[x-a]^3$ برای $x<a$ برابر صفر خواهد بود، مقدار $C_2=0$ بدست می‌آید. همچنین با استفاده از شرایط مرزی دوم خواهیم داشت:

$$0 = R_A\frac{L^3}{6} - \frac{W}{2}[L-a]^3 + C_1L$$

که در آن $R_A = W(L-a)/L$ خواهد بود. با جایگزینی مقدار R_A خواهیم داشت:

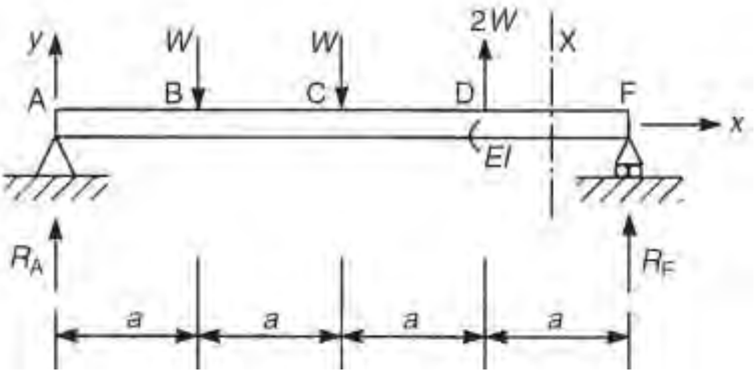
$$C_1 = -\frac{Wa(L-a)}{6L}(2L-a)$$

$$EI\upsilon = -\frac{W}{6L}\left\{-(L-a)x^3 + L[x-a]^3 + a(L-a)(2L-a)x\right\}$$

خیز تیر به صورت زیر بار برابر خواهد بود با:

$$\upsilon_C = -\frac{Wa^2(L-a)^2}{3EIL}$$

مثال۱۳-۸) مقدار و موقعیت حداکثر خیز در تیر شکل زیر را تعیین کنید.



شکل۱۳-۹ روش ماکاولی برای تعیین خیز در یک تیر دو سر ساده (تیر مثال۱۳-۸)

حل) با نوشتن معالات تعادل برای تیر مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به صورت زیر بدست می‌آید.

$R_A = \dfrac{3}{4}W$ به سمت بالا $\qquad$ $R_A = \dfrac{3}{4}W$ به سمت پایین

با استفاده از روش تابع تکین و گرفتن مبداء محورها در تکیه‌گاه سمت چپ رابطه گشتاور خمشی بین نقاط D و F به صورت زیر خواهد بود:

الف $\qquad M = R_A x - W[x-a] - W[x-2a] + 2W[x-3a]$

با جایگزینی مقدار M در رابطه ۱۳-۳ خواهیم داشت:

ب $\qquad EI\dfrac{d^2\upsilon}{dx^2} = \dfrac{3}{4}Wx - W[x-a] - W[x-2a] + 2W[x-3a]$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ب) و با نگه داشتن براکت در رابطه خواهیم داشت:

پ $\qquad EI\dfrac{d\upsilon}{dx} = \dfrac{3}{8}Wx^2 - \dfrac{W}{2}[x-a]^2 - \dfrac{W}{2}[x-2a]^2 + W[x-3a]^2 + C_1$

و

ت $\qquad EI\upsilon = \dfrac{1}{8}Wx^3 - \dfrac{W}{6}[x-a]^3 - \dfrac{W}{6}[x-2a]^3 + \dfrac{W}{3}[x-3a]^3 + C_1x + C_2$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. وقتی $x=0$ (در A) مقدار $\upsilon=0$ خواهد بود که مقدار $C_2=0$ خواهد بود. توجه کنید که جملات دوم، سوم و چهارم سمت راست رابطه (ت) برای $x<0$ ناپدید می‌شوند. همچنین در $x=4a$ مقدار $\upsilon=0$ خواهد بود. با توجه به رابطه (ت) داریم.

$$0=\frac{W}{8}64a^3-\frac{W}{6}27a^3-\frac{W}{6}8a^3+\frac{W}{3}a^3+4aC_1$$

که داریم:

$$C_1=-\frac{5}{8}Wa^2$$

با استفاده از روابط (پ) و (ت) داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{3}{8}Wx^2-\frac{W}{2}[x-a]^2-\frac{W}{2}[x-2a]^2+W[x-3a]^2-\frac{5}{8}Wa^2 \qquad \text{ت}$$

و

$$EI\upsilon=\frac{1}{8}Wx^3-\frac{W}{6}[x-a]^3-\frac{W}{6}[x-2a]^3+\frac{W}{3}[x-3a]^3-\frac{5}{8}Wa^2x \qquad \text{ث}$$

برای بدست آوردن مقادیر حداکثر خیز تیر به سمت بالا و پایین بایستی مکانی را بر روی تیر پیدا نماییم که در آن $d\upsilon/dx=0$ باشد. با نگاه به شکل۱۳-۹ احتمالاً حداکثر خیز تیر مابین BC ایجاد می‌شود. در B با استفاده از رابطه (ت) داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{3}{8}Wa^2-\frac{5}{8}a^2$$

که مقداری منفی است. همچنین در C:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx}=\frac{3}{8}W4a^2-\frac{W}{2}a^2-\frac{5}{8}Wa^2$$

که مقداری مثبت است. بنابراین حداکثر خیز تیر مابین BC ایجاد می‌شود. بنابراین با استفاده از رابطه (ت) داریم:

$$0=\frac{3}{8}Wx^2-\frac{W}{2}[x-a]^2-\frac{5}{8}Wa^2$$

و با ساده سازی داریم:

$$0=x^2-8ax+9a^2 \qquad \text{ج}$$

با حل رابطه (ج) داریم:

$$x=1.35a$$

بنابراین حداکثر خیز تیر با استفاده از رابطه (ث) برابر خواهد شد:

$$EI\upsilon=\frac{1}{8}W(1.35a)^3-\frac{W}{6}(0.35a)^3-\frac{5}{8}Wa^2(1.35a)$$

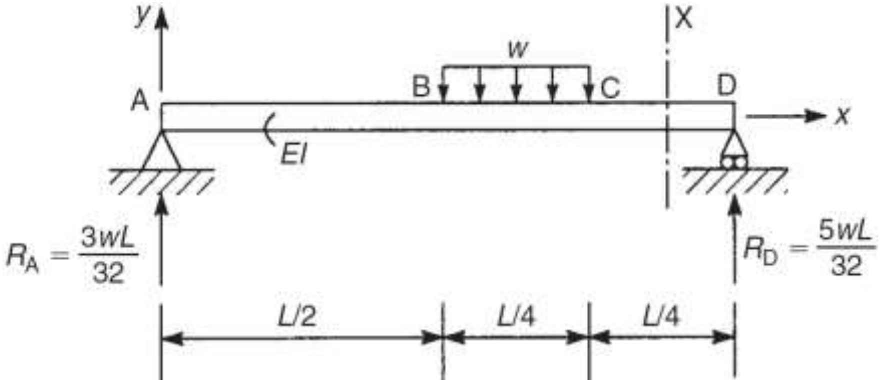
$$\Rightarrow \upsilon_{max}=-\frac{0.54Wa^3}{EI}\ ||$$ به سمت پایین

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

با استفاده از روشی مشابه می‌توان حداکثر خیز تیر به سمت بالا تیر را بین D و F در $x=3.42a$ بدست آورد.

$$\Rightarrow \upsilon_{max} = \frac{0.04Wa^3}{EI} \; || \quad \text{به سمت بالا}$$

مثال۱۳-۹) مقدار حداکثر خیز در تیر شکل۱۳-۱۰ را تعیین کنید.



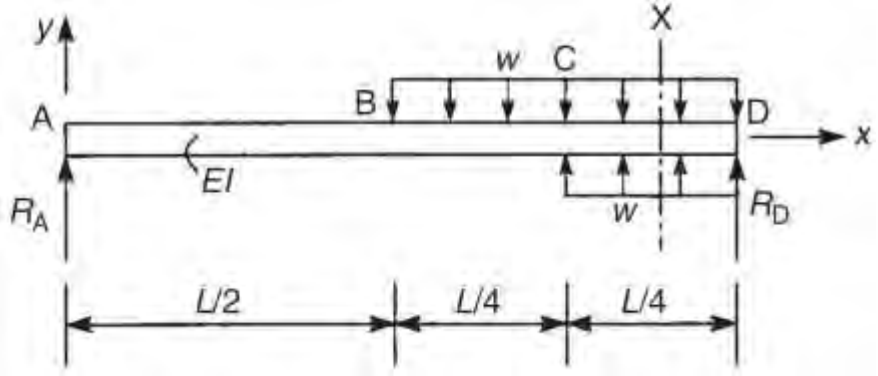
شکل۱۳-۱۰ تیر تحت یک بار گسترده خطی در قسمتی از آن (تیر مثال۱۳-۹)

با نوشتن معادلات تعادل برای تیر مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بدست می‌آید. مقدار گشتاور خمشی M در مقطع X از مبداء به صورت زیر خواهد بود.

$$M = R_A x - w\frac{L}{4}\left[x - \frac{5L}{8}\right] \qquad \text{الف}$$

با توجه به رابطه (الف) به وضوح روشن است که مقدار تابع تکین $[x-5L/8]$ وقتی برابر صفر خواهد شد که $x \le 5L/8$ باشد. رابطه (الف) برای $x \ge 3L/4$ معتبر خواهد بود. برای از بین بردن این مشکل ما بار گسترده یکنواخت را تا تکیه‌گاه D ادامه می‌دهیم و برای ثابت نگه داشتن وضع موجود یک بار گسترده یکنواخت دیگر در جهت معکوس و به همان مقدار بار قبلی مطابق شکل۱۳-۱۱ بر تیر اعمال می‌نماییم.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۳-۱۱ روش تحلیل تیر تحت بار گسترده بر روی قسمتی از تیر

در مقطع X به فاصله x از بَر تکیه‌گاه A گشتاور خمشی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$M = R_A x - \frac{w}{2}\left[x-\frac{L}{2}\right]^2 + \frac{w}{2}\left[x-\frac{3L}{4}\right]^2 \qquad \text{ب}$$

رابطه (ب) برای هر مقطعی از تیر معتبر است. با جانشانی رابطه (ب) در رابطه۱۳-۳ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{3}{32}wLx - \frac{w}{2}\left[x-\frac{L}{2}\right]^2 + \frac{w}{2}\left[x-\frac{3L}{4}\right]^2 \qquad \text{پ}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (پ) داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3}{64}wLx^2 - \frac{w}{2}\left[x-\frac{L}{2}\right]^3 + \frac{w}{6}\left[x-\frac{3L}{4}\right]^3 + C_1 \qquad \text{ت}$$

$$EI\upsilon = \frac{wLx^3}{64} - \frac{w}{24}\left[x-\frac{L}{2}\right]^4 + \frac{w}{24}\left[x-\frac{3L}{4}\right]^4 + C_1x + C_2 \qquad \text{ث}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. وقتی $x=0$ و $x=L$ مقدار $\upsilon=0$ خواهد بود. با استفاده از شرط اول مقدار $C_2=0$ بدست خواهد آمد. همچنین از دومین شرط نیز داریم:

$$0 = \frac{wL^4}{64} - \frac{w}{24}\left(\frac{L}{4}\right)^4 + \frac{w}{24}\left(\frac{L}{4}\right)^4 + C_1L$$

$$C_1 = -\frac{27wL^3}{2048}$$

با جانشانی در روابط (ت) و (ث) داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = \frac{3wLx^2}{64} - \frac{w}{6}\left[x-\frac{L}{2}\right]^3 + \frac{w}{6}\left[x-\frac{3L}{4}\right]^3 - \frac{27wL^3}{2048} \qquad \text{ج}$$

$$EI\upsilon = \frac{wLx^3}{64} - \frac{w}{24}\left[x - \frac{L}{2}\right]^4 + \frac{w}{24}\left[x - \frac{3L}{4}\right]^4 - \frac{27wL^3}{2048}x \qquad \text{ح}$$

در این مثال مقدار حداکثر خیز به در ناحیه BC ایجاد می‌شود. با برابر صفر قرار دادن مقدار شیب در این ناحیه داریم:

$$0 = \frac{3wLx^2}{64} - \frac{w}{6}\left[x - \frac{L}{2}\right]^3 - \frac{27wL^3}{2048}$$

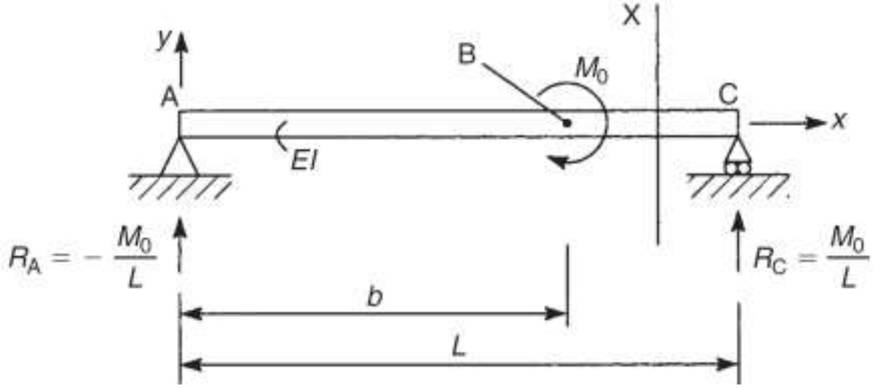
و با ساده سازی داریم:

$$x^3 - 1.78Lx^2 + 0.75xL^2 - 0.046L^3 = 0 \qquad \text{خ}$$

با حل رابطه (خ) با استفاده از روش سعی و خطا مقدار شیب در $x \approx 0.6L$ بدست می‌آید. بنابراین با استفاده از رابطه (ح)، حداکثر خیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\upsilon_{\max} = -\frac{4.53 \times 10^{-3} wL^4}{EI}$$

مثال۱۳-۱۰) شکل خیز تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۱۲ را تعیین کنید.



شکل۱۳-۱۲ تیر مثال۱۳-۱۰

حل) در این مثال یک گشتاور متمرکز به اندازه M_0 در نقطه B به تیر وارد می‌شود. با نوشتن معادلات تعادل برای تیر مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی بدست می‌آید.

$R_A = -\dfrac{M_0}{L}$ به سمت پایین $\qquad$ $R_C = \dfrac{M_0}{L}$ به سمت بالا

گشتاور خمشی در هر مقطع X بین B و C به صورت زیر بدست می‌آید.

$$M = R_A x + M_0 \qquad \text{الف}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

رابطه (الف) در محدوده BC معتبر است. در رابطه (الف) تابع تکین وجود ندارد که ما برای رفع این مشکل می‌توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم.

$$M = R_A x + M_0[x-b]^0 \quad \text{(ب)}$$

توجه شود که $[x-b]^0 = 1$ می‌باشد. رابطه (ب) همان رابطه (الف) می‌باشد ولی $[x-b]^0$ وقتی که $x \le b$ باشد ناپدید می‌شود. با جانشانی M از رابطه (ب) در رابطه۱۳-۳ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = R_A x + M_0[x-b]^0 \quad \text{(پ)}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (پ) داریم:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} + M_0[x-b] + C_1 \quad \text{(ت)}$$

و

$$EI\upsilon = R_A\frac{x^3}{6} + \frac{M_0}{2}[x-b]^2 + C_1x + C_2 \quad \text{(ث)}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت‌های انتگرال‌گیری هستند. وقتی $x=0$ و $x=L$ مقدار $\upsilon = 0$ خواهد بود. با استفاده از شرط اول مقدار $C_2=0$ بدست خواهد آمد. همچنین از دومین شرط داریم:

$$0 = -\frac{M_0}{L}\frac{L^3}{6} + \frac{M_0}{2}[L-b]^2 + C_1L$$

بنابراین

$$C_1 = -\frac{M_0}{6L}\left(2L^2 - 6Lb + 3b^2\right)$$

معادله منحنی خیز تیر به صورت زیر خواهد بود.

$$\upsilon = \frac{M_0}{6EIL}\left\{x^3 + 3L[x-b]^2 - \left(2L^2 - 6Lb + 3b^2\right)x\right\} \quad \text{(ج)}$$

۳-۱۳ روش گشتاور سطح برای خمش متقارن

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

روش انتگرال‌گیری دوبل و یا روش تابع تکین[1] هنگامی مورد استفاده قرار می‌گیرند که منحنی خیز تیر مورد نیاز باشد. لیکن هنگامی که تغییرمکان یک نقطه خاص از تیر مورد نیاز باشد، استفاده از روش گشتاور سطح مناسبتر می‌باشد. با بازنویسی رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M}{EI}$$

با انتگرال‌گیری بین A تا B داریم:

$$\int_A^B\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\int_A^B\frac{M}{EI}dx \qquad (۱۳\text{-}۶)$$

یا

$$\left[\frac{d\upsilon}{dx}\right]_A^B=\int_A^B\frac{M}{EI}dx$$

$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B-\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A=\int_A^B\frac{M}{EI}dx \qquad (۱۳\text{-}۷)$$

رابطه۱۳-۷ نشان می‌دهد که تغییرات شیب مابین A تا B به صورت عددی برابر با سطح دیاگرام M/EI مابین مقطع است. حال ما به رابطه۱۳-۳ بر می‌گردیم و هر دو طرف رابطه را در x ضرب می‌کنیم.

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M}{EI}x \qquad (۱۳\text{-}۸)$$

با انتگرال‌گیری از رابطه ۱۳-۸ بین دو مقطع A و B داریم:

$$\int_A^B\frac{d^2\upsilon}{dx^2}xdx=\int_A^B\frac{M}{EI}xdx \qquad (۱۳\text{-}۹)$$

قسمت سمت چپ رابطه۱۳-۹ را می‌توان توسط انتگرال‌گیری جزءبه جزء انتگرال‌گیری نمود.

$$\left[x\frac{d\upsilon}{dx}\right]_A^B-\int_A^B\frac{d\upsilon}{dx}dx=\int_A^B\frac{M}{EI}xdx$$

$$\left[x\frac{d\upsilon}{dx}\right]_A^B-[\upsilon]_A^B=\int_A^B\frac{M}{EI}xdx$$

با اعمال حدود انتگرال داریم:

[1] Method of singularity functions

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

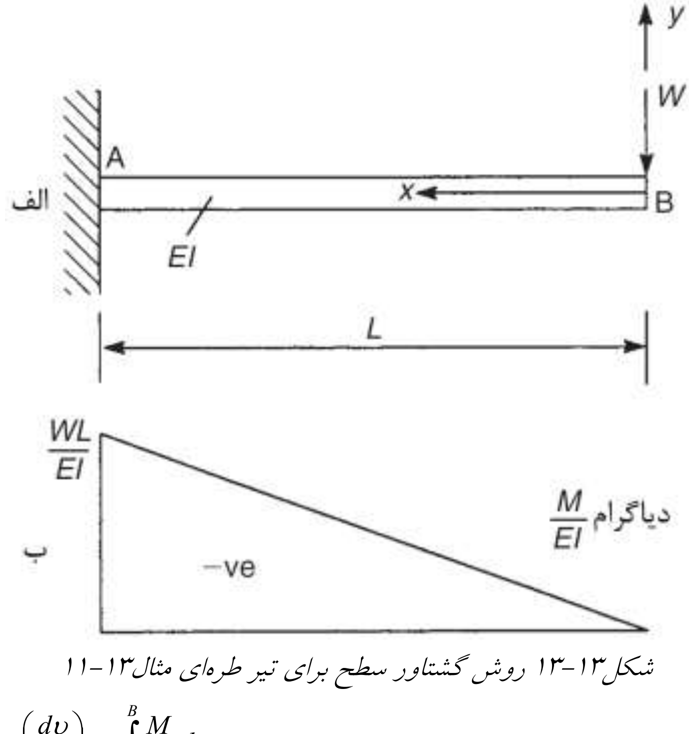
$$x_B\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B - x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - \left(\upsilon_B - \upsilon_A\right) = \int_A^B \frac{M}{EI}xdx \qquad (۱۰-۱۳)$$

که x_B و x_A بیان‌کننده مختصات نقاط B و A هستند و همچنین $(d\upsilon/dx)_B$ و $(d\upsilon/dx)_A$ به ترتیب شیب نقاط B و A هستند. قسمت سمت راست رابطه۱۳-۱۰ مساحت دیاگرام M/EI، مابین A تا B می‌باشد.

با استفاده از روابط۱۳-۷ و ۱۳-۱۰ می‌توان شیب و خیز در هر مقطع از تیر را بدست آورد.

مثال۱۳-۱۱) مقدار شیب و خیز در انتهای آزاد تیر طره شکل۱۳-۱۳ را تعیین کنید.

حل) مبداء را در انتهای B تیر در نظر می‌گیریم. با استفاده از رابطه۱۳-۷ به صورت زیر خواهد بود.



شکل۱۳-۱۳ روش گشتاور سطح برای تیر طره‌ای مثال۱۳-۱۱

$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \int_A^B \frac{M}{EI}dx$$

از آنجایی که $(d\upsilon/dx)_A = 0$

الف
$$-\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \int_0^L \frac{M}{EI}dx$$

با استفاده از شکل۱۳-۱۳ب داریم:

$$-\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \frac{1}{2}L\left(\frac{-WL}{EI}\right)$$
$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \frac{WL^2}{2EI}$$

با توجه به اینکه گشتاور خمشی در هر مقطعی از تیر برابر $Wx-$ خواهد بود. با توجه به رابطه (الف) داریم:

$$-\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \int_0^L -\frac{Wx}{EI}dx$$
$$\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \frac{WL^2}{2EI}$$

با گرفتن مبداء در B، رابطه۱۳-۱۰ به صورت زیر خواهد شد:

ب
$$x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - x_B\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B - (\upsilon_A - \upsilon_B) = \int_B^A \frac{M}{EI}xdx$$

از آنجایی که $(d\upsilon/dx)_A = 0$ و $x_B = 0$ و $\upsilon_A = 0$ رابطه (ب) به صورت زیر ساده خواهد شد.

پ
$$\upsilon_B = \int_0^L \frac{M}{EI}xdx$$
$$\upsilon_B = \frac{1}{2}L\left(\frac{-WL}{EI}\right)\frac{2}{3}L$$

در نتیجه:

$$\upsilon_B = \frac{-WL^3}{3EI}$$

و متناوباً خواهیم داشت:

$$\upsilon_B = \int_0^L \frac{(-Wx)}{EI}xdx = -\int_0^L \frac{Wx^2}{EI}dx$$
$$\Rightarrow \qquad \upsilon_B = -\frac{WL^3}{3EI}$$

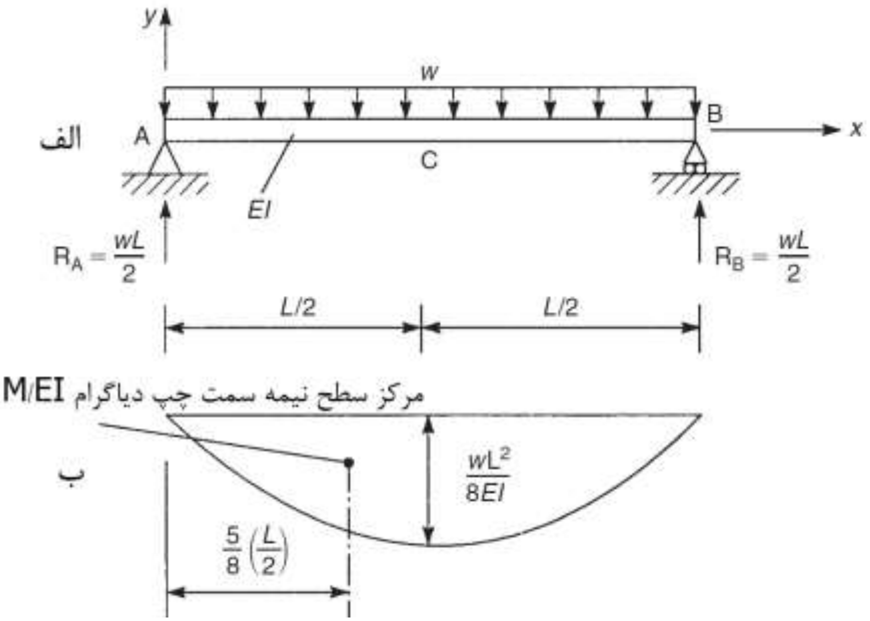
مثال۱۳-۱۲) حداکثر خیز تیر دو سر ساده شکل۱۳-۱٤ را تعیین کنید.

حل) برای تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۱٤ب دیاگرام گشتاور خمشی نشان داده شده است. همچنین مقادیر عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی برای تیر دو سر ساده برابر *wL/2* می‌باشد. با گرفتن مبداء در نقطه A و در وسط تیر AC رابطه۱۳-۱۰ به صورت زیر خواهد شد.

الف
$$x_C\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_C - x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - \left(\upsilon_C - \upsilon_A\right) = \int_A^C \frac{M}{EI} x dx$$

از آنجایی که $\left(d\upsilon/dx\right)_C = 0$ و $x_A = 0$ و $\upsilon_A = 0$ رابطه (الف) به صورت زیر ساده خواهد شد.

ب
$$\upsilon_C = -\int_0^{L/2} \frac{M}{EI} x dx$$



شکل۱۳-۱٤ روش گشتاور سطح برای تیر دو سر ساده تحت بار گسترده یکنواخت

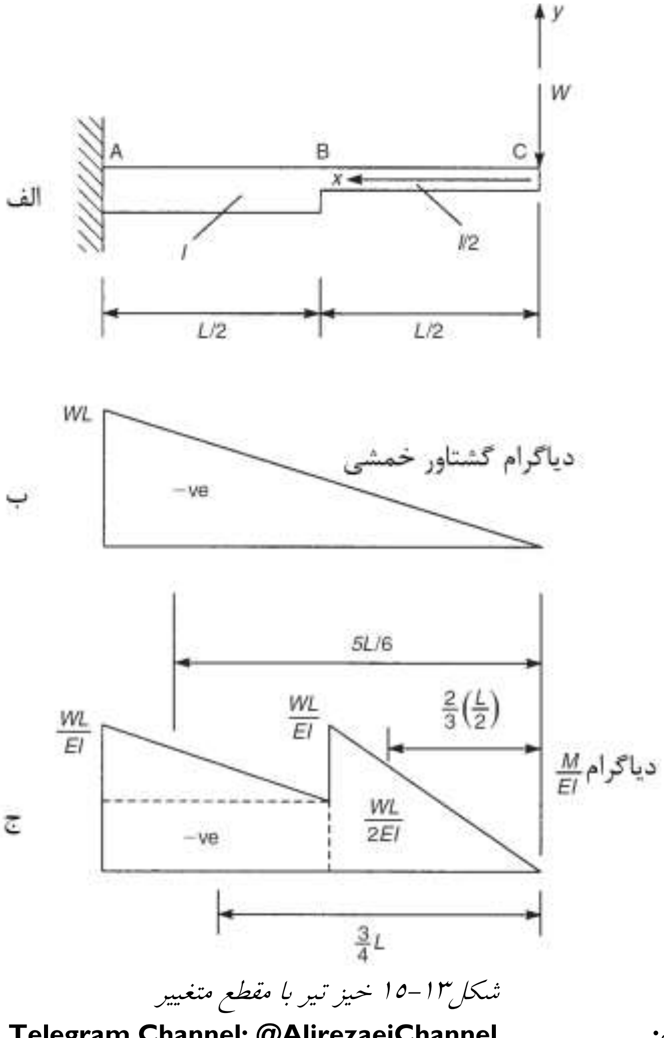
با استفاده از هندسه دیاگرام M/EI و گرفتن گشتاور سطح دیاگرام M/EI بین A و C حول A از رابطه (ب) داریم:

$$\upsilon_C = -\frac{2}{3}\frac{wL^2}{8EI}\frac{L}{2}\frac{5}{8}\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \upsilon_C = -\frac{5wL^4}{384EI}$$

مثال۱۳–۱۳) در شکل۱۳–۱۵الف یک تیر طره‌ای که تحت یک بار متمرکز به میزان W در انتهای آزاد آن قرار دارد را نشان می‌دهد. مقطع این تیر در وسط دهانه تغییر کرده و ممان اینرسی تیر نصف می‌شود. مقدار خیز در انتهای آزاد آن را تعیین کنید.

حل) با استفاده از هندسه دیاگرام M/EI (شکل۱۳–۱۵ج) و گرفتن گشتاور سطح دیاگرام M/EI حول C داریم:



شکل۱۳–۱۵ خیز تیر با مقطع متغییر

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\upsilon_C = \left[\left(\frac{-WL}{2EI}\right)\frac{L}{2}\frac{3L}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{-WL}{2EI}\right)\frac{L}{2}\frac{5L}{6} + \frac{1}{2}\left(\frac{-WL}{EI}\right)\frac{L}{2}\frac{2}{3}\frac{L}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \upsilon_C = -\frac{3WL^3}{8EI}$$

از راه تجزیه داریم:

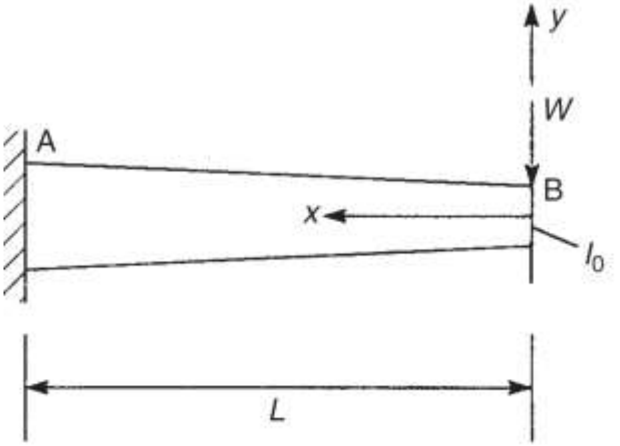
$$\upsilon_C = \left[\int_0^{L/2} \frac{-Wx^2}{\frac{EI}{2}} dx + \int_{L/2}^{L} \frac{-Wx^2}{EI} dx\right]$$

$$\upsilon_C = -\frac{W}{EI}\left\{\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{L/2} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{L/2}^{L}\right\}$$

بنابراین

$$\upsilon_C = -\frac{3WL^3}{8EI}$$

مثال۱۳-۱٤) تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل۱۳-۱٦ در امتداد طولش باریک می‌شود، بنابراین گشتاور دوم سطح مقطع به صورت خطی از I_0 تا $2I_0$ تغییر می‌کند. مقدار خیز تیر در انتهای آزاد آن را وقتی تحت یک بار متمرکز در انتهای آزاد آن قرار دارد، تعیین کنید.



شکل۱۳-۱٦ خیز تیر طره‌ای با مقطع متغییر

حل) مبداء مختصات را در انتهای آزاد B انتخاب می‌کنیم. با استفاده از روابطه۱۳-۱۰ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

$$x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - x_B\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B - (\upsilon_A - \upsilon_B) = \int_B^A \frac{M}{EI} x dx$$ الف

گشتاور دوم سطح I_x در هر مقطع X به صورت زیر بدست می‌آید:

$$I_X = I_0\left(1 + \frac{x}{L}\right)$$

از آنجایی که $(d\upsilon/dx)_A = 0$ و $x_B = 0$ و $\upsilon_A = 0$ رابطه (الف) به صورت زیر ساده خواهد شد.

$$\upsilon_B = \int_0^L \frac{Mx}{EI_0\left(1+\frac{x}{L}\right)} dx$$ ب

از آنجایی که $M = -Wx$، با استفاده از رابطه (ب) داریم:

$$\upsilon_B = -\int_0^L \frac{Wx^2}{EI_0\left(1+\frac{x}{L}\right)} dx$$

$$\upsilon_B = -\frac{WL}{EI_0}\int_0^L \frac{x^2}{L+x} dx$$ پ

با بازنویسی رابطه (پ) داریم:

$$\upsilon_B = -\frac{WL}{EI_0}\left[\int_0^L (x-L)dx + \int_0^L \frac{L^2}{L+x} dx\right]$$

$$\upsilon_B = -\frac{WL}{EI_0}\left[\left(\frac{x^2}{2} - Lx\right) + L^2 \log_e(L-x)\right]_0^L$$

بنابراین

$$\upsilon_B = -\frac{WL^3}{EI_0}\left(-\frac{1}{2} + \log_e 2\right)$$

$$\upsilon_B = -\frac{0.19WL^3}{EI_0}$$

۱۳-٤ خیز در تیر با مقطع نامتقارن

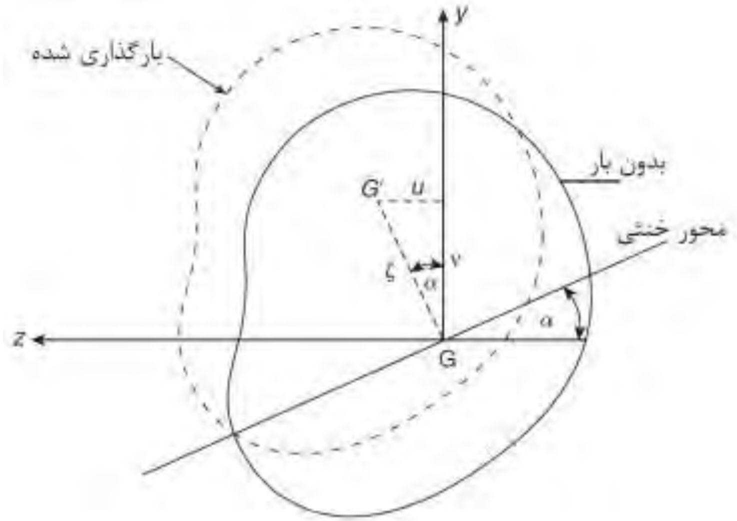
تیرهای معرفی شده در فصل نهم (جلد اول کتاب)، تیرهایی بودند که در آنها خمش حول محور مرکزی که محور خنثی تیر بود ایجاد می‌شد. حال مطابق شکل۱۳-۷ فرض نمایید

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

تحت خیز مطلق تیر که عمود بر محور خنثی مقطع ζ می‌باشد، مرکز ثقل مقطع G به نقطه G' منتقل شده است. پارامترهای ζ، u، υ به صورت زیر بدست می‌آید.

$$u = \zeta \sin \alpha \qquad \upsilon = \zeta \cos \alpha \tag{۱۳-۱۱}$$



شکل ۱۳-۱۷ خیز در تیر با مقطع نامتقارن

انحنای تیر دارای شعاع R می‌باشد که با توجه به رابطه ۱۳-۲ به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2\zeta}{dx^2} \tag{۱۳-۱۲}$$

با جانشانی در رابطه ۱۳-۱۱ داریم:

$$\frac{\sin\alpha}{R} = \frac{d^2u}{dx^2} \qquad \frac{\cos\alpha}{R} = \frac{d^2\upsilon}{dx^2} \tag{۱۳-۱۳}$$

با توجه به روابط ۹-۱۳

$$\frac{E\sin\alpha}{R} = \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}$$

$$\frac{E\cos\alpha}{R} = \frac{M_z I_y - M_y I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}$$

بنابراین با توجه به روابط ۱۳-۱۳ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{M_y I_z - M_z I_{zy}}{I_z I_y - I_{zy}^2} \tag{۱۳-۱۴}$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=\frac{M_zI_y-M_yI_{zy}}{I_zI_y-I_{zy}^2} \qquad (۱۵-۱۳)$$

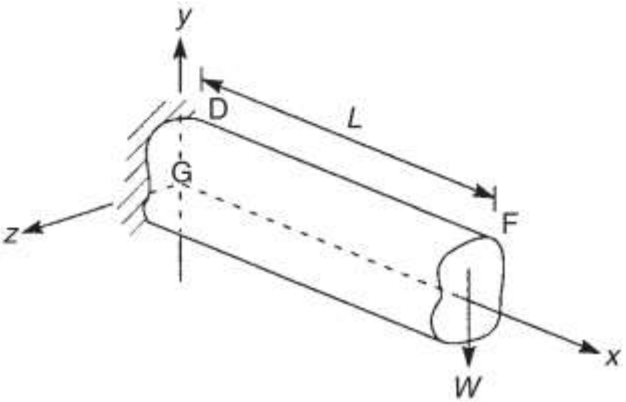
مثال۱۳-۱۵) مقدار خیز افقی و قائم در انتهای آزاد تیر طره‌ای شکل۱۳-۱۸ را تعیین نمایید. گشتاور دوم سطح مقطع نامتقارن برابر I_z، I_y و I_{zy} می‌باشد.

حل) گشتاور خمشی در هر مقطعی از تیر به علت اعمال بار W به صورت زیر است:

$$M_z=-W(L-x) \qquad M_y=0$$

رابطه ۱۳-۱٤ به صورت زیر کاهش می‌یابد.

$$\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{W(L-x)I_{zy}}{E(I_zI_y-I_{zy}^2)} \qquad \text{الف}$$



شکل۱۳-۱۸ خیز تیر با مقطع نامتقارن تحت بار متمرکز در انتها

با انتگرال‌گیری نسبت به x داریم:

$$\frac{du}{dx}=\frac{WI_{zy}}{E(I_zI_y-I_{zy}^2)}\left(Lx-\frac{x^2}{2}+C_1\right)$$

از آنجایی که در $x=0$ مقدار $d\upsilon/dx=0$ است، بنابراین $C_1=0$ بدست خواهد آمد.

$$\frac{du}{dx}=\frac{WI_{zy}}{E(I_zI_y-I_{zy}^2)}\left(Lx-\frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{ب}$$

با انتگرال‌گیری از رابطه (ب) نسبت به x داریم:

$$u=\frac{WI_{zy}}{E(I_zI_y-I_{zy}^2)}\left(\frac{Lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}+C_2\right)$$

در $x=0$ مقدار $\upsilon=0$ است، بنابراین $C_2=0$ بدست خواهد آمد.

$$\upsilon = \frac{WI_{zy}}{6E\left(I_z I_y - I_{zy}^2\right)}\left(3Lx^2 - x^3\right)$$ پ

در انتهای آزاد تیر جایی که $x=L$ می‌باشد خواهیم داشت:

$$\upsilon_{fe} = \frac{WI_{zy}L^3}{6E\left(I_z I_y - I_{zy}^2\right)}$$ ت

مقدار خیز تیر در صفحه xy نیز به روشی مشابه با توجه به رابطه ۱۳-۱۵ بدست خواهد آمد.

$$\upsilon_{fe} = \frac{WI_y}{6E\left(I_z I_y - I_{zy}^2\right)}\left(3Lx^2 - x^3\right)$$ ث

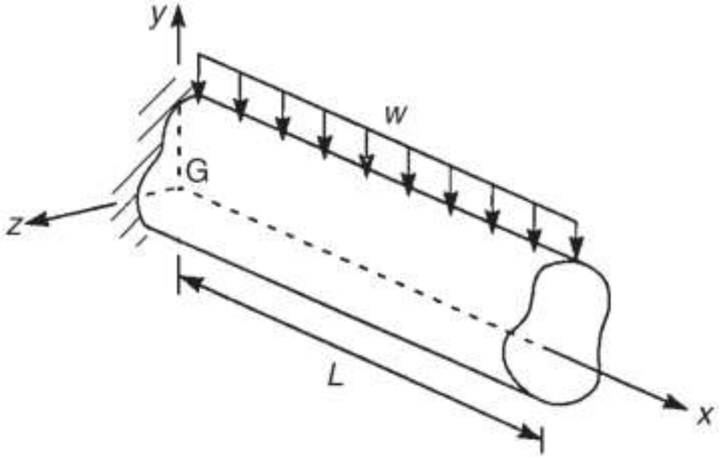
خیز در انتهای آزاد تیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\upsilon_{fe} = \frac{WI_y L^3}{3E\left(I_z I_y - I_{zy}^2\right)}$$ ج

مقدار خیز مطلق δ_{fe} در انتهای آزاد تیر به صورت زیر است:

$$\delta_{fe} = \left(u_{fe}^2 + u_{fe}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$ ح

مثال۱۳-۱٦) مقدار خیز در انتهای تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل۱۳-۱۹ را تعیین نمایید. گشتاور دوم سطح مقطع برابر I_z، I_y و I_{zy} می‌باشد.



شکل۱۳-۱۹ خیز در تیر طره‌ای تحت یک بار گسترده یکنواخت در مثال۱۳-۱٦

حل) روش حل این مسئله نیز مانند مثال قبلی است ولیکن گشتاور خمشی تیر M_z و M_y به صورت زیر خواهد بود.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$M_z = -\frac{w(L-x)^2}{2} \qquad M_y = 0$$

مولفه‌های تغییرمکانی در انتهای آزاد تیر به صورت زیر می‌باشد.

$$u_{fe} = \frac{wI_{zy}L^4}{8E\left(I_zI_y - I_{zy}^2\right)} \qquad \upsilon_{fe} = -\frac{wI_yL^4}{8E\left(I_zI_y - I_{zy}^2\right)}$$

در صورتی که Gz و Gy محورهای تقارن باشند، $I_{zy}=0$ خواهد بود و به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$u_{fe} = 0 \qquad \upsilon_{fe} = -\frac{wL^4}{8EI_z}$$

۵-۱۳ خیز به علت برش[1]

تاکنون تمام مسائلی که مطرح شده، برای بدست آوردن تغییرمکان‌ها تنها به علت خمش بوده است. خیز ایجاد شده در تیرها عمدتاً به علت خمش است و خیز ایجاد شده به علت برش بسیار ناچیز می‌باشد. در بسیاری از نرم‌افزارهای موجود نیز از اثرات ناشی از برش صرف نظر می‌شود. در اینجا ما از انرژی کرنشی برای بدست آوردن خیز به علت برش در تیرهایی که حداقل یک محور تقارن داشته باشند استفاده می‌نماییم.

در فصل۱۰ نشان دادیم که انرژی کرنشی U در یک قطعه ماده در معرض تنش برشی یکنواخت τ به صورت زیر می‌باشد.

$$U = \frac{\tau^2}{2G} \times (\text{حجم})$$

بطور کلی توزیع تنش برشی در سرتاسر تیر به صورت یکنواخت نیست. بنابراین رابطه فوق را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$U = \frac{\beta}{2G} \times \left(\frac{S}{A}\right)^2 \times (\text{حجم}) \qquad (۱۶-۱۳)$$

که S نیروی برشی اعمال شده، A سطح مقطع تیر و β ثابتی است که به توزیع تنش برشی در مقطع تیر بستگی دارد و ضریب شکل[2] زیر نامیده می‌شود.

---

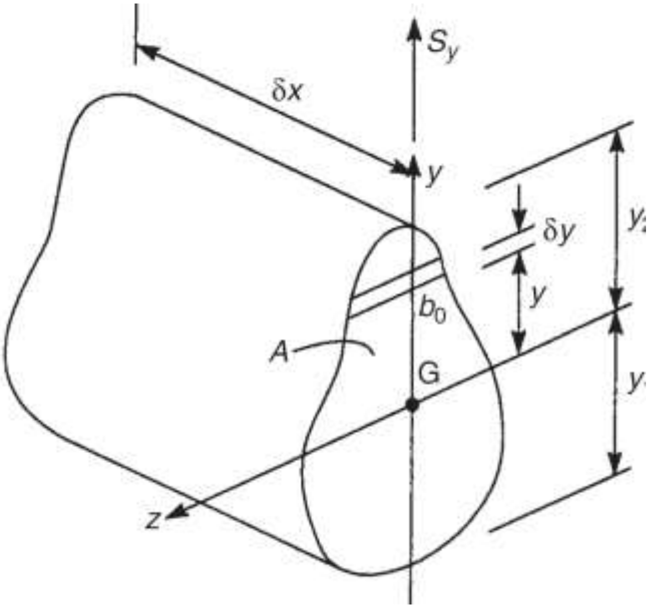
[1] Shear deflections

[2] Form factor

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

برای بدست آوردن β ما یک المان به ابعاد $b_0\delta_y$ به طول δ_x را بر روی تیری که تحت بار برش قائم به میزان S_y (شکل۱۳–۲۰) در نظر می‌گیریم. ما فرض می‌کنیم که تیر دارای یک محور تقارن است.



شکل۱۳–۲۰ تعیین β

مقدار تنش برشی τ در پهنای تیر (b_0) ثابت می‌باشد. انرژی کرنشی δU المان $b_0 \times \delta_y \times \delta_x$ با استفاده از رابطه۱۰–۲۰ بدست می‌آید:

$$\delta U = \frac{\tau^2}{2G} \times b_0 \times \delta_y \times dx \qquad (۱۳–۱۷)$$

بنابراین انرژی کرنشی کل U در طول المان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$U = \frac{\delta_x}{2G}\int_{y_1}^{y_2} \tau^2 b_0 dy \qquad (۱۳–۱۸)$$

متناوباً U برای طول المان تیر با استفاده از رابطه ۱۳–۱٦ حاصل می‌شود:

$$U = \frac{\beta}{2G} \times \left(\frac{S_y}{A}\right)^2 \times A\delta_x \qquad (۱۳–۱۹)$$

با برابر قرار دادن روابط۱۳–۱۹ و ۱۳–۱۸ داریم:

$$\frac{\beta}{2G} \times \left(\frac{S_y}{A}\right)^2 \times A\delta_x = \frac{\delta_x}{2G}\int_{y_1}^{y_2} \tau^2 b_0 dy$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\beta=\frac{A}{S_y^2}\int_{y_1}^{y_2}\tau^2 b_0 dy \qquad (۱۳-۲۰)$$

توزیع تنش برشی در تیر دارای یک یا دو محور تقارن تحت نیروی برشی قائم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\tau=-\frac{S_y A'\overline{y}}{b_0 I_z}$$

با جانشانی این عبارت برای τ در رابطه ۱۳-۲۰ داریم:

$$\beta=\frac{A}{S_y^2}\int_{y_1}^{y_2}\left(\frac{S_y A'\overline{y}}{b_0 I_z}\right)^2 b_0 dy$$

$$\beta=\frac{A}{I_z^2}\int_{y_1}^{y_2}\frac{\left(A'\overline{y}\right)^2}{b_0}dy \qquad (۱۳-۲۱)$$

حال فرض می‌نماییم δ_{vs} تغییرشکل تیر به سبب برش در یک المان از تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۱۶ می‌باشد. کار انجام شده توسط نیروی برشی S_y (فرض می‌نماییم که در طول δ_x ثابت می‌باشد و به صورت تدریجی اعمال می‌شود برابر است با:

$$\frac{1}{2}S_y\delta_{vs}$$

که برابر انرژی کرنشی انباشته شده می‌باشد.

$$\frac{1}{2}S_y\delta_{vs}=\frac{\beta}{2G}\times\left(\frac{S}{A}\right)^2\times A\delta_x$$

$$\Rightarrow \delta_{vs}=\frac{\beta}{G}\times\left(\frac{S}{A}\right)\delta_x$$

بنابراین کل خیز به سبب برش در طول تیر (L) که تحت نیروی برشی قائم می‌باشد، به صورت زیر است.

$$v_s=\frac{\beta}{G}\int_L\left(\frac{S_y}{A}\right)dx \qquad (۱۳-۲۲)$$

مثال۱۳-۱۷) یک تیر طره‌ای به طول L به مقطع مربع مستطیل به پهنای B و عمق D تحت یک بار متمرکز به میزان W در انتهای آزاد خود می‌باشد. مقدار خیز ایجاد شده در انتهای تیر را به علت خمش و برش تعیین نمایید. مدول برشی تیر برابر G و سختی خمشی تیر برابر EI است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حل) با استفاده از رابطه۱۳-۲۱ مقدار ضریب شکل β برای مقطع تیر به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\beta = \frac{BD}{\left(\frac{BD^3}{12}\right)^2} \int_{-D/2}^{D/2} \frac{1}{B}\left[B\left(\frac{D}{2}-y\right)\frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}+y\right)\right]^2 dy$$

با ساده سازی رابطه فوق داریم:

$$\beta = \frac{36}{D^5}\int_{-D/2}^{D/2}\left(\frac{D^4}{16}-\frac{D^2y^2}{2}+y^4\right)dy$$

با انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\beta = \frac{36}{D^5}\left[\frac{D^4y}{16}-\frac{D^2y^3}{6}+\frac{y^5}{5}\right]_{-D/2}^{D/2}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{6}{5}$$

توجه داشته باشید که ابعاد مقطع بر روی ضریب شکل تاثیری ندارد و برای مقاطع مستطیل شکل برابر٦/٥ یا ۱/۲ می‌باشد. با استفاده از رابطه۱۳-۲۲ مقدار تغییرشکل قائم تیر به علت برش برابر است با:

$$v_s = \frac{5}{6G}\int_0^L\left(\frac{-W}{BD}\right)dx$$

بنابراین:

الف
$$v_s = -\frac{6WL}{5GBD}$$

مقدار خیز در انتهای تیر به علت خمش با استفاده از مثال۱۳-۱ برابر $-WL^3/3EI$ می‌باشد. مقدار کل خیز تیر برابر است با:

ب
$$v_T = -\frac{WL^3}{3EI}-\frac{6WL}{5GBD}$$

با بازنویسی رابطه (ب) خواهیم داشت:

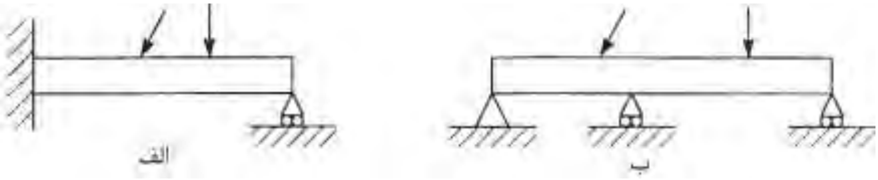
پ
$$v_T = -\frac{WL^3}{3EI}\left[1+\frac{3}{10}\frac{E}{G}\left(\frac{D}{L}\right)^2\right]$$

برای بسیاری از مواد مقدار $3E/10G$ حدوداً برابر با یک می‌باشد و سهم خیز ناشی از برش برابر $(D/L)^2$ می‌باشد که این مقدار برای تیرهای با عمق کم مقدار ناچیزی است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

۱۳-٦ تیرهای نامعین ایستایی

تاکنون تمام تیرهایی که مورد بحث قرار گرفتند تیرهای معین ایستایی بودند که با استفاده از معادلات تعادل به راحتی قادر به تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آنها بودیم. لیکن بسیاری از سازه‌ها این چنین شرایطی را نداشته و تعداد مجهولات آنها بیش از معادلات تعادل می‌باشد که به آنها سیستم‌های نامعین گویند.



شکل۱۳-۲۱ نمونه‌هایی از تیرهای نامعین ایستایی

نمونه‌هایی از تیرهای نامعین در شکل۱۳-۲۱ نشان داده شده است. تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۲۱الف یک تیر طره‌ای است که در انتهای آزاد خود دارای یک تکیه‌گاه غلتکی اضافی است.

همچنین شکل۱۳-۲۱ب یک تیر سرتاسری[1] را نشان می‌دهد که بر روی چند تکیه‌گاه قرار گرفته است. ما با استفاده از روش‌های ارائه شده در قسمت‌های قبلی این فصل در پی یافتن روشی برای حل این تیرها هستیم.

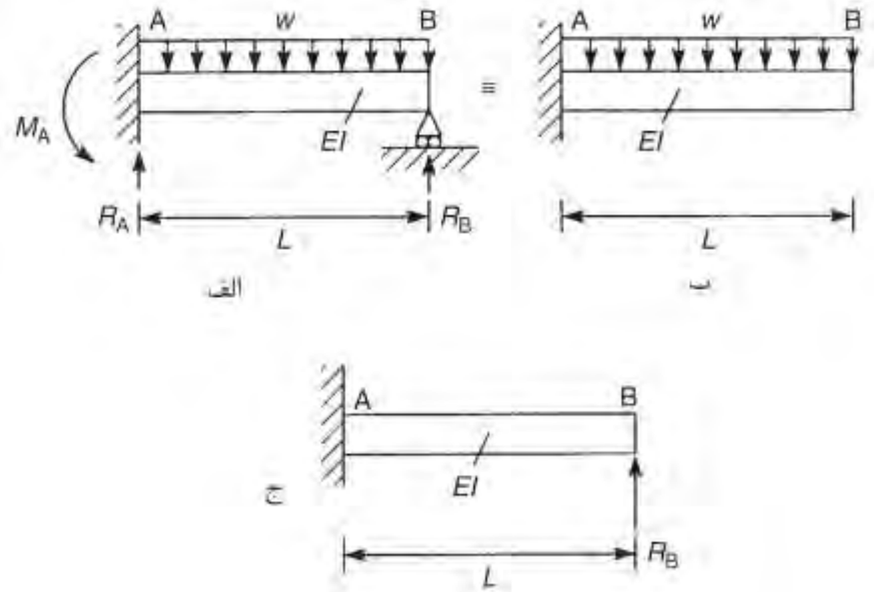
روش جمع آثار قوا

در قسمت ۳-۷ کتاب اصل جمع آثار قوا توضیح داده شد. مطابق با این اصل می‌توان به جای محاسبه اثر کل نیروها که عموماً کار دشواری است، اثر هر یک از نیروها را حساب نموده و با هم جمع نماییم. البته محدودیتی این روش دارد و آن خطی بودن سیستم است.

مثال۱۳-۱۸) تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل۱۳-۲۲الف تحت یک بار گسترده خطی در طول آن است. یک تکیه‌گاه اضافی در انتهای تیر در نظر گرفته شده است. مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه اضافه بر روی تیر را بدست آورید.

[1] Continuous beam

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۳-۲۲ تیر مثال ۱۳-۱۸

حل) فرض نمایید عکس‌العمل تکیه‌گاه B برابر R_B باشد. با استفاده از اصل جمع آثار قوا می‌توان شکل۱۳-۲۲الف را به صورت جمع دو شکل ۱۳-۲۲ب و ۱۳-۲۲ج نشان داد. از آنجایی که خیز رو به پایین تیر شکل ۱۳-۲۲ب در نقطه B برابر صفر است، بنابراین از نظر عددی بایستی برابر با مقدار بالاآمدگی نقطه B در شکل۱۳-۲۲ج باشد. بنابراین با استفاده از مثال‌های ۱۳-۱ و ۱۳-۲ داریم:

$$\left|\frac{R_B L^3}{3EI}\right| = \left|\frac{wL^4}{8EI}\right| \qquad \Rightarrow \quad R_B = \frac{3}{8}wL$$

حال با معلوم شدن مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی B تیر به صورت معین می‌باشد و می‌توانیم با استفاده از معادلات تعادل در صفحه مقدار عکس‌العمل‌های دیگر را تعیین نماییم. با گشتاورگیری حول نقطه A در شکل۱۳-۲۲الف داریم:

$$M_A = \frac{wL^2}{2} - R_B L = \frac{wL^2}{2} - \frac{3}{8}wL^2 = \frac{1}{8}wL^2$$

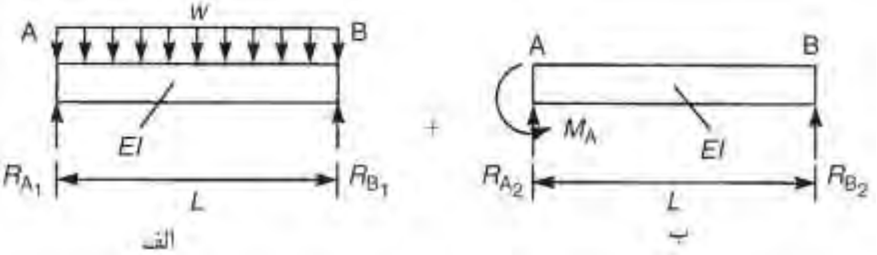
همچنین با نوشتن معادله تعادل در جهت قائم داریم:

$$R_A = wL - R_B = wL - \frac{3}{8}wL = \frac{5}{8}wL$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

ما در مثال۱۳–۱۸ عکس‌العمل تکیه‌گاهی R_B را به عنوان مجهول انتخاب کردیم. لیکن هر یک از سه عکس‌العمل M_A، R_A و R_B را نیز می‌توانستیم انتخاب نماییم. به عنوان مثال در شکل۱۳–۲۳الف و ب با استفاده از اصل جمع آثار قوا، عکس‌العمل M_A به عنوان مجهول اضافی در نظر گرفته شده است. در ۱۳–۲۳الف با حذف این عکس‌العمل، تیر به صورت معین در آمده و می‌توان به راحتی با استفاده از معادلات تعادل عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمود. حال در شکل۱۳–۲۳ب، با اعمال گشتاور M_A و نوشتن معادلات همسازی (با توجه به اینکه دوران تیر در A مقید است) می‌توان این عکس‌العمل را تعیین نمود.



شکل۱۳–۲۳ روش دیگری برای حل مثال۱۳–۲۳

در تیر اصلی مقدار دوران تیر در انتهای گیردار آن برابر صفر می‌باشد که با حذف نیروی مجهول M_A در شکل۱۳–۲۳الف دوران برای آن امکان پذیر می‌باشد، لیکن باگذاشتن این عکس‌العمل بر روی شکل۱۳–۲۳ب و جمع آن دو پاسخ تیر اصلی حاصل خواهد شد. به عبارت دیگر مقدار عددی زاویه چرخش نقطه A در شکل۱۳–۲۳الف با مقدار عددی زاویه چرخش شکل۱۳–۲۳ب برابر و از نظر جهت مخالف آن است. با استفاده از روش ارائه شده در بخش۱۳–۱ می‌توان نشان داد که:

$$\theta_{A\,(\text{به علت بارگسترده})} = \frac{wL^3}{24EI}\ (\text{ساعتگرد})$$

$$\theta_{A\,(\text{به علت بار گشتاور در}A)} = \frac{M_A L^3}{3EI}\ (\text{پاد ساعتگرد})$$

با توجه به اینکه:

$$|\theta_A(M_A)| = |\theta_A(w)|$$

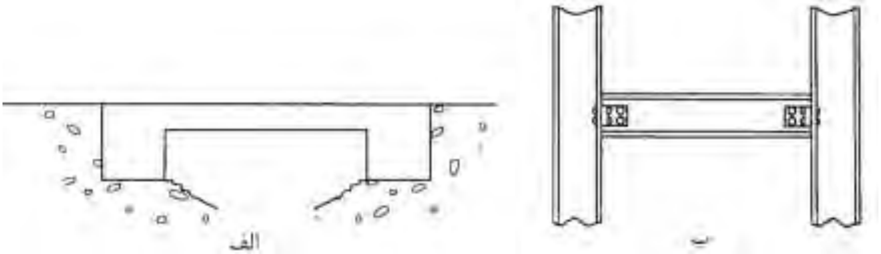
$$M_A = \frac{wL^2}{8}$$

تیرهای با انتهای گیردار

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

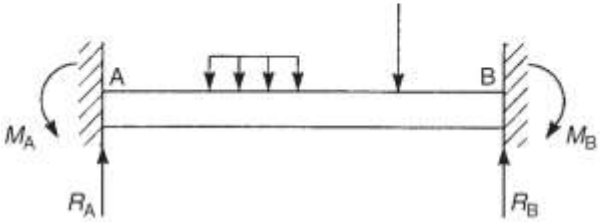
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در بسیاری از موارد به دلیل ملاحظات معماری در ساختمان‌ها قادر به اجرای مهاربند برای مقابله با نیروهای جانبی نیستیم. یک راه بسیار پرکاربرد استفاده از اتصالات گیردار است. در ساختمان‌های بتنی ذات اتصالات تیر به ستون به صورت گیردار است. لیکن در ساختمان‌های فولادی گیردار نمودن اتصالات دشوار و معمولاً پرهزینه می‌باشند. در شکل۱۳–۲٤ دو نمونه اتصال‌گیردار نشان داده شده است.



شکل۱۳–۲٤ مثال‌هایی از تیرهای با اتصال گیردار

شکل۱۳–۲۵ تیر دو سرگیرداری را نشان می‌دهد که تحت نیروهای قائم قرار دارد. با توجه به اینکه تمام بارها در جهت قائم می‌باشند عکس‌العمل‌های افقی تیر برابر صفر می‌باشند. بنابراین در اینجا چهار عکس‌العمل داریم در حالی که تعداد معادلات دو می‌باشد. با استفاده از دو شرط مقدار شیب و خیز در نقاط خاصی از تیر می‌توان آن را حل نمود.

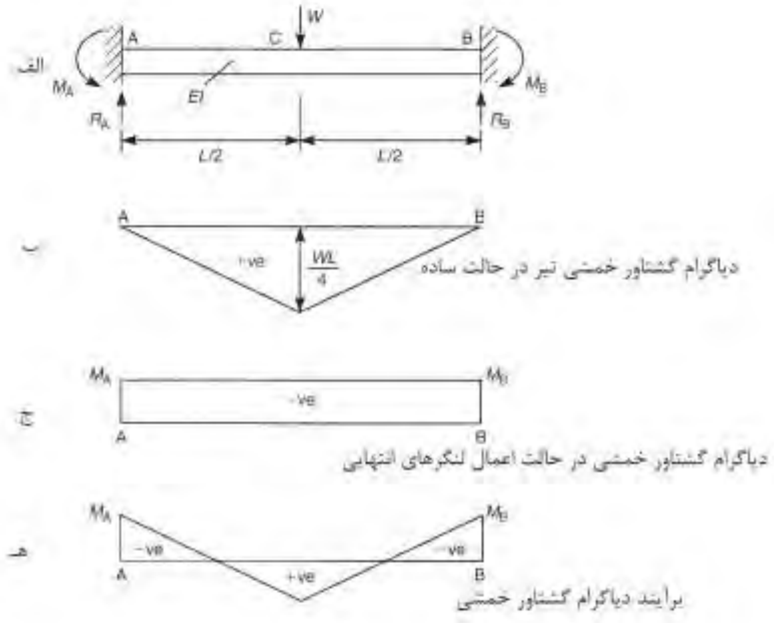


شکل۱۳–۲۵ عکس‌العمل‌ها در یک تیر دو سر گیردار

مثال۱۳–۱۹) شکل۱۳–۲٦الف تیر دو سر گیرداری را نشان می‌دهد که تحت یک بار متمرکز به میزان W در وسط خود می‌باشد. مقدار گشتاور در تکیه‌گاه‌ها را حساب کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۳–۲۶ دیاگرام گشتاور خمشی برای تیر دو سر گیردار

حل) از آنجایی که از دوران تیر در انتهای آن جلوگیری به عمل آمده است، بنابراین گشتاورهای M_A و M_B در انتهای تیر ایجاد می‌شود. با استفاده از تقارن $M_A=M_B$ و $R_A=R_B=W/2$ می‌باشد.

در شکل۱۳–۲۶ب دیاگرام گشتاور خمشی تیر AB به صورت دو سر ساده نمایش داده شده که یک بار متمرکز به میزان W در وسط آن اعمال شده است. همچنین در شکل۱۳–۲۶ج دیاگرام تیر در حالت اعمال لنگرهای انتهایی بدون حضور بار و در جهت عکس نشان داده شده است. با جمع دو نمودار شکل۱۳–۲۶هـ حاصل می‌شود که دیاگرام گشتاور خمشی تیر در حالت کلی آن می‌باشد. در اینجا از روش گشتاور سطح برای بدست آوردن گشتاور انتهای تیر استفاده می‌نماییم. با استفاده از روابط۱۳–۷ داریم:

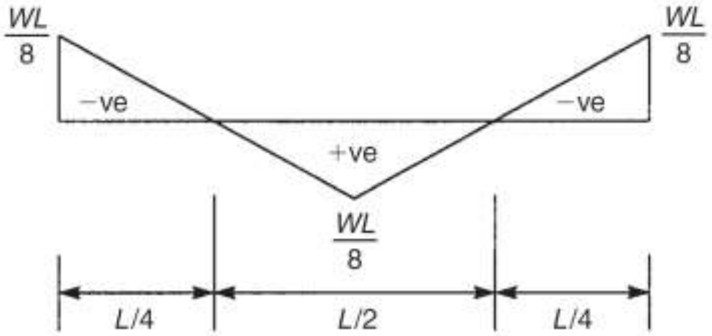
$$M_A L = \frac{1}{2}\frac{WL}{4}L$$

$$M_A = M_B = \frac{WL}{8}$$

شکل ۱۳–۲۷ برآیند دیاگرام‌های گشتاور خمشی تیر خواهد بود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۳-۲۷ برآیند دیاگرام گشتاور خمشی

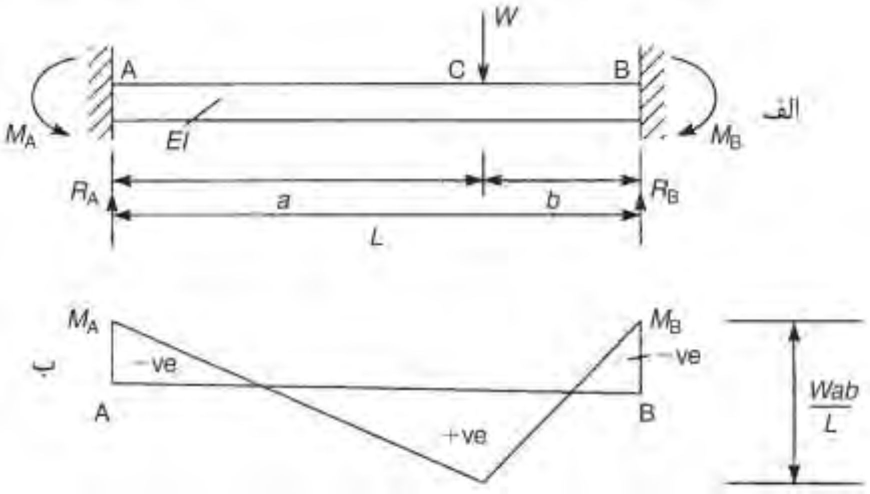
مثال۱۳-۲۰) گشتاور و عکس‌العمل‌های انتهایی تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۲۸الف را تعیین نمایید.

حل) از آنجایی که تغییر در مقدار شیب بین دو نقطه A و B برابر صفر است، داریم:

$$\frac{1}{2}(M_A+M_B)L=\frac{1}{2}L\frac{Wab}{L}$$

$$M_A+M_B=\frac{Wab}{L} \qquad \text{الف}$$

برای محاسبه M_A و M_B به معادله‌های بیشتری نیاز است. با استفاده از رابطه۱۳-۱۰ و گرفتن مبداء x در نقطه A داریم:



شکل۱۳-۲۸ تیر مثال۱۳-۲۰

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$x_B\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B - x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - (\upsilon_B - \upsilon_A) = \int_A^B \frac{M}{EI}xdx$$ ب

در رابطه (ب) $\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A = 0$ و $\upsilon_B = \upsilon_A = 0$ بنابراین:

$$0 = \int_A^B \frac{M}{EI}xdx$$ پ

به عبارت دیگر گشتاور سطح نمودار M/EI مابین A و B حول A برابر صفر خواهد بود. بنابراین با استفاده از شکل۱۳-۲۸ب داریم:

$$M_A L\frac{L}{2} + (M_B - M_A)\frac{L}{2}\frac{2}{3}L = \frac{1}{2}a\frac{Wab}{L}\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}b\frac{Wab}{L}\left(a + \frac{1}{3}b\right)$$

با ساده سازی داریم:

$$M_A + 2M_B = \frac{Wab}{L^2}(2a+b)$$ ت

با حل همزمان روابط (الف) و (ت) داریم:

$$M_A = \frac{Wab^2}{L^2} \qquad M_B = \frac{Wa^2b}{L^2}$$ ث

حال می‌توانیم با استفاده از روابط استاتیکی مقدار R_A و R_B را تعیین نماییم. با گشتاورگیری حول B داریم:

$$R_A L - M_A + M_B - Wb = 0$$

با جایگذاری M_A و M_B از رابطه (ث) داریم:

$$R_A L = \frac{Wab^2}{L^2} - \frac{Wa^2b}{L^2} + Wb$$

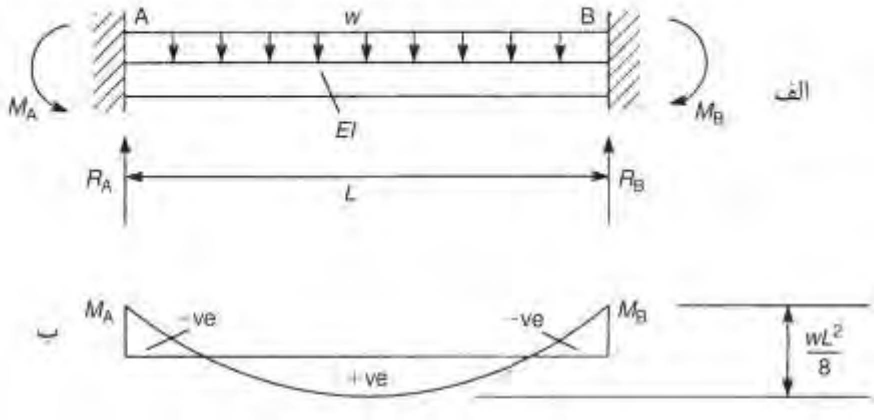
بنابراین:

$$R_A = \frac{Wb^2}{L^3}(3a+b)$$

$$R_B = \frac{Wa^2}{L^3}(a+3b)$$

مثال۱۳-۲۱) تیر دو سر گیردار نشان داده شده در شکل۱۳-۲۹الف تحت یک بار گسترده به شدت w می‌باشد. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن را تعیین نمایید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۳-۲۹ تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده یکنواخت

با استفاده از تقارن شکل، $M_A=M_B$ و $R_A=R_B$. همچنین از آنجایی تغییرات شیب در بین ابتدا و انتهای تیر نداریم، سطح زیر دیاگرام گشتاور خمشی برابر با صفر خواهد بود. بنابراین با استفاده از رابطه۱۳-۷ داریم:

$$M_A L = \frac{2}{3}\frac{wL^2}{8}L$$

بنابراین:

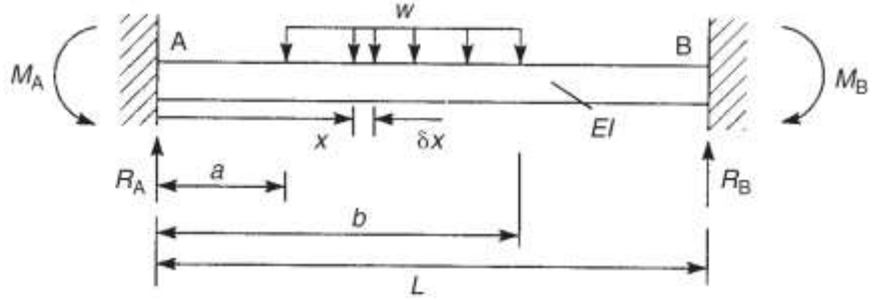
$$M_A = M_B = \frac{wL^2}{12}$$

با استفاده از روابط تعادل استاتیکی داریم:

$$R_A = R_B = \frac{wL}{2}$$

مثال۱۳-۲۲) تیر دو سر گیردار شکل۱۳-۳۰ را که تحت یک بار گسترده خطی در قسمتی از آن قرار دارد را در نظر بگیرید. مقادیر گشتاور در تکیه‌گاه‌های تیر را تعیین کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۳-۳۰ تیر دو سر گیردار تحت بار گسترده

حل) المان کوچکی به میزان δx را در قسمت بار گسترده در نظر می‌گیریم. با استفاده از نتایج بدست آمده از مثال۱۳-۲۰ داریم:

$$\delta M_A = w\delta x \frac{x(L-x)^2}{L^2}$$

گشتاور نهایی در A به سبب بار المان به صورت زیر خواهد شد:

$$M_A = \int_a^b \frac{w}{L^2} x(L-x)^2 dx$$

$$M_A = \frac{w}{L^2}\left[\frac{L^2}{2}\left(b^2-a^2\right)-\frac{2}{3}L\left(b^3-a^3\right)+\frac{1}{4}\left(b^4-a^4\right)\right] \quad \text{الف}$$

به صورت مشابه:

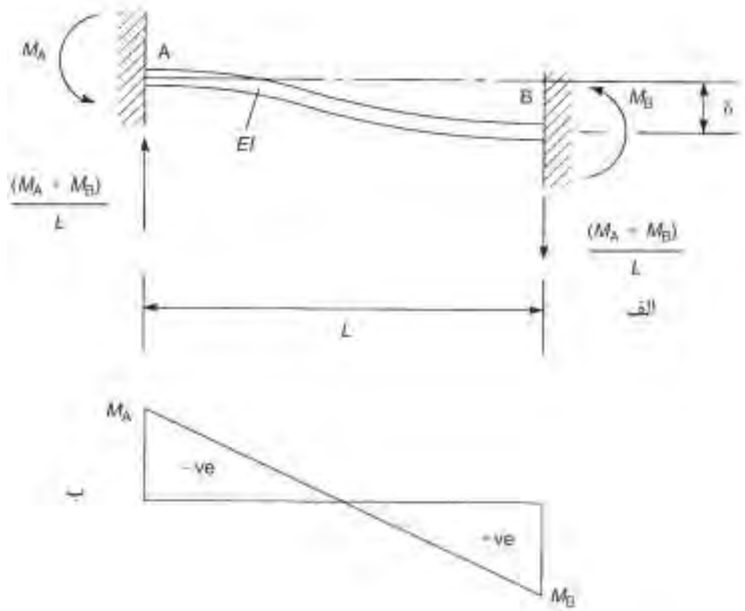
$$M_B = \frac{wb^3}{L^2}\left(\frac{L}{3}-\frac{b}{4}\right) \quad \text{ب}$$

در صورتی که بار گسترده در کل تیر اثر کند، یعنی $a=0$ و $b=L$ باشد،

$$M_A = M_B = \frac{wL^2}{12}$$

تیر دو سر گیردار با نشست تکیه‌گاهی

در بسیاری از حالات عملی تکیه‌گاه‌های سازه دچار نشست می‌شوند. در صورتی که سازه از نظر استاتیکی نامعین باشد، نشست تکیه‌گاهی و یا تغییرات دما باعث ایجاد نیروهایی در سازه می‌شود. در شکل۱۳-۳۱ تیر در نقطه B به اندازه δ دارای نشست می‌باشد که باعث ایجاد گشتاورهای پاد ساعتگردی در انتهای آن شده است. دیاگرام گشتاور خمشی در شکل۱۳-۳۱ب نشان داده شده است.



شکل۱۳-۳۱ تیر دو سرگیردار با نشست تکیه‌گاهی

سختی خمشی تیر ثابت و برابر EI می‌باشد. از آنجایی که شیب تیر از ابتدا تا انتهای آن تغییر نمی‌کند، بنابراین مساحت دیاگرام گشتاور خمشی آن برابر با صفر است. این شرایط به معنی این است که گشتاور A و B با هم برابراند. با فرض مبداء در A و استفاده از رابطه۱۳-۱۰ داریم:

$$x_B\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B - x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - (\upsilon_B - \upsilon_A) = \int_A^B \frac{M}{EI} x dx \qquad \text{الف}$$

از آنجایی که $\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A = \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_B = 0$ ، $\upsilon_A = 0$ و $\upsilon_B = -\delta$ رابطه الف به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\delta = \int_0^L \frac{M}{EI} x dx$$

با گرفتن گشتاور سطح حول نقطه A داریم:

$$\delta = -\frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{M_A}{EI}\frac{L}{6} + \frac{1}{2}\frac{L}{2}\frac{M_A}{EI}\frac{5}{6}L$$

$$M_A = \frac{6EI\delta}{L^2}$$

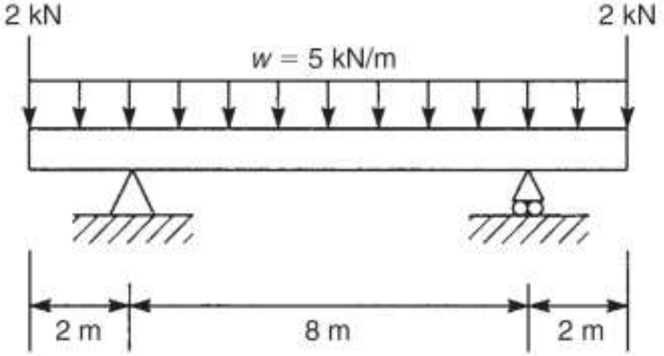
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$M_B = \frac{6EI\delta}{L^2}$$

وجود گشتاور انتهایی بر روی تیرها باعث افزایش مقاومت و سختی خواهد شد.

مسائل

۱)تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۲ را در نظر بگیرید که به صورت متقارن بر روی دو تکیه‌گاه متقارن قرار دارد. تکیه‌گاه‌ها به فاصله ۲متری از انتهای تیر قرار دارند و یک بار گسترده با شدت *5kN/m* و دو بار متمرکز به میزان *2kN* بر آن اثر می‌کند. با استفاده از روش انتگرال‌گیری دوبل، خیز تیر را در وسط و دو سر تیر را تعیین نمایید.



شکل۱۳-۳۲ تیر مسئله۱

حل) با استفاده از معادلات تعادل در صفحه، هر یک عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر برابر *32kN* بدست خواهند آمد. با فرض مبداء x در انتهای چپ تیر داریم:

$$M = -2x - \frac{5x^2}{2} + 32[x-2] + 32[x-10]$$

با جایگذاری در رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right) = -2x - \frac{5x^2}{2} + 32[x-2] + 32[x-10]$$

سپس

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = x^2 - \frac{5x^3}{6} + 16[x-2]^2 + 16[x-10]^2 + C_1$$

$$EI\upsilon = -\frac{x^3}{3} - \frac{5x^4}{24} + \left(\frac{16}{3}\right)[x-2]^3 + \left(\frac{16}{3}\right)[x-10]^3 + C_1 x + C_2$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

وقتی $x=6m$ باشد، با استفاده از تقارن $\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)=0$ خواهد بود:

$$0=-6^2-\frac{5\times 6^3}{6}+16[6-2]^2+C_1$$

بنابراین:

$$C_1=-40$$

وقتی $x=2m$ باشد، $\upsilon=0$ خواهد بود، بنابراین:

$$0=-\frac{2^3}{3}-\frac{5\times 2^2}{24}-40\times 2+C_2$$

$$C_2=86$$

سپس

$$EI\upsilon=-\frac{x^3}{3}-\frac{5x^4}{24}+\left(\frac{16}{3}\right)[x-2]^3+\left(\frac{16}{3}\right)[x-10]^3+40x+86$$

در $x=6m$ داریم:

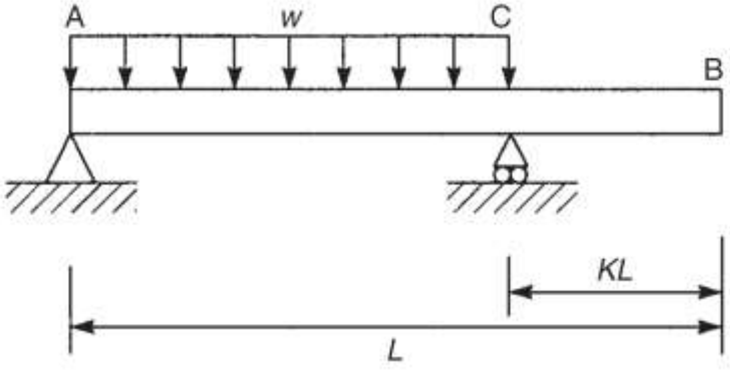
$$EI\upsilon=-\frac{6^3}{3}-\frac{5\times 6^4}{24}+\left(\frac{16}{3}\right)[6-2]^3+\left(\frac{16}{3}\right)[6-10]^3+40\times 6+86$$

بنابراین مقدار خیز در وسط دهانه $\upsilon_{(\text{mid-span})}=-3.6mm$ برابر است با:

همچنین در $x=0$ $EI\upsilon=-86$ خواهد بود و مقدار خیز در دو سر تیر برابر $\upsilon_{(\text{at end})}=2mm$ به سمت بالا خواهد بود.

۲) تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۳ را در نظر بگیرید که بر روی دو تکیه‌گاه ساده قرار دارد و مابین دو تکیه‌گاه تحت یک بار گسترده با شدت w قرار دارد. در صورتی که طول قسمت طره‌ای آن برابر KL باشد، مقدار K را طوری تعیین نمایید که مقدار جابجایی در B برابر با مقدار خیز در وسط دهانه تیر AC باشد.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل۱۳-۳۳ تیر مسئله۲

از آنجایی که بر روی قسمت BC تیر نیرویی وارد نمی‌شود، این قسمت به صورت مستقیم باقی می‌ماند. با توجه به نتایج بدست آمده از مثال۱۳-٤ مقدار خیز در وسط یک تیر دو سر ساده با تکیه‌گاه‌های ساده برابر $5wL^4(1-K)^4/384EI$ می‌باشد. همچنین شیب در نقطه C برابر $wL^3(1-K)^3/24EI$ می‌باشد، خیز تیر در B برابر است با:

$$\frac{5wL^4(1-K)^4}{384EI}=\frac{wL^3(1-K)^3KL}{24EI}$$

$$\Rightarrow\quad \left(\frac{5}{16}\right)(1-K)=K \qquad \Rightarrow\quad K=0.24$$

۳) یک تیر با دو تکیه‌گاه ساده به طول ٦متر تحت یک بار گسترده ذوزنقه‌ای شکل می‌باشد. شدت بار در انتهای چپ تیر برابر $30kN/m$ و در انتهای راست آن برابر $90kN/m$ می‌باشد. معادله خیز تیر و همچنین مقدار حداکثر خیز در وسط آن را نیز تعیین نمایید. گشتاور دوم سطح تیر برابر $120\times10^6 mm^4$ و ضریب ارتجاعی مواد برابر $E=206000\ N/mm^2$ می‌باشد.

حل) با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:

$$R_A\times6-\frac{30\times6^2}{2}-\frac{60}{2}\times6\times\frac{6}{3}=0 \qquad \Rightarrow\quad R_A=150kN$$

گشتاور خمشی در هر مقطعی از تیر به فاصله x از تکیه‌گاه A به صورت زیر است:

$$M_x=150x-\frac{30x^2}{2}-(90-30)\left(\frac{x}{6}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$M_x = 150x - 15x^2 - \frac{5x^3}{3}$$

با جایگذاری در رابطه۱۳-۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right) = 150x - 15x^2 - \frac{5x^3}{3}$$

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = 75x^2 - 5x^3 - \frac{5x^4}{12} + C_1$$

$$EI\upsilon = 25x^3 - \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{12} + C_1x + C_2$$

در $x=0$ $\upsilon = 0$، بنابراین $C_2 = 0$ خواهد بود. همچنین در $x=6m$ $\upsilon = 0$ می‌باشد.

$$0 = 25 \times 6^3 - \frac{5 \times 6^4}{4} - \frac{6^5}{12} + 6C_1$$

بنابراین، $C_1 = -522$ بدست خواهد آمد.

معادله خیز تیر به صورت زیر می‌باشد:

$$EI\upsilon = 25x^3 - \frac{5x^4}{4} - \frac{x^5}{12} - 522x$$

همچنین خیز تیر در وسط دهانه برابر خواهد بود با:

$$EI\upsilon_{(\text{mid span})} = 25 \times 3^3 - \frac{5 \times 3^4}{4} - \frac{3^5}{12} - 522 \times 3 = -1012.5$$

$$\upsilon_{(\text{mid span})} = \frac{-1012.5 \times 10^{12}}{120 \times 10^6 \times 206000} = -41mm$$

٤) یک تیر طره، به طول L با سختی خمشی EI را که تحت یک بار گسترده با شدت w که در طول آن تغییر می‌کند را در نظر بگیرید. شدت بار گسترده در ابتدای تیر و در نقطه تکیه‌گاهی برابر w و در انتهای آزاد آن شدت بار گسترده صفر می‌باشد. مقدار خیز تیر در انتهای آزاد آن را تعیین نمایید.

حل) با فرض مبداء x در انتهای آزاد تیر، شدت بار گسترده در هر مقطع دلخواهی از انتهای آزاد آن برابر wx/L می‌باشد. گشتاور خمشی در هر مقطع دلخواهی از آن برابر است با:

$$M_x = -\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{wx}{L}\right)\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{-wx^3}{6L}$$

با جایگذاری در رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right)=\frac{-wx^3}{6L}$$

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)=\frac{-wx^4}{24L}+C_1$$

$$EI\upsilon=\frac{-wx^5}{102L}+C_1x+C_2$$

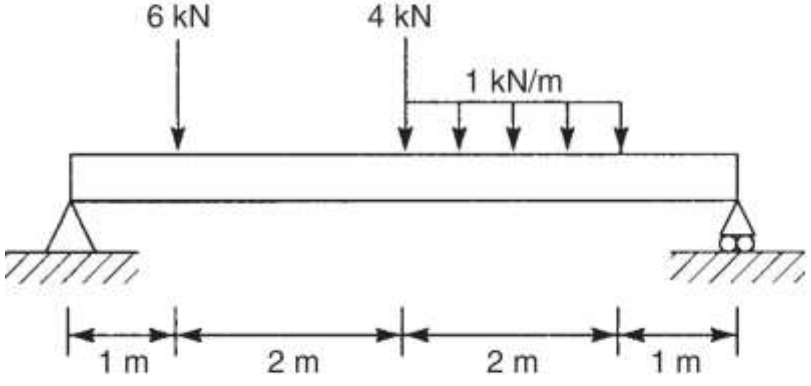
در $x=L$ مقدار $\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)=0$ خواهد بود، بنابراین $C_1=\frac{wL^3}{24}$. همچنین در $x=L$ مقدار $C_2=\frac{-wL^4}{30}$ خواهد بود. معادله خیز تیر برابر خواهد بود با:

$$EI\upsilon=-\left(\frac{w}{102L}\right)\left(x^5-5xL^4+4L^4\right)$$

در انتهای آزاد تیر، یعنی در $x=0$ داریم:

$$\upsilon=-\frac{wL^4}{30EI}$$

۵) مقدار و جهت حداکثر خیز تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۴ را بدست آورید. سختی خمشی تیر EI است.



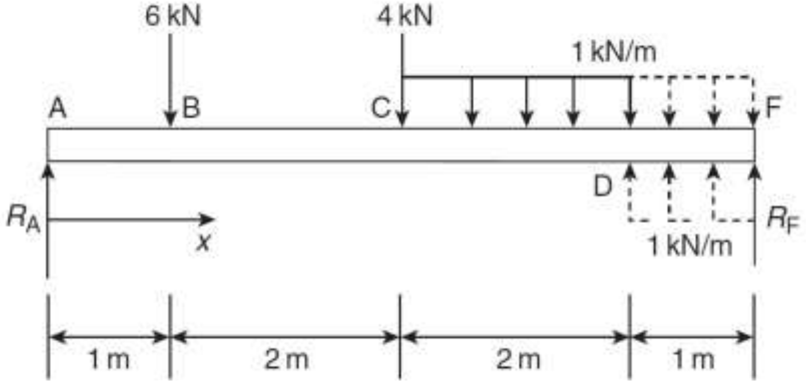
شکل۱۳-۳۴ تیر مسئله۵

حل) با توجه به شکل ۱۳-۳۵، بار گسترده بر روی تیر را تا انتهای تکیه‌گاه F ادامه می‌دهیم و برای حذف اثر بار گسترده اضافه شده، یک بار گسترده در جهت عکس نیز مطابق

شکل۱۳–۳۵ به تیر اعمال می‌نماییم. مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه A به صورت زیر خواهد بود:

$$R_A \times 6 - 6\times 5 - 4\times 3 - 1\times 2\times 2 = 0$$

$$\Rightarrow R_A = 7.7kN$$



شکل۱۳–۳۵

با استفاده از روش ماکاولی، گشتاور خمشی تیر مابین DF به صورت زیر خواهد بود:

$$M = 7.7x - 6[x-1] - 4[x-3] - \frac{1[x-3]^2}{2} + \frac{1[x-5]^2}{2}$$

با جایگزینی در رابطه۱۳–۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right) = 7.7x - 6[x-1] - 4[x-3] - \frac{[x-3]^2}{2} + \frac{[x-5]^2}{2}$$

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = \frac{7.7x^2}{2} - 3[x-1]^2 - 2[x-3]^2 - \frac{[x-3]^3}{6} - \frac{[x-5]^3}{6} + C_1$$

$$EI\upsilon = \frac{7.7x^3}{6} - [x-1]^3 - \frac{2[x-3]^3}{3} - \frac{[x-3]^4}{24} - \frac{[x-5]^4}{24} + C_1x + C_2$$

در $x=0$، $\upsilon=0$ خواهد بود، بنابراین $C_2=0$. همچنین در $x=6$، $\upsilon=0$ خواهد بود، بنابراین:

$$0 = \frac{7.7\times 6^3}{6} - 5^3 - \frac{2\times 3^4}{3} - \frac{3^4}{24} - \frac{1^4}{24} + 6C_1$$

$$\Rightarrow C_1 = -21.8$$

با حدس اولیه خیز مابین B و C داریم:

در B داریم:

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)=\frac{7.7\times1^2}{2}-21.8$$

در C داریم:

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)=\frac{7.7\times3^2}{2}-3\times2^2-21.8=+0.85$$

مقدار خیز حداکثر در جایی ایجاد می‌شود که در آن نقطه خیز برابر با صفر باشد.

$$0=\frac{7.7x^2}{2}-33[x-1]^2-21.8$$

با ساده سازی داریم:

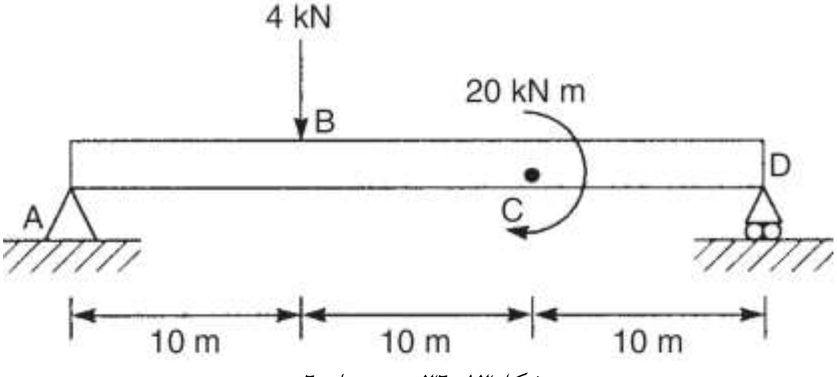
$$x^2+7.06x-29.2=0 \qquad \Rightarrow \quad x=2.9m$$

حداکثر خیز برابر است با:

$$EI\upsilon_{\max}=\frac{7.7\times2.9^3}{6}-1.9^3-21.8\times2.9=-38.8$$

$$\upsilon_{\max}=\frac{-38.8}{EI}$$

۶) مقدار و جهت حداکثر خیز در تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۶ را تعیین نمایید.



شکل۱۳-۳۶ تیر مسئله ۶

حل) با گشتاورگیری حول نقطه B داریم:

$$R_A\times30-40\times20+20=0$$

$$\Rightarrow \quad R_A=2kN$$

با استفاده از روش ماکولی و با گشتاورگیری در قسمت CD داریم:

$$M=2x-4[x-10]+20[x-20]^0$$

با جانشانی در رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right) = 2x - 4[x-10] + 20[x-20]^0$$

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = x^2 - 2[x-10]^2 + 20[x-20]^1 + C_1$$

$$EI\upsilon = \frac{x^3}{3} - \frac{2[x-10]^3}{3} + 10[x-20]^2 + C_1x + C_2$$

در $x = 0$، $\upsilon = 0$ خواهد بود، بنابراین $C_2 = 0$. همچنین در $x = 30m$، $\upsilon = 0$ خواهد بود، بنابراین $C_1 = -155.6$ خواهد بود. با فرض اینکه حداکثر خیز مابین B و C ایجاد می‌شود، بنابراین بایستی خیز مابین B و C بایستی صفر باشد.

$$0 = x^2 - 2[x-10]^2 - 155.6 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 40x + 355.6 = 0$$

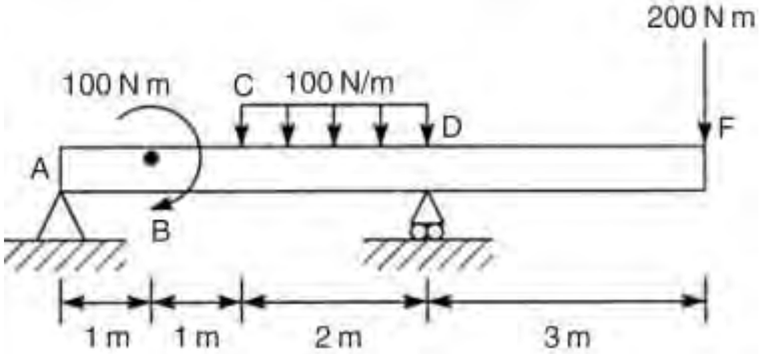
$$\Rightarrow x = 13.3m$$

بنابراین، این حدس درست بوده و حداکثر خیز به صورت زیر بدست می‌آید.

$$EI\upsilon_{\max} = \frac{13.3^3}{3} - \frac{2\times 3.3^3}{3} - 155.6\times 13.3$$

$$\upsilon_{\max} = \frac{-1309.2}{EI}m$$

۷) معادله خیز تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۷ را تعیین نمایید.



شکل۱۳-۳۷ تیر مسئله۷

حل) با گشتاورگیری حول نقطه D داریم:

$$R_A \times 4 + 100 - 100\times 2\times 1 + 200\times 3 = 0$$

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\Rightarrow \quad R_A = -125\,N$$

همچنین با نوشتن معادله حرکت در جهت قائم داریم:

$$R_B - 125 - 100 \times 2 - 200 = 0$$

$$\Rightarrow \quad R_B = 525\,N$$

گشتاور خمشی در هر مقطعی به فاصله x از A مابین D و F به صورت زیر خواهد بود:

$$M = -125x + 100[x-1]^0 - \frac{100[x-2]^2}{2} + 525[x-4] + \frac{100[x-4]^2}{2}$$

بار گسترده را تا نقطه F ادامه می‌دهیم و برای از بین بردن اثر بار اضافه شده یک بار گسترده دیگر در جهت بالا مابین D تا F اعمال می‌کنیم. با جانشانی در رابطه ۱۳-۳ داریم:

$$EI\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right) = -125x + 100[x-1]^0 - 50[x-2]^2 + 525[x-4] + 50[x-4]^2$$

$$EI\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right) = \frac{-125x^2}{2} + 100[x-1]^1 - \frac{50[x-2]^3}{3} + \frac{525[x-4]^2}{2} + \frac{50[x-4]^3}{3} + C_1$$

$$EI\upsilon = \frac{-125x^3}{6} + 50[x-1]^2 - \frac{50[x-2]^4}{12} + \frac{525[x-4]^3}{6} + \frac{50[x-4]^4}{12} + C_1x + C_2$$

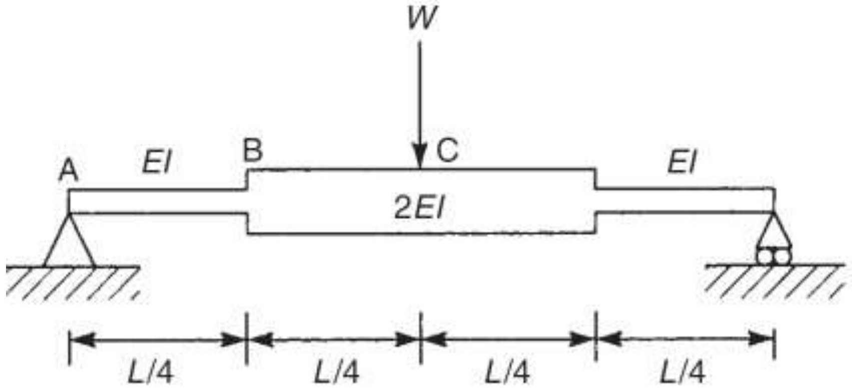
در $x = 0$، $\upsilon = 0$ خواهد بود، بنابراین $C_2 = 0$. همچنین در $x = 4m$، $\upsilon = 0$ خواهد بود، بنابراین $C_1 = 237.5$ خواهد بود. بنابراین منحنی خیز تیر به صورت زیر خواهد بود:

$$\upsilon = \frac{1}{EI}\left(\frac{-125x^3}{6} + 50[x-1]^2 - \frac{50[x-2]^4}{12} + \frac{525[x-4]^3}{6} + \frac{50[x-4]^4}{12} + 237.5x\right)$$

۸) تیر نشان داده شده در شکل۱۳-۳۸ را در نظر بگیرید. سختی خمشی قسمت وسطی تیر دو برابر قسمت‌های بیرونی آن است. با استفاده از روش گشتاور سطح مقدار خیز تیر را تعیین نمایید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۳-۳۸ تیر مسئله ۸

حل) با توجه به شکل فوق و با انتخاب مبداء x در A، رابطه ۱۳-۱۰ برای قسمت AC تیر به صورت زیر خواهد شد:

$$x_C\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_C - x_A\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)_A - (\upsilon_C - \upsilon_A) = \int_A^C \left(\frac{M}{EI}x\right)dx \quad \text{الف}$$

با استفاده از تقارن تیر، مقدار شیب در C صفر می‌باشد. همچنین مختصات A صفر است. مقدار گشتاور خمشی تیر در هر نقطه‌ای از آن مابین A تا C برابر $(W/2)x$ می‌باشد. بنابراین رابطه (الف) به صورت زیر ساده خواهد شد.

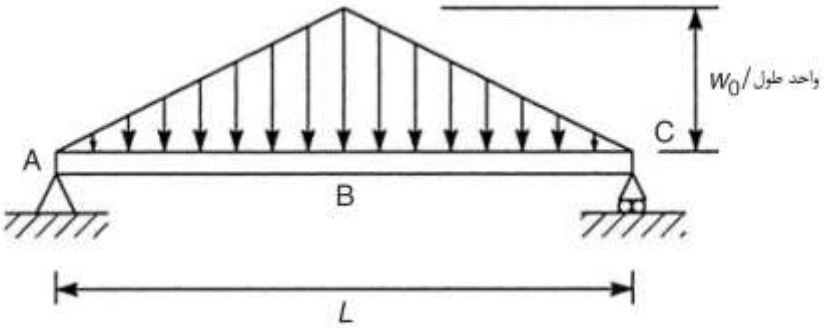
$$-\upsilon_C = \int_A^C \left(\frac{Wx}{2EI}\right)dx = \int_0^{L/4}\left(\frac{Wx^2}{2EI}\right)dx + \int_{L/4}^{L/2}\left(\frac{Wx^2}{4EI}\right)dx$$

$$\Rightarrow -\upsilon_C = \left(\frac{W}{2EI}\right)\left\{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{L/4} + \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{x^3}{3}\right]_{L/4}^{L/2}\right\}$$

$$\Rightarrow -\upsilon_C = \frac{-3WL^3}{256EI}$$

۹) تیر شکل ۱۳-۳۹ با تکیه‌گاه‌های ساده و سختی خمشی EI، تحت یک بار گسترده مثلثی شکل بر روی آن قرار دارد. مقدار خیز تیر را در وسط تیر تعیین نمایید.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل۱۳-۳۹ تیر مسئله ۹

حل) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاهی هر یک از تکیه‌گاه‌ها برابر $w_0L/4$ و مقدار شدت بار در هر مقطعی x از تیر از A تا B برابر $2w_0x/L$ است. مقدار گشتاور خمشی در هر مقطعی از تیر برابر $M = w_0\left[(L/4)x - x^3/3L\right]$ می‌باشد. با استفاده از تقارن مقدار شیب تیر در B صفر می‌باشد. بنابراین رابطه۱۳-۱۰ به صورت زیر کاهش می‌یابد:

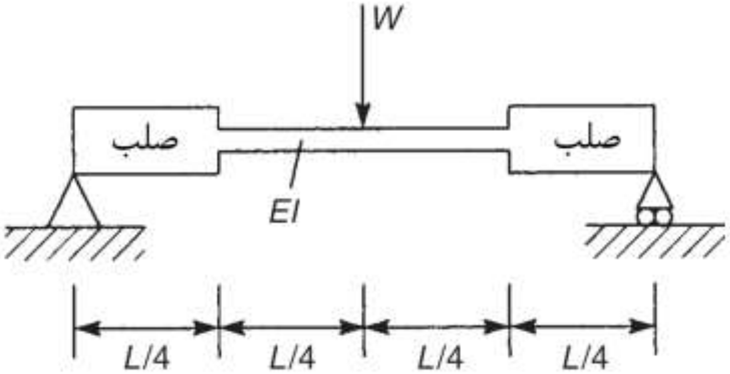
$$-\upsilon_B = \left(\frac{1}{EI}\right)\int_0^{L/2} w_0\left[\frac{Lx^2}{4} - \frac{x^4}{3L}\right]dx$$

$$-\upsilon_B = \left(\frac{w_0}{EI}\right)\left[\frac{Lx^3}{12} - \frac{x^5}{15L}\right]_0^{L/2}$$

بنابراین

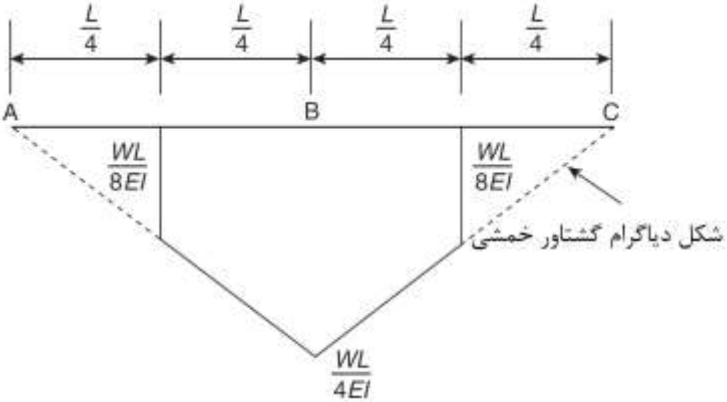
$$\upsilon_B = \frac{-w_0L^4}{120EI}$$

۱۰) تیر دو سر ساده نشان داده شده در شکل۱۳-۴۰ را در نظر بگیرید که قسمت‌های بیرونی تیر دارای سختی زیاد می‌باشد و می‌توان این قسمت‌ها را به صورت صلب در نظر گرفت. مقدار خیز تیر در وسط آن را تعیین نمایید.



شکل۱۳-۴۰ تیر مسئله ۱۰

حل) از آنجایی که سختی خمشی EI قسمت بیرونی تیر بینهایت است، بنابراین مقدار M/EI برای این قسمت از تیر برابر صفر خواهد بود. دیاگرام M/EI تیر در شکل۱۳-۴۱ نشان داده شده است.



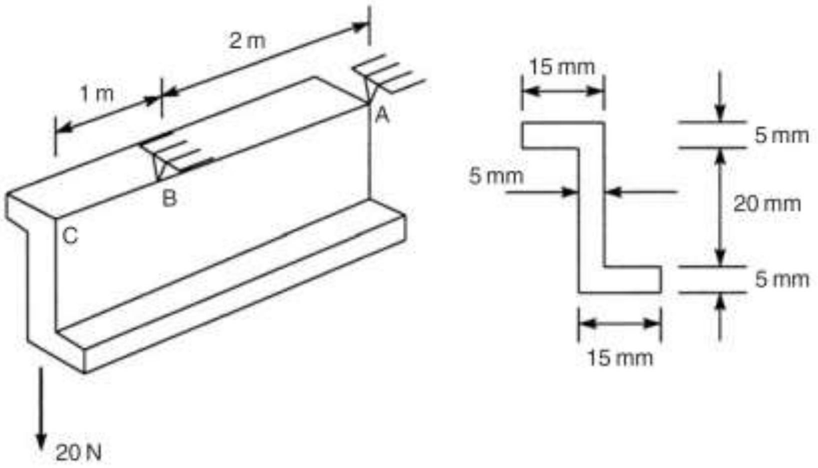
شکل۱۳-۴۱ دیاگرام گشتاور خمشی

از بخش۱۳-۳ مقدار خیز در B برابر با منفی گشتاور خمشی سطح دیاگرام M/EI بین A و B حول A است.

$$\upsilon_B = -\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{WL}{8}\right)\left(\frac{3L}{8}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\left(\frac{WL}{8}\right)\left[\left(\frac{L}{4}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{L}{4}\right)\right]$$

$$\upsilon_B = \frac{-7WL^4}{384EI}$$

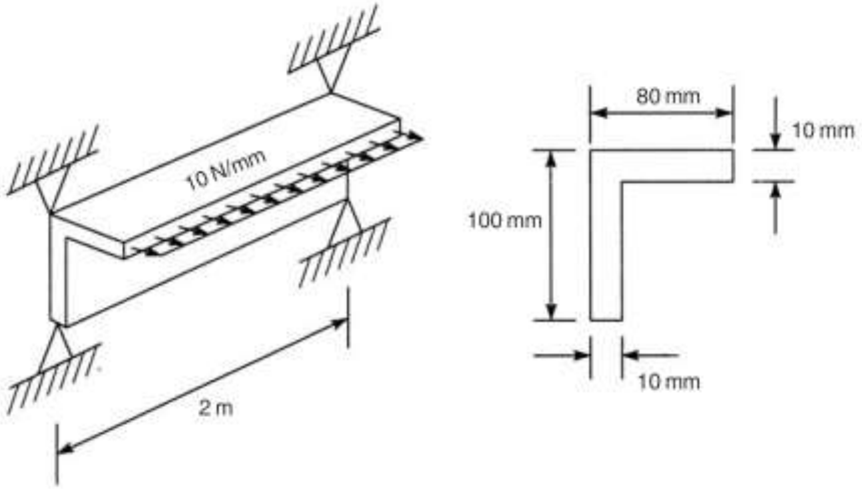
۱۱) مقدار مولفه جابجایی قائم و افقی تیر نشان داده شده در شکل۱۳-٤۲ که متکی به دو تکیه‌گاه ساده در نقاط A و B می‌باشد و دارای مقطع Z شکل می‌باشد را تعیین نمایید. فرض کنید $E=200000N/mm^2$ باشد.



شکل۱۳-٤۲ تیر مسئله ۱۱

جواب: $u=2.45mm$ به سمت راست و $\upsilon=1.75mm$ به سمت پایین

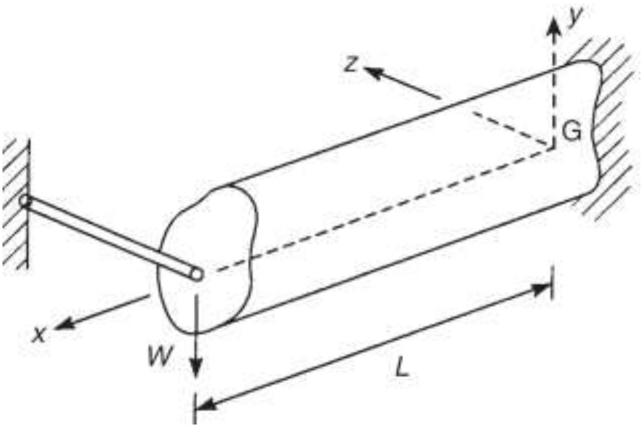
۱۲) تیر دو سر ساده نشان داده شده در شکل۱۳-٤۳ تحت یک بار گسترده قرار گرفته است که در صفحه افقی بر آن اثر می‌کند. مقدار شدت بار اعمال شده برابر *10kN/mm* می‌باشد. مقدار $I_z=1.67\times10^6mm^4$ ،$I_y=0.95\times10^6mm^4$ و $I_{zy}=-0.75\times10^6mm^4$ می‌باشد. مقدار و جهت خیز در وسط تیر را تعیین نمایید. فرض کنید $E=70000N/mm^2$ باشد.



شکل۱۳-۴۳ تیر مسئله ۱۲

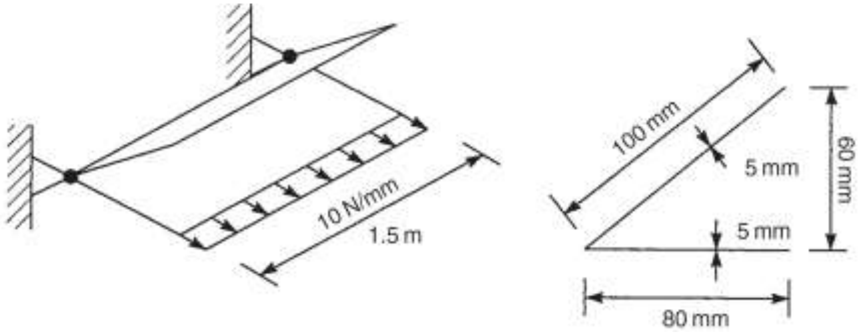
جواب: $52.3mm$ در 23.9° زیر صفحه افقی

۱۳) یک تیر طره‌ای به مقطع دلخواه و به طول L، دارای گشتاور دوم سطح I_x، I_y و I_{xy} مانند شکل۱۳-۴۴ می‌باشد. یک بار W در ابتدای تیر اعمال می‌شود. همچنین ابتدای تیر به یک میله افقی مفصل شده است که برای خیز تیر محدودیت ایجاد می‌کند. فرض کنید که میله رابط به صورت صلب می‌باشد و اثر پیچشی بر تیر ندارد. مقدار نیروی ایجاد شده در تیر رابط و خیز در ابتدای تیر را تعیین نمایید.



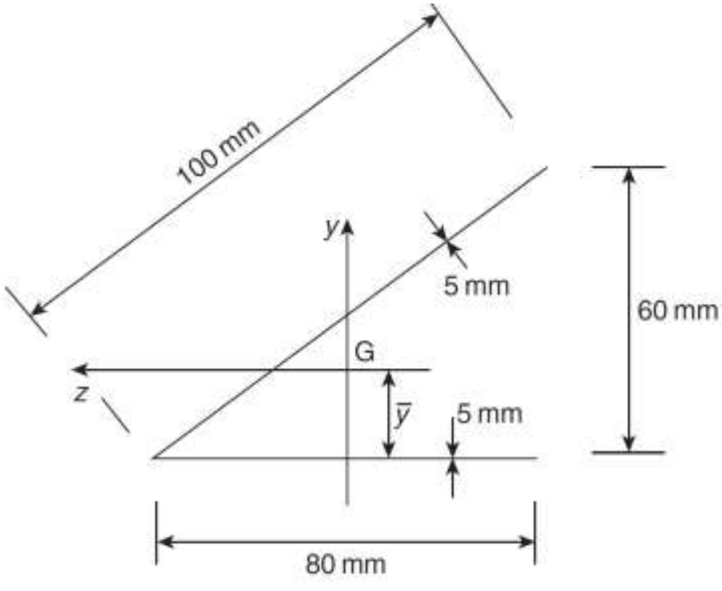
شکل۱۳-۴۴ تیر مسئله ۱۳

۱۴) تیر دو سر ساده با جداره نازک مانند شکل ۱۳-۴۴ تحت اثر یک بار گسترده یکنواخت در صفحه افقی و بر روی بال پایینی خود قرار گرفته است. مقدار خیز افقی و قائم در وسط تیر را تعیین نمایید.مقدار $E=200000N/mm^2$ فرض شود.



شکل۱۳-۴۵ تیر مسئله ۱۴

حل) با توجه به شکل مقطع تیر، مرکز ثقل تیر به اندازه ۴۰ میلیمتر از محل برخورد بال‌های تیر است. شکل۱۳-۴۶ مقطع تیر را نشان می‌دهد. با گرفتن گشتاور سطح حول بال افقی داریم:



شکل۱۳-۴۶ مقطع تیر مسئله ۱۴

$$(5\times100+5\times80)\bar{y}=5\times100\times30 \quad\Rightarrow\quad \bar{y}=16.7mm$$

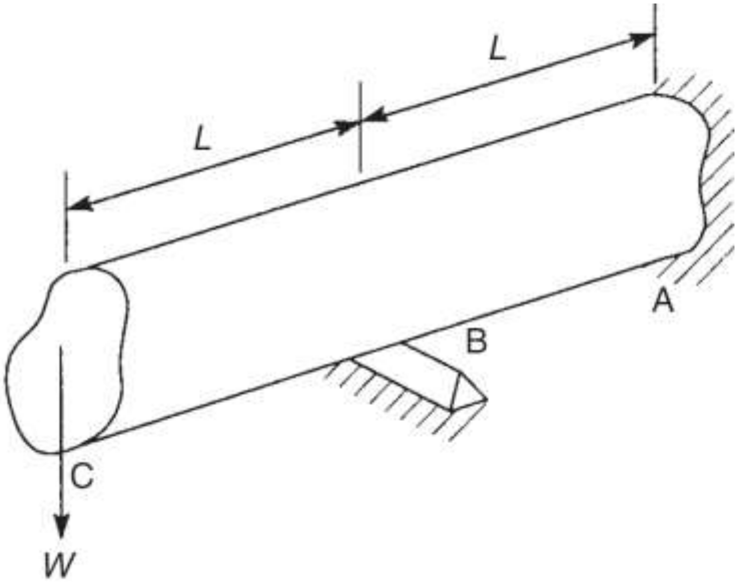
$$I_z = 5\times 80\times 16.7^2 + 100^3\times 5\times \frac{\left(\frac{60}{100}\right)^2}{12} + 100\times 5\times (13.3)^2$$
$$= 0.35\times 10^6 mm^4$$

$$I_y = \frac{5\times 80^3}{12} + 100^3\times 5\times \frac{\left(\frac{80}{100}\right)^2}{12} = 0.48\times 10^6 mm^4$$

$$I_{zy} = 100^3\times 5\times \frac{\left(\frac{60}{100}\right)\left(\frac{80}{100}\right)}{12} = 0.2\times 10^6 mm^4$$

$$u_{\text{mid-span}} = -9.0mm \quad , \quad \upsilon_{\text{mid-span}} = 5.2mm$$

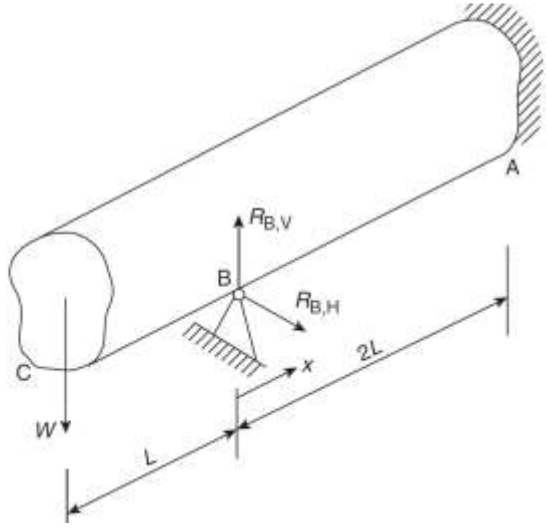
۱۵) تیر با مقطع غیر متقارن و دلخواه نشان داده در شکل۱۳-۴۷ که دارای طول $2L$ می‌باشد و در یک انتها گیردار و در وسط دهانه توسط یک تکیه‌گاه غلتکی حرکت قائم آن مقید شده را در نظر بگرید. مقدار عکس‌العمل قائم تیر را تعیین نمایید.



شکل۱۳-۴۷ تیر مسئله ۱۵

حل) با مقایسه روابط ۱۳-۱۴ و ۱۳-۳ و مشتق‌گیری از رابطه ۱۳-۱۰ داریم:

$$x_B\left(\frac{du}{dx}\right)_B - x_A\left(\frac{du}{dx}\right)_A - (u_B - u_A) = \frac{1}{E\left(I_z I_y - I_{zy}^2\right)}\int_A^B \left(M_y I_z - M_z I_{zy}\right) x\,dx$$ الف



شکل۱۳-۴۸ دیاگرام جسم آزاد تیر

با توجه به شکل۱۳-۴۸ مختصات نقطهB در جهت محور x و شیب تیر در نقطه A و همچنین خیز تیر در A و B صفر می‌باشد.

$$M_z = -W(L+x) + R_{B,V}x$$

$$M_y = -R_{B,H}x$$

رابطه (الف) به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$0 = \int_0^{2L} \left[-R_{B,H}xI_z + WI_{zy}(L+x) - R_{B,V}I_{zy}x\right] x\,dx$$

$$0 = 4R_{B,H}I_{zy} - 7WI_{zy} - 4R_{B,V}I_{zy}$$ ب

همچنین با استفاده از رابطه (الف) در شکل۱۳-۴۸ داریم:

$$0 = 4R_{B,H}I_{zy} - 7WI_y + 4R_{B,V}I_y$$ پ

با حل همزمان معادلات (ب) و (پ) داریم:

$$R_{B,V} = \frac{7W}{4} \quad , \quad R_{B,H} = 0$$

۱٦) یک تیر طره‌ای به طول $3L$ و گشتاورهای سطح I_z، I_y و I_{zy} را در نظر بگیرید. در صورتی که این تیر در فاصله $2L$ از تکیه‌گاه گیردار خود توسط یک تکیه‌گاه ساده از حرکت افقی و قائم آن جلوگیری شده باشد و یک بار متمرکز W در انتهای آزاد آن اعمال گردد، مقدار عکس‌العمل قائم تیر را تعیین نموده و همچنین ثابت کنید که مقدار عکس‌العمل افقی تیر برابر صفر است.

جواب: $\frac{7W}{4}$

۱۷) مقدار خیز در وسط یک تیر به علت برش با مقطع مربع مستطیل و به عرض B و عمق D که تحت یک بار متمرکز (جهت بار از بالا به پایین) به اندازه W که در وسط تیر اثر می‌کند را تعیین نمایید. مدول برشی تیر برابر G می‌باشد.

حل) مقدار برش در هر نیمه تیر به سبب بار متمرکز W ثابت و برابر $W/2$ می‌باشد. با استفاده از رابطه۱۳-۲۲ و با توجه به مثال۱۳-۱۷ مقدار $\beta = 6/5$ خواهد بود و خیز در نقطه وسط به سبب برش به صورت زیر خواهد بود:

$$\upsilon_s = \frac{6}{5G}\int_0^{L/2}\left(\frac{W}{2BD}\right)dx$$

$$\upsilon_s = \frac{3WL}{10GBD}$$

۱۸) مقدار خیز یک تیر طره‌ای به طول L با مقطع مستطیلی شکل به ابعاد $B \times D$ که تحت یک بار گسترده به شدت w می‌باشد را تعیین نمایید. مدول برشی تیر G می‌باشد.

حل) مقدار نیروی برشی در هر مقطعی از تیر به فاصله x از انتهای آزاد آن برابر wx می‌باشد. با جایگذاری در رابطه ۱۳-۲۲ داریم:

$$\upsilon_s = \frac{6}{5GBD}\int_0^{L} wx\,dx$$

$$\upsilon_s = \frac{3WL^2}{5GBD}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل چهاردهم
ترکیب تنش و کرنش

مقدمه

در فصل‌های ۷ ، ۹ ، ۱۰ و ۱۱ توزیع تنش‌های ناشی از بارهای محوری، لنگر خمشی، نیروی برشی و پیچش به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفت. با این وجود، در بسیاری از شرایط واقعی و عملی، قسمتی یا تمام این سیستم‌های نیرو به صورت همزمان عمل می‌کنند، به گونه‌ای که عضو تحت ترکیبی از تنش‌های مختلف قرار می‌گیرد و هر دو تنش برشی و نرمال بر سطح مقطع عضو اثر می‌نمایند.
در چنین مواردی پیش بینی نوع شکست و گسیختگی عضو سازه‌ای دیگر یک موضوع ساده نیست، همانطور که خواهیم دید به ویژه هنگامی که تنش‌های برشی و نرمال در یک نقطه ناشی از خمش و پیچش مرکب هستند لزوماً بیشینه مقادیر تنش‌های نرمال و برشی در آن نقطه نیستند. بنابراین به عنوان مقدمه و آغازی بر جستار در نظریه شکست و گسیختگی الاستیک در بخش۱۴-۱۰ ما حالت‌های تنش و کرنش در نقاط اعضای سازه‌ای تحت اثر سیستم های بارگذاری مرکب را بررسی می‌نماییم.

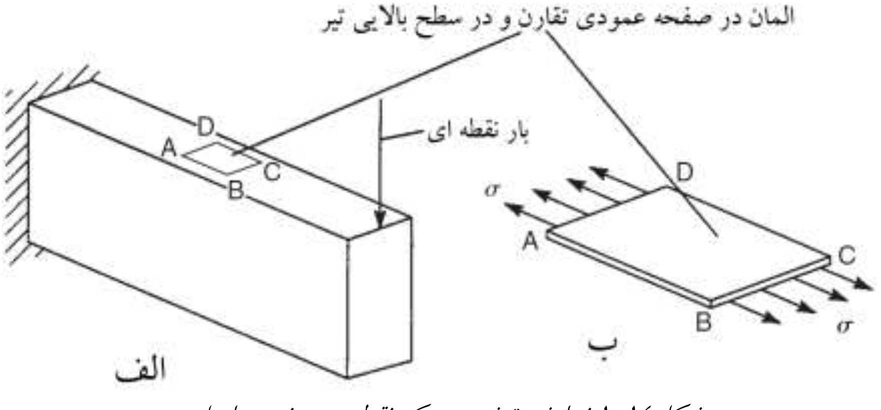
۱۴-۱ نمایش تنش در یک نقطه

ما دیده‌ایم که به صورت عمده توزیع تنش در اعضای سازه‌ای در طول عضو متغیر است. به عنوان مثال تنش نرمال (محوری) در یک تیر طره حامل یک بار نقطه‌ای وارد شده بر انتهای آزاد آن، در طول تیر و همینطور در ارتفاع آن تغییر می‌کند.
فرض کنید می‌خواهیم موقعیت تنش را در نقطه‌ای واقع بر صفحه عمودی تقارن و بر سطح بالایی تیر و در میان دهانه آن به دست بیاوریم. تنش نرمال در این نقطه بر صفحات عمود بر محور تیر از معادله۹-۹ قابل محاسبه است. ممکن است تصور شود که این تنش در دو

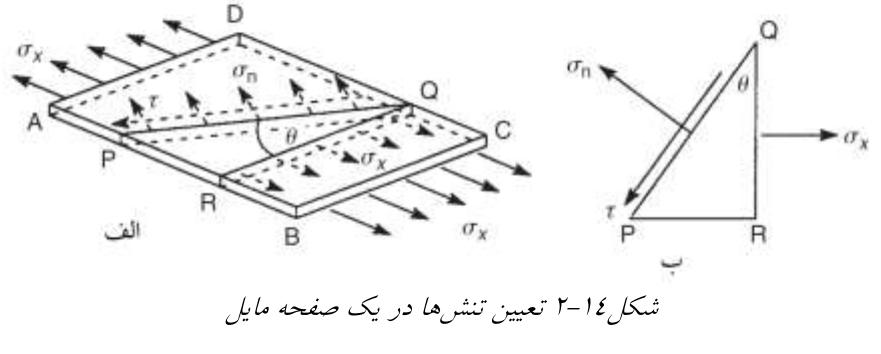
کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

جهت مخالف بر یک المان با ضخامت بسیار کم $ABCD$ در سطح تیر در آن نقطه عمل می‌کند(شکل ۱٤-۱).

به خاطر اینکه المان ضخامت بسیار کمی دارد ما می‌توانیم از تغییر تنش نرمال در راستای ضخامت آن صرف نظر کنیم. به صورت مشابهی چون ابعاد المان بسیار بسیار کوچک هستند ما می توانیم فرض کنیم σ در طول این ابعاد یکسان است. (در این یک مورد خاص σ در عرض تیر ثابت است اما این استدلال در غیر این حالت نیز به کار می رود). بنابراین ما تنش در یک نقطه از عضو سازه‌ای را با سیستم تنش وارد بر اضلاع و در صفحه یک المان بسیار نازک و با ابعاد کوچک نمایش می‌دهیم. چنین المانی با عنوان المان دو بعدی شناخته می‌شود و سیستم تنش، سیستم تنش مسطح است. همانطور که در بخش ۷-۱۱ مورد بررسی قرار گرفت.



شکل۱٤-۱ نمایش تنش در یک نقطه در عضو سازه‌ای



شکل۱٤-۲ تعیین تنش‌ها در یک صفحه مایل

۱۴-۲ تعیین تنش ها در صفحات مایل

فرض کنید می‌خواهیم تنش‌های برشی و مستقیم را در همان نقطه تیر طره شکل۱۴-۱ اما در صفحه PQ مایل شده با زاویه‌ای نسبت به محور تیر همانند شکل۱۴-۲الف تعیین کنیم. تنش نرمال در اضلاع AD وBC المان $ABCD$ برابر با σ_x و مطابق با علامت قراردادی اختیار شده در قبل است.

قسمت مثلثی PQR المان $ABCD$ را در نظر بگیرید که QR موازی اضلاع AD و BC است. بر روی ضلع QR تنش نرمالی وجود دارد که به خاطر عدم تغییر تنش نرمال در صفحات موازی با QR در دو ضلع مقابل المان، مقدارش باید همان مقدار σ_x باشد. در ضلع PQ المان مثلثی فرض کنید تنش نرمال برابر σ_n و تنش برشی برابر τ باشد. هرچند تنش‌ها به صورت یکنواخت در اضلاع المان توزیع شده‌اند اما راحت‌تر است تا آنها را با تک پیکان‌هایی همانطور که در شکل۱۴-۲ب نمایش داده شده است نمایش دهیم.

المان مثلثی PQR در تعادلی تحت اثر نیروهای مربوط به تنش های σ_x، σ_nو τ است. بنابراین با بررسی تعادل نیروها در راستایی عمود بر PQ و با فرض اینکه المان دارای ضخامت واحد است خواهیم داشت:

$$\sigma_n PQ = \sigma_x QR\cos\theta$$

یا

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{QR\cos\theta}{PQ}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta \qquad (۱۴-۱)$$

برای نیروهای موازی با PQ داریم:

$$\tau PQ = \sigma_x QR\sin\theta$$

که:

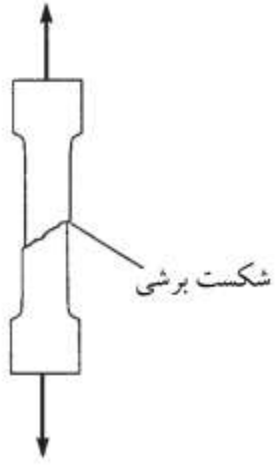
$$\tau = \sigma_x \cos\theta \sin\theta$$

یا

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2}\sin 2\theta \qquad (۱۴-۲)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در روابط۱۴-۱ و ۱۴-۲ می‌بینیم که هر چند، بار اعمال شده، تنش‌های نرمال را بر صفحات عمود بر محور تیر القا می‌کند، اما تنش برشی و نرمال در صفحات مایل نسبت به محور تیر وجود دارند. همچنین از معادله۱۴-۲ می‌توان دریافت که تنش برشی τ هنگامی بیشینه است که $\theta = 45^\circ$ باشد. این بحث مدل شکست در مصالح نرم و غیر ترد تحت اثر کشش ساده و سایر مصالح مانند چوب را تحت فشار توضیح می‌دهد. به عنوان مثال قطعه آزمایشی تسمه مانند از جنس آلیاژ آلومینیوم در یک کشش ساده در طول خطی با زاویه حدود ۴۵ درجه نسبت به محور بارگذاری همانند آنچه در شکل۱۴-۳ نشان داده شده است گسیخته می‌شود.



شکل۱۴-۳ مدل شکست در قطعه آزمایش از جنس آلیاژ آلومینیوم

این امر بیان می‌کند که ساختمان کریستالی و بلوری فلز در برابر برش نسبتاً ضعیف است و به نظر می‌رسد این شکست و گسیختگی بر اثر لغزیدن یک صفحه بلوری بر صفحه‌ای دیگر، برای جلوگیری از قطعه قطعه شدن دو صفحه بلوری به وجود آمده است. بنابراین گسیختگی، یک گسیختگی برشی است هر چند قطعه آزمایشی تحت کشش ساده است.

سیستم تنش دو محوری

سیستم‌های تنش پیچیده‌تر ممکن است بر اثر سیستم‌های بارگذاری همانند آنچه در شکل۱۴-۴ نشان داده شده است تولید شوند که در آن یک استوانه توخالی با دیواره نازک، تحت اثر یک فشار داخلیp قرار دارد. فشار داخلی، تنش‌های محیطی یا حلقوی σ_y

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

(دایروی) را بر صفحات موازی محور استوانه القا می‌کند که در رابطه ۷-۶۳ مقادیر آنها داده شده است. همینطور مقادیر تنش‌های طولی σ_x بر صفحات عمود بر محور استوانه (در رابطه۷-۶۲) داده شده است. بدین ترتیب هر المان دو بعدی دارای ضخامت واحد در دیواره‌های استوانه و دارای اضلاع عمود و موازی با محور استوانه از تحت تنش دو محوری برخوردار است، همانند آنچه در شکل۱٤-٤ نمایش داده شده است. در این مورد خاص σ_x و σ_y دارای مقادیر ثابت صرف نظر از مکان المان هستند.

حال تعادل قسمت مثلثی ABC المان را همانند آنچه در شکل۱٤-۵ نشان داده شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم. با حل نیروها در راستای عمود بر AB خواهیم داشت:

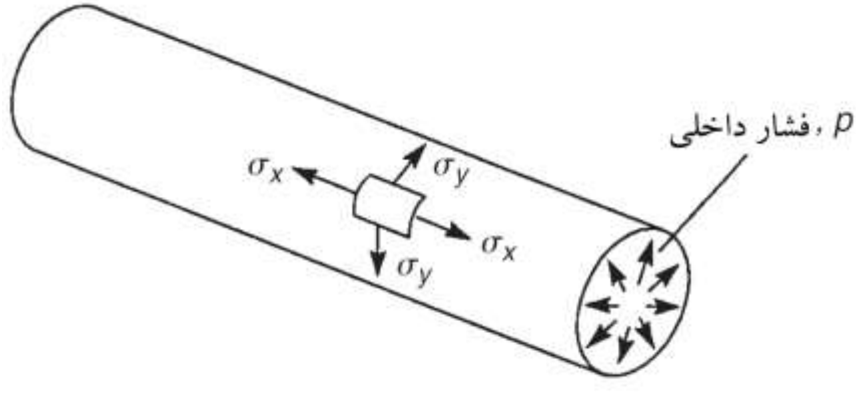
$$\sigma_n AB = \sigma_x BC\cos\theta + \sigma_y AC\sin\theta$$

یا

$$\sigma_n = \sigma_x \frac{BC}{AB}\cos\theta + \sigma_y \frac{AC}{AB}\sin\theta$$

که خواهیم داشت:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta \qquad (۱٤-۳)$$



شکل۱٤-٤ تولید تنش دو محوره

با حل برای نیروهای موازی AB خواهیم داشت:

$$\tau AB = \sigma_x BC\sin\theta - \sigma_y AC\cos\theta$$

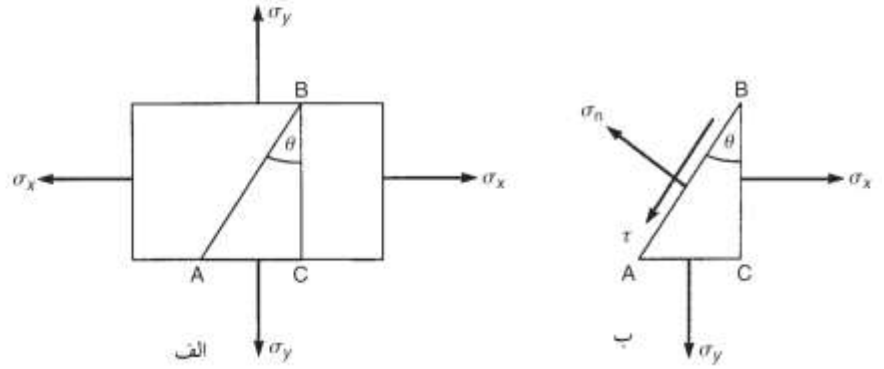
یا

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\tau = \sigma_x \frac{BC}{AB}\sin\theta - \sigma_y \frac{AC}{AB}\cos\theta$$

بنابراین:

$$\tau = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta \qquad (٤-١٤)$$



شکل١٤-٥ تعیین تنش‌ها در یک صفحه مایل تحت سیستم تنش دو محوری

دوباره می‌بینیم که هر چند بارهای اعمال شده تنها تنش‌های نرمال بر صفحات عمود و موازی با محور استوانه تولید می‌کنند، هر دو تنش برشی و نرمال در صفحات مایل وجود دارند. علاوه بر این، برای مقادیر معین σ_x و σ_y (یعنی p) تنش برشی τ در صفحه مایل با زاویه ٤٥ درجه با محور استوانه دارای بیشترین مقدار است.

مثال١٤-١) یک مجرای فشاری استوانه‌ای دارای قطر داخلی ٢ متر، ساخته شده از ورق‌هایی با ضخامت ٢٠ میلی متر است. اگر فشار داخل این مجرا $1.5\ N/mm^2$ باشد و علاوه بر این، مجرا در معرض بار کششی محوری ٢٥٠٠ کیلونیوتن قرار گرفته است. تنش‌های نرمال و برشی را در صفحه مایل با زاویه ٦٠ درجه نسبت به محور استوانه و همینطور بیشترین مقدار مقاومت برشی را محاسبه نمایید.

حل) از رابطه٧-٦٣ تنش جانبی برابر است با:

$$\frac{pd}{2t} = \frac{1.5\times 2\times 10^3}{2\times 20} = 75\frac{N}{mm^2}$$

از رابطه٧-٦٢ تنش طولی برابر می‌شود با:

$$\frac{pd}{4t} = 37.5\frac{N}{mm^2}$$

تنش نرمال ناشی از بار محوری از رابطه۷–۱ برابر است با:

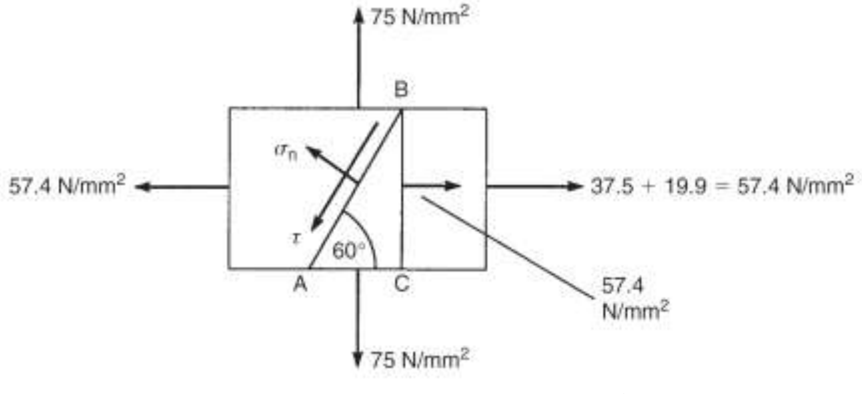
$$\frac{2500\times10^3}{\pi\times2000\times20}=19.9\frac{N}{mm^2}$$

بنابراین در یک المان مستطیلی در هر نقطه از دیواره مجرا، یک سیستم تنش دو محوری همانند آنچه در شکل١٤–٦ نشان داده شده است وجود دارد. هم اکنون با توجه به تعادل المان مثلثی ABC و حل نیروهای عمود در AB خواهیم داشت:

$$\sigma_n AB\times20=57.4BC\times20\cos30^\circ+75AC\times20\cos60^\circ$$

از آنجایی که دیواره های مجرا نازک هستند ضخامت المان دو بعدی را می توان ۲۰ میلی متر در نظر گرفت . با این وجود، همانطور که می‌توان دید ، وجود ضخامت، معادله بالا را حذف می‌کند، ساده‌تر است که در تمامی بررسی‌ها ضخامت واحد را برای المان دو بعدی در نظر بگیریم. بنابراین:

$$\sigma_n=57.4\cos^2 30^\circ+75\cos^2 60^\circ$$



شکل١٤–٦ سیستم دو محوری مثال١٤–١

که به صور ت زیر بدست خواهد آمد:

$$\sigma_n=61.8\frac{N}{mm^2}$$

با حل برای نیروی موازی AB خواهیم داشت:

$$\tau AB=57.4BC\cos60^\circ-75AC\sin60^\circ$$

یا

$$\tau=57.4\sin60^\circ\cos60^\circ-75\cos60^\circ\sin60^\circ$$

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

که:

$$\tau = -7.6\frac{N}{mm^2}$$

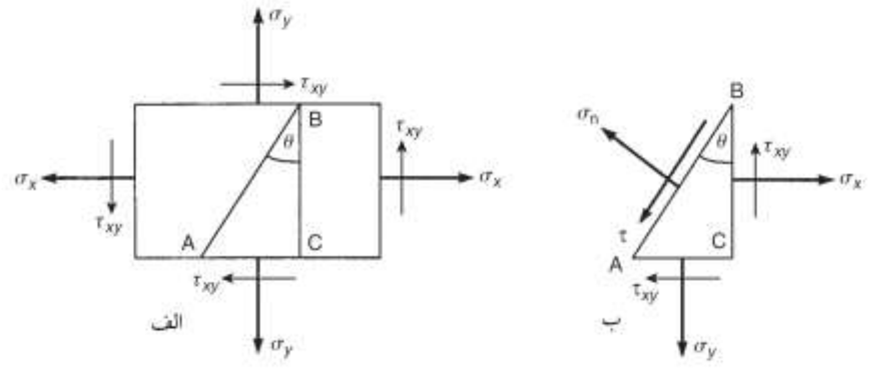
علامت منفی τ نشان می‌دهد که τ در راستای AB عمل می‌کند و نه در راستای BA که ما فرض کرده بودیم. از معادله ١٤-٤ می‌توان دریافت که تنش برشی بیشینه در صفحه با زاویه تمایل ٤٥ درجه با محور استوانه است که مقدار آن:

$$\tau_{\max} = \frac{57.4-75}{2} = -8.8\frac{N}{mm^2}$$

به همان ترتیب علامت منفی $\tau_{\max}$ نشان می‌دهد که جهت $\tau_{\max}$ مخالف چیزی بوده است که فرض شده است.

موارد دوبعدی اصلی

اگر ما در این حالت، لنگری بر استوانه شکل ١٤-٤ در جهت ساعتگرد وارد کنیم. هنگامی که از انتهای دست راست نگریسته شود، تنش‌های برشی و مکمل برشی علاوه بر تنش‌های نرمال که قبلاً وجود داشته‌اند بر اضلاع المان مستطیلی القا می‌شوند. مقادیر این تنش‌های برشی در معادله ١١-٢١ داده شده است. همانطور که در شکل ١٤-٧الف مشاهده می‌شود از آنجایی که استوانه دارای دیواره نازک است ما دارای یک سیستم اصلی تنش دو بعدی اثر کننده بر المان هستیم.



شکل ١٤-٧ سیستم تنش دو بعدی اصلی

پسوندهای به کار رفته در تنش برشی به صفحه‌ای که تنش در آن اثر می‌کند و جهت آن باز می‌گردد. مقدار τ_{xy} تنش برشی‌ای است که در صفحه x اثر می‌کند و در راستای y است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در مقابل τ_{yx} درصفحه y و در راستای x می‌باشد. با این وجود از آنجا که $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ ما هر دو مقدار تنش برشی و تنش برشی مکمل را با τ_{xy} همانند شکل١٤-٧ب نمایش می‌دهیم.

با توجه به تعادل المان مثلثی ABC در شکل١٤-٧ب و حل نیروهای در راستای عمود بر AB خواهیم داشت:

$$\sigma_n AB=\sigma_x BC\cos\theta+\sigma_y AC\sin\theta-\tau_{xy}BC\sin\theta-\tau_{xy}AC\cos\theta$$

با تقسیم بر AB و ساده سازی، خواهیم داشت:

$$\sigma_n=\sigma_x\cos^2\theta+\sigma_y\sin^2\theta-\tau_{xy}\sin 2\theta \qquad (١٤-٥)$$

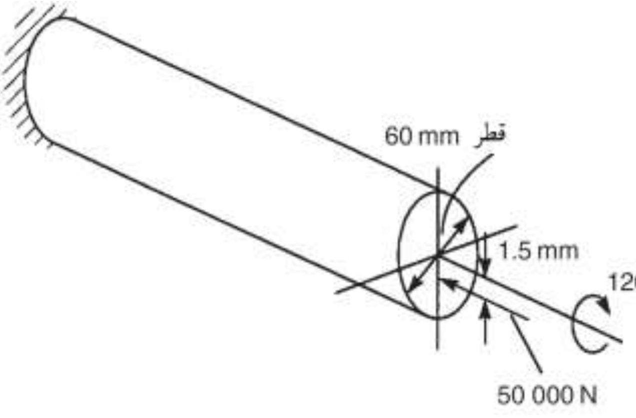
حال با حل نیروهای موازی BA خواهیم داشت:

$$\tau AB=\sigma_x BC\sin\theta-\sigma_y AC\cos\theta+\tau_{xy}BC\cos\theta-\tau_{xy}AC\sin\theta$$

مجددا با تقسیم بر AB و ساده سازی، خواهیم داشت:

$$\tau=\frac{(\sigma_x-\sigma_y)}{2}\sin 2\theta+\tau_{xy}\cos 2\theta \qquad (١٤-٦)$$

مثال١٤-٢) طره‌ای توپر و دارای مقطع دایره‌ای در شرایطی اینچنین: بار ٥٠ هزار نیوتنی اعمال شده بر انتهای آزادش در نقطه‌ای *1.5mm* پایین‌تر از قطر افقی در صفحه عمودی تقارن، همراه با گشتاور پیچشی ١٢٠٠ نیوتن متری. (شکل١٤-٨) تنش های برشی و نرمال صفحه مایل ٦٠ درجه با محور طره را در نقطه ای واقع در زیر لبه عمودی صفحه تقارن محاسبه کنید.



شکل١٤-٨ تیر طره‌ای مثال١٤-٢

حل) سیستم بارگذاری مستقیم برابر است با بار محوری *50000N* همراه با ممان خمشی $50000\times1.5=75000N$، البته در یک صفحه عمودی. بدین ترتیب در هر نقطه‌ای در لبه پایینی صفحه عمودی تقارن، تنش‌های نرمال فشاری ناشی از بار محوری و ممان خمشی وجود دارد که بر صفحه‌های متعامد با محور تیر اثر می‌کنند. این مقادیر به ترتیب در روابط ۷-۱ و ۹-۹ داده شده‌اند. بنابراین:

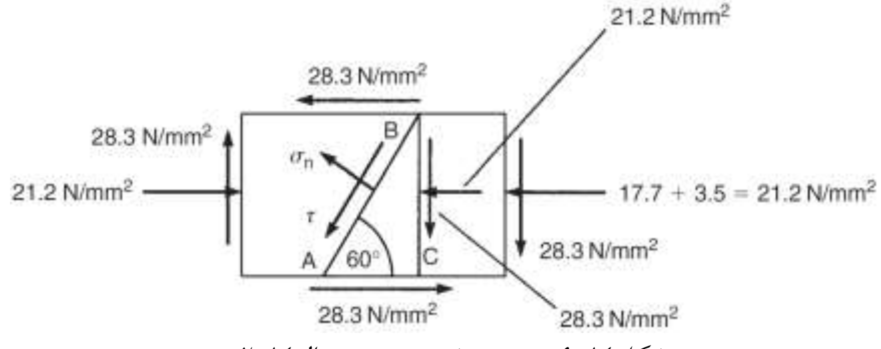
$$\sigma_x(\text{بار محوری})=\frac{50000}{\pi\times\frac{60^2}{4}}=17.7\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_x(\text{گشتاور خمشی})=\frac{75000\times30}{\pi\times\frac{60^2}{64}}=3.5\frac{N}{mm^2}$$

تنش برشی τ_{xy} در نقطه مشابهی تحت اثر لنگر از معادله ١١-٤ به دست می‌آید و برابر است با:

$$\tau_{xy}=\frac{1200\times10^3\times30}{\pi\times\frac{60^4}{32}}=28.3\frac{N}{mm^2}$$

سیستم تنش اثر کننده بر یک المان مستطیلی دو بعدی در نقطه مورد نظر به گونه‌ای است که در شکل ١٤-٩ نمایش داده شده است.



شکل ١٤-٩ سیستم تنش دو بعدی مثال ١٤-٢

باید اشاره شود که در این مورد، المان در پایین استوانه است، به صورتیکه تنش برشی در جهت مخالف شکل ١٤-٧ است. با توجه به تعادل المان مثلثی *ABC* و حل نیروها در جهت عمود بر *AB* خواهیم داشت:

$$\sigma_n AB=-21.2BC\cos30^\circ+28.3BC\sin30^\circ+28.3AC\cos30^\circ$$

با تقسیم بر AB خواهیم داشت:

$$\sigma_n = -21.2\cos^2 30^\circ + 28.3\sin 30^\circ \cos 30^\circ + 28.3\cos 30^\circ \sin 30^\circ$$

که در نتیجه داریم:

$$\sigma_n = 8.6\frac{N}{mm^2}$$

به صورت مشابه با حل برای نیروهای موازی با AB خواهیم داشت:

$$\tau AB = -21.2BC\cos 60^\circ - 28.3BC\sin 60^\circ + 28.3AC\cos 60^\circ$$

$$\tau = -21.2\sin 60^\circ \cos 60^\circ - 28.3\sin^2 60^\circ + 28.3\cos^2 60^\circ$$

$$\tau = -23\frac{N}{mm^2}$$

که در جهت AB اثر می‌کند.

۳-١٤ تنش های اصلی

روابط١٤-٥ و ١٤-٦ مقدار تنش برشی و تنش نرمال را در یک صفحه مایل در نقطه‌ای با شرایط زیر بدست می‌دهد، نقطه‌ای در عضو سازه‌ای، قرار گرفته در معرض ترکیبی از بارها که سیستم تنش دو بعدی اصلی را در آن نقطه تولید می‌کند. البته برای مقادیر مفروض σ_x، σ_y و τ_{xy}، به عبارت دیگر برای یک سیستم بارگذاری مورد نظر، مقادیر σ_n و τ با تغییر زاویه θ تغییر می‌کنند و مقدار بیشینه یا کمینه خود را هنگامی می‌یابد که $d\sigma_n / d_\theta = 0$ و $d\tau / d_\theta = 0$ باشد بنابراین از رابطه١٤-٥ خواهیم داشت:

$$\frac{d\sigma_n}{d\theta} = -2\sigma_x \cos\theta \sin\theta + 2\sigma_y \sin\theta \cos\theta - 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

و سپس خواهیم داشت:

$$-\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\sin 2\theta - 2\tau_{xy}\cos 2\theta = 0$$

یا:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad (٧-١٤)$$

دو جواب θ و $-\theta-\pi/2$ در رابطه١٤-٧ صدق می‌کنند. بنابراین دو صفحه متعامد وجود دارد که تنش نرمال در آنها بیشینه و کمینه است. علاوه بر این، با مقایسه روابط١٤-٧ و

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

١٤-٦ دیده می‌شود که این صفحه‌ها به صفحه $\tau = 0$ مربوط هستند. تنش نرمال در این صفحه‌ها تنش اصلی[1] نامیده می‌شود و صفحه‌ها، صفحه‌های اصلی[2] نامیده می‌شوند. از رابطه ١٤-٧ داریم:

$$\sin 2\theta = -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}} \qquad \cos 2\theta = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

و

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

با بازنویسی رابطه ١٤-٥ داریم:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 + \cos 2\theta) - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

و جایگزاری $\{\sin 2\theta, \cos 2\theta\}$ و $\{\sin 2(\theta + \pi/2), \cos 2(\theta + \pi/2)\}$، داریم:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4t_{xy}^2} \qquad (١٤-٨)$$

$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4t_{xy}^2} \qquad (١٤-٩)$$

که σ_I تنش بیشینه یا تنش اصلی بزرگ و σ_{II} تنش کمینه یا تنش اصلی کوچک است. مقدار σ_I از نظر جبری بزرگترین تنش نرمال در نقطه است. در حالی که σ_{II} از نظر جبری کمترین مقدار است. توجه شود که وقتی σ_{II} فشاری باشد. (یعنی منفی) ممکن است از نظر عددی مقدار σ_{II} بیش از σ_I شود. از رابطه ١٤-٦ داریم:

$$\frac{d\tau}{d\theta} = (\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - 2\tau_{xy} \sin 2\theta = 0$$

که به صورت زیر خواهد شد:

$$\tan 2\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}} \qquad (١٤-١٠)$$

خواهیم داشت:

---

[1] principal stresses
[2] Principal planes

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\sin 2\theta = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

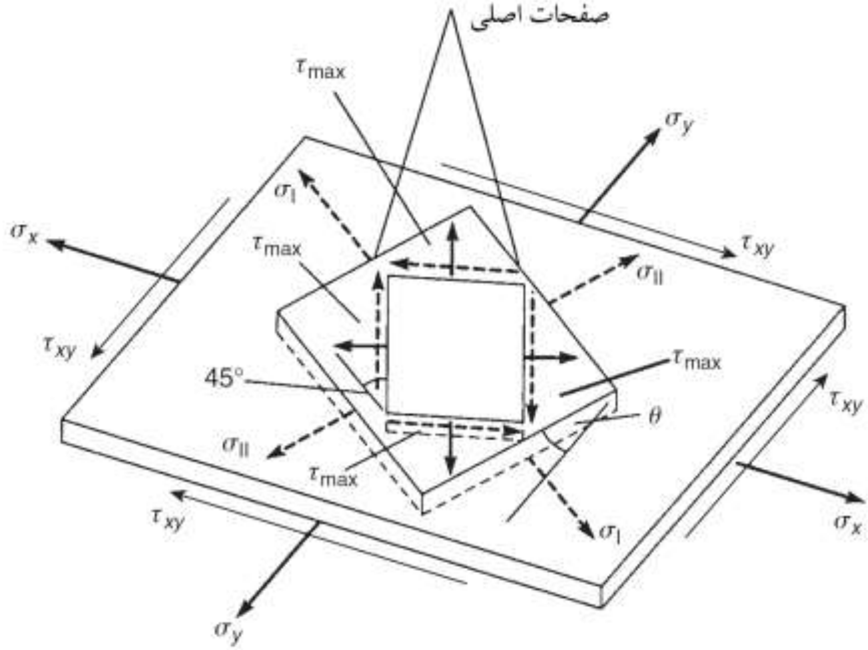
$$\cos 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

$$\cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}$$

با جانشانی این مقادیر در رابطه۱۴–۶ داریم:

$$\tau_{\max,\min} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \qquad (۱۱-۱۴)$$



شکل۱۴–۱۰ تنش‌های اثرکننده بر صفحات متفاوت در یک نقطه خاص در عضو سازه‌ای

در اینجا، به خاطر اصلی بودن تنش‌ها ما بیشترین مقدار را، مقداری انتخاب می‌کنیم که از نظر جبری بزرگتر باشد. با مقایسه روابط۱۴–۱۱ باروابط۱۴–۸ و ۱۴–۹ درمی‌یابیم که:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \qquad (۱۲-۱۴)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

روابط ۱۴-۱۱ و ۱۴-۱۲ گزینه‌های مختلفی را برای بیشینه مقدار تنش برشی اثر کننده بر نقطه واقع بر *صفحه تنش های مفروض* به ما ارائه می‌دهد. این مقدار لزوماً بیشترین مقدار تنش برشی در یک المان سه بعدی تحت اثر سیستم تنش دو بعدی نیست. از آنجا که رابطه ۱۴-۱۰ معکوس و منفی رابطه ۱۴-۷ است، زاویه‌هایی که از این دو معادله به دست می‌آیند ۹۰ درجه با هم تفاوت دارند، به گونه‌ای که صفحات بیشینه تنش برشی با صفحات اصلی زاویه ۴۵ درجه می‌سازند. مشاهده می‌کنیم که تنش های عمودی σ_x و σ_y و تنش‌های برشی τ_{xy} در حالت کلی بیشترین مقدار تنش برشی و نرمال در آن نقطه نیستند. این امر در طراحی عضوهای سازه‌ای تحت اثر سیستم‌های بارگذاری مرکب بسیار حائز اهمیت است. همانطور که در بخش۱۳-۱۰ می‌بینیم ما می‌توانیم تنش های اثر کننده بر صفحات مختلف در نقطه مورد نظر را با مجموعه‌ای از المان‌ها در آن نقطه شرح بدهیم، که این موضوع در شکل۱۴-۱۰ نشان داده شده است.

مثال۱۴-۳) یک عضو سازه ای بارهایی را تحمل می‌کند که تولید تنش کششی نرمال $80\ N/mm^2$ و تنش برشی $45\ N/mm^2$ در صفحه‌ای یکسان و در یک نقطه خاص می‌شوند. مقادیر و جهت تنش‌های اصلی را در آن نقطه و همینطور بیشینه تنش برشی را به دست آورید و بگویید که این تنش در کدام صفحه عمل خواهد کرد.

حل) فرض کنیم که تنش کششی $80\ N/mm^2$ در راستای x اثر کند. بنابراین σ_x برابر $+80\ N/mm^2$ ، $\sigma_y = 0$ و $\tau_{xy} = 45N/mm^2$ خواهد بود، با جانشانی این مقادیر در معادلات ۱۴-۸ و ۱۴-۹ به ترتیب خواهیم داشت:

$$\sigma_I = \frac{80}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{80^2 + 4\times 45^2} = 100.2\frac{N}{mm^2}$$
$$\sigma_{II} = \frac{80}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{80^2 + 4\times 45^2} = -20.2\frac{N}{mm^2}$$

از رابطه۱۴-۷ خواهیم داشت:

$$\tan 2\theta = -\frac{2\times 45}{80} = -1.125$$

بنابراین خواهیم داشت:

$\theta = -24^\circ 11'$ مربوط به σ_I

همچنین صفحه‌ای که σ_{II} در آن اثر می‌کند دارای زاویه $\theta = -24^{\circ}11' - 90^{\circ} = -114^{\circ}11'$ خواهد بود. بیشینه تنش برشی به راحتی از رابطه۱۴-۱۲ به دست می‌آید و برابر خواهد بود با:

$$\tau_{\max} = \frac{100.2 - (-20.2)}{2} = 60.2 \frac{N}{mm^2}$$

بیشینه تنش برشی در صفحه‌ای با زاویه ۴۵ درجه نسبت به صفحه اصلی اثر می‌کند. بنابراین دو زاویه $\theta = -69^{\circ}11'$ و $\theta = -115^{\circ}11'$ صفحات بیشینه تنش برشی را به ما می‌دهند.

۱۴-۴دایره تنش موهر

وضعیت تنش در یک نقطه در یک عضو سازه‌ای را می‌توان به راحتی به صورتی ترسیمی با دایره تنش موهر[1] نمایش داد. ما تنش‌های نرمال و برشی بر روی یک صفحه مایل معین را بر حسب تنش‌های وارده شناخته شده به صورت زیر نشان داده‌ایم:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (۱۴-۵)$$

و

$$\tau = \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \qquad (۱۴-۶)$$

جهت‌های مثبت این تنش‌ها و زاویه θ به ترتیب در شکل نشان داده شده اند. حال رابطه۱۴-۵ را به صورت زیر بازنویسی می‌نماییم:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\theta) + \frac{\sigma_y}{2}(1 - \cos 2\theta) - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

یا

$$\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \qquad (۱۴-۱۳)$$

حال با مربع کردن و جمع روابط۱۴-۳ و ۱۴-۶ داریم:

$$\left[\sigma_n - \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau^2 = \left[\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y)\right]^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (۱۴-۱۴)$$

رابطه۱۴-۱۴ معادله دایره‌ای با شعاع زیر را به ما نشان می‌دهد:

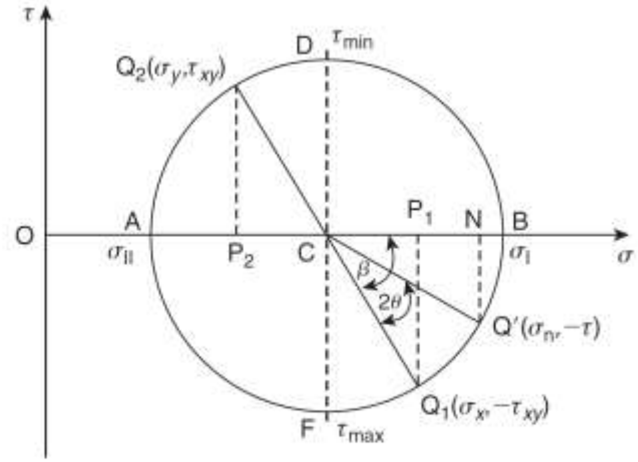
---

[1] Mohr's circle of stress

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}$$

که مرکز دایره $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$ می‌باشد.



شکل١٤-١١ دایره تنش موهر

می‌توان دایره را با رسم نقاط $Q_1\left(\sigma_x,-\tau_{xy}\right)$ و $Q_2\left(\sigma_y,+\tau_{xy}\right)$ مانند شکل١٤-١١ ترسیم نمود. خط Q_1Q_2 محور $O\sigma$ را در C قطع می‌کند.

$$OC=OP_1-CP_1=\sigma_x-\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}$$

و با مخرج مشترک خواهیم داشت:

$$OC=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$$

بنابراین نقطه C دارای مختصات $\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2},0\right)$ خواهد بود، همانطور که می‌بینیم این نقطه مرکز دایره است، همچنین:

$$CQ_1=\sqrt{CP_1^2+P_1Q_1^2}=\sqrt{\left[\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right]^2+\tau_{xy}^2}$$

که در نتیجه خواهیم داشت:

$$CQ_1=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

که این مقدار شعاع دایره است و دایره همانگونه که در شکل‌١٤-١١ نشان داده شده است رسم می‌شود. حال ما CQ' را با زاویه 2θ (پادساعتگرد) نسبت به CQ_1 رسم می‌کنیم. نقطه Q' دارای مختصات $(\sigma_n,-\tau)$ خواهد بود. از شکل‌١٤-١١ مشاهده می‌کنیم که:

$$ON = OC + CN$$

همچنین از آنجایی که $OC = (\sigma_x + \sigma_y)/2$، $CN = CQ'\cos(\beta - 2\theta)$ و $CQ' = CQ_1$ داریم:

$$CQ' = \frac{CP_1}{\cos\beta} \quad \text{و} \quad CP_1 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}$$

بنابراین:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\cos 2\theta + CP_1 \tan\beta \sin 2\theta$$

که اگر رابطه را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

مانند رابطه‌١٤-٥ به صورت مشابهی می‌توان اینگونه نیز نمایش داد:

$$Q'N = -\tau_{xy}\cos 2\theta - \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)\sin 2\theta = -\tau$$

مانند رابطه‌١٤-٦ باید به یاد داشته باشیم که رسم شکل‌١٤-١١ منوط به سیستم تنش شکل‌١٤-٧ب است. هر گونه تغییر علامتی باید مجاز باشد. محورهای $O\sigma$ و $O\tau$ باید در یک مقیاس رسم شوند در غیر اینصورت دایره همانند رابطه‌١٤-١٤ نخواهد بود. بیشترین و کمترین مقدار تنش عمودی σ_n که مقدار اصلی (بزرگ) و فرعی (کوچک) تنش‌های اصلی، σ_I و σ_{II} هستند، هنگامی که N و Q' بر B و A منطبق شوند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\sigma_{II} = OC + \text{شعاع دایره}$$

یعنی:

$$\sigma_I = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4t_{xy}^2}$$

و

$$\sigma_{II} = OC - \text{شعاع دایره}$$

به صورتیکه:

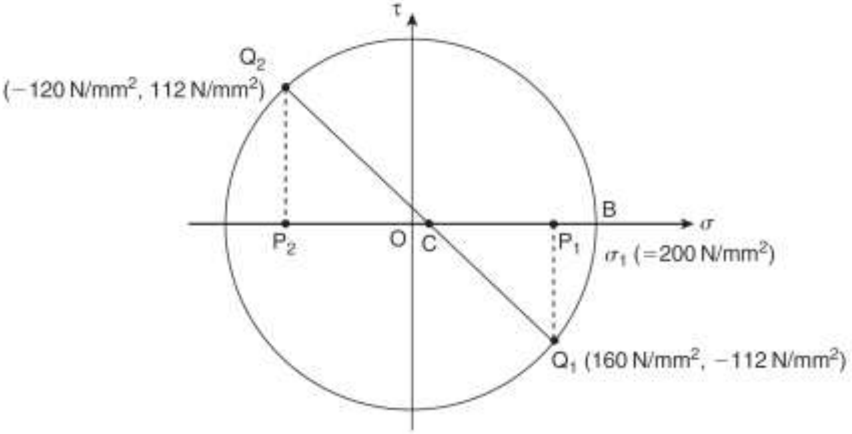
$$\sigma_{II}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4t_{xy}^2}$$

صفحات اصلی با زاویه‌های $2\theta=\beta(\sigma_1)$ و $2\theta=\beta+\pi(\sigma_{II})$ معین می‌شوند. مقدار بیشینه و کمینه تنش برشی τ هنگامی رخ می‌دهد که Q' بر F و D در مرزهای بالایی و پایینی دایره منطبق شود. در این نقاط $\tau_{\max,\min}$ به راحتی قابل محاسبه و برابر با شعاع دایره هستند، بنابراین:

$$\tau_{\max,\min}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_{xy}^2}$$

کمترین مقدار تنش برشی، کمترین مقدار از نظر جبری است. صفحات تنش برشی بیشینه و کمینه با زاویه‌های $2\theta=\beta+\pi/2$ و $2\theta=\beta+3\pi/2$ تعیین می‌شوند و دارای زاویه ٤٥ درجه نسبت به صفحات اصلی هستند.

مثال١٤-٤) تنش‌های عمودی *160 N/mm²* کششی و *120 N/mm²* فشاری بر یک نقطه خاص از یک ماده الاستیک در دو صفحه متعامد وارد می‌شوند. بیشینه تنش اصلی در ماده به مقدار *200 N/mm²* کششی محدود شده است. با استفاده از یک روش ترسیمی مقدار مجاز تنش برشی را در نقطه مورد نظر بیابید.



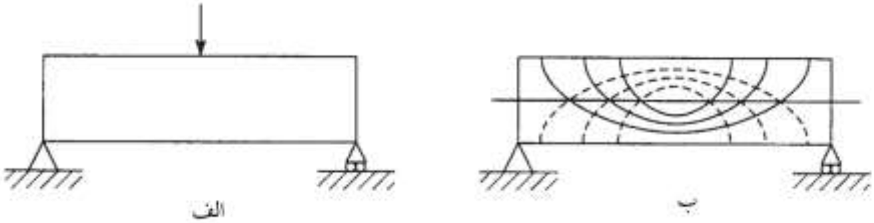
شکل١٤-١٢ دایره تنش‌های موهر برای مثال١٤-٤

در ابتدا محورهای $O\sigma\tau$ در یک مقیاس مناسب رسم می‌شوند. سپس P_1 و P_2 به ترتیب با توجه به $\sigma_x=160\ N/mm^2$ و $\sigma_y=-120\ N/mm^2$ رسم می‌شوند. مرکز دایره C مانند شکل١٤-

۱۲در نقطه میانی بین P_1 و P_2 قرار دارد. شعاع با رسم نقطه B (σ_1 برابر با $200\ N/mm^2$) به دست می‌آید و سپس دایره رسم می‌شود.

١٤-٥ مسیرهای تنش

نشان دادیم که تنش‌های برشی و عمودی چگونه در یک نقطه خاص از تیر تولید می‌شوند. طبق آنچه گفته شد با خمش و برش و با روش‌هایی که در فصل های ۹ و ۱۰ (جلد اول) مورد بحث قرار گرفته شد قابل محاسبه است و لزوماً بیشترین مقدار تنش برشی و تنش نرمال در نقطه مورد بررسی نیست. بنابراین، برای به دست آوردن تصویر کامل تری از توزیع بزرگی و راستا و سوی تنش‌ها در تیر، ما بررسی می‌کنیم که تنش‌های اصلی با چه رفتاری در طول تیر تغییر می‌کنند.



شکل١٤-١٣ مسیرهای تنش یک تیر

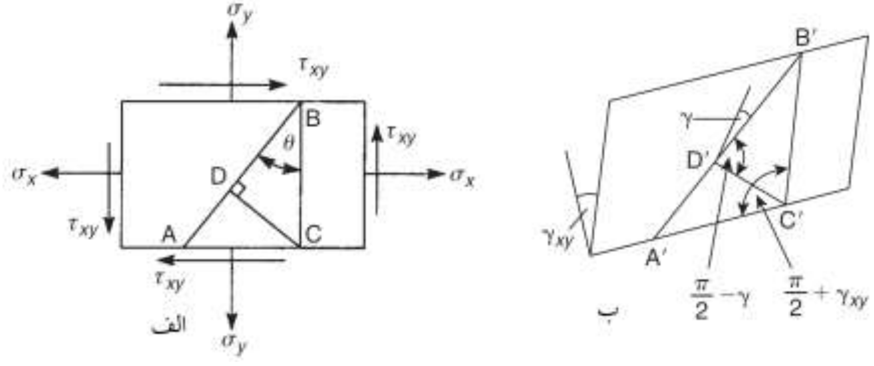
یک تیر با اتکای ساده را در نظر بگیرید که دارای مقطع مستطیلی است و یک بار متمرکز همانند آنچه در شکل١٤-١٣الف نشان داده شده است را تحمل می‌کند. با استفاده از روابط۹-۹ و ١٠-٤ ما می‌توانیم مقدار تنش برشی و تنش نرمال را در هر نقطه‌ای در هر مقطعی از تیر محاسبه کنیم. به همین ترتیب از روابط١٤-٨، ١٤-٩ و ١٤-٧ ما می‌توانیم مقادیر تنش‌های اصلی و راستای آنها را حساب کنیم. اگر این روند برای نقاط زیادی در طول تیر انجام شود منحنی‌هایی که تنش‌های اصلی بر آنها مماس هستند را می‌توان مانند آنچه در شکل١٤-١٣ب نمایش داده شده است رسم کرد. این منحنی‌ها با نام مسیرهای تنش شناخته می‌شوند و دو سیستم راست گوشه و متعامد را شکل می‌دهند. در شکل١٤-١٣ب خط‌های توپر تنش‌های کششی اصلی را نشان می‌دهند و خط‌های نقطه چین تنش‌های فشاری اصلی را نمایش می‌دهند. این دو دسته منحنی همدیگر را با زاویه

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

قائمه قطع می‌کنند و تمام منحنی‌ها تار خنثی را با زاویه ٤٥ درجه قطع می‌کنند که در آنجا تنش نرمال (از رابطه۹-۹) برابر صفر است. در سطوح بالایی و پایینی تیر، که در آنجا تنش برشی (از رابطه۱۰-٤) برابر صفر است، مسیرها دارای مماس‌های افقی یا عمودی هستند. نوع دیگری از منحنی که می‌توان از توزیع تنش‌های اصلی رسم کرد منحنی میزان است. چنین منحنی‌ای، نقاط دارای تنش اصلی یکسان را به هم وصل می‌کند.

١٤-٦ تعیین کرنش‌ها در صفحه مایل

در ١٤-٢ ما وضعیت تنش دوبعدی در یک نقطه عضو سازه‌ای را مورد بررسی قرار دادیم و تنش‌های برشی و نرمال را در یک صفحه مایل تعیین کردیم. حال ما باید کرنش‌های همراه با این تنش‌ها را تعیین کنیم. شکل١٤-١٤الف یک المان دو بعدی تحت اثر سیستم مرکب شامل تنش برشی و تنش نرمال را نشان می‌دهد، تنش‌های اعمال شده، المان مستطیلی شکل١٤-١٤الف را به صورتی که در شکل١٤-١٤ب نمایش داده شده است تاب می‌دهد. به ویژه المان مثلثی ABC دچار تاب می شود و به شکل $A'B'C'$ تبدیل خواهد شد. (همراه با تغییر در طول CD و زاویه BDC) کرنش‌های مربوط به σ_x، σ_y و τ_{xy} به ترتیب برابر با ε_x، ε_y و γ_{xy} هستند. حال ما می‌توانیم کرنش عمودی ε_n را در جهت نرمال صفحه AB و کرنش برشی γ_{xy} که به وسیله تنش برشی اثر کننده بر صفحه AB تولید می‌شود را محاسبه کنیم.



شکل١٤-١٤ تعیین کرنش‌ها در یک صفحه مایل

در یک تقریب اولیه خواهیم داشت:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\left.\begin{aligned} A'C' &= AC\left(1+\varepsilon_x\right) \\ C'B' &= CB\left(1+\varepsilon_y\right) \\ A'B' &= AB\left(1+\varepsilon_{n+\pi/2}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (١٤-١٥)$$

که $\varepsilon_{n+\pi/2}$ مقدار کرنش عمودی در راستای AB است. از هندسه مثلث $A'B'C'$ زاویه $B'C'A'=\pi/2+\gamma_{xy}$ خواهد بود و همچنین:

$$\left(A'B'\right)^2=\left(A'C'\right)^2+\left(C'B'\right)^2-2\left(A'C'\right)\left(C'B'\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma_{xy}\right)$$

یا با جانشانی در رابطه ١٤-١٥ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}(AB)^2\left(1+\varepsilon_{n+\pi/2}\right)^2 &= (AC)^2\left(1+\varepsilon_x\right)^2+(CB)^2\left(1+\varepsilon_y\right)^2 \\ &\quad +2(AC)(CB)\left(1+\varepsilon_x\right)\left(1+\varepsilon_y\right)\sin\gamma_{xy}\end{aligned}$$

با توجه به اینکه $(AB)^2=(AC)^2+(CB)^2$ و با نادیده گرفتن مربعات و توان‌های بالاتر مقادیر کوچک، این معادله را می‌توان به صورت زیر دوباره نوشت:

$$2(AB)^2\varepsilon_{n+\pi/2}=2(AC)^2\varepsilon_x+2(CB)^2\varepsilon_y+2(AC)(CB)\gamma_{xy}$$

با تقسیم بر $2(AB)^2$ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{n+\pi/2}=\varepsilon_x\sin^2\theta+\varepsilon_y\cos^2\theta+\sin\theta\cos\theta\gamma_{xy} \qquad (١٤-١٦)$$

کرنش ε_n در جهت نرمال بر صفحه AB با جایگزاری مقدار $\theta-\pi/2$ به جای θ در رابطه ١٤-١٦ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\varepsilon_n=\varepsilon_x\cos^2\theta+\varepsilon_y\sin^2\theta-\frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \qquad (١٤-١٧)$$

حال از مثلث $C'D'B'$ داریم:

$$\left(C'B'\right)^2=\left(C'D'\right)^2+\left(D'B'\right)^2-2\left(C'D'\right)\left(D'B'\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\gamma\right) \qquad (١٤-١٨)$$

که:

$$\begin{aligned}\left(C'B'\right) &= CB\left(1+\varepsilon_y\right) \\ C'D' &= CD\left(1+\varepsilon_n\right) \\ D'B' &= DB\left(1+\varepsilon_{n+\pi/2}\right)\end{aligned}$$

با جایگزاری مقادیر $C'B'$، $C'D'$ و $D'B'$ دررابطه ١٤-١٨ و با توجه به اینکه $\cos(\pi/2-\gamma)=\sin\gamma$ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$(CB)^2(1+\varepsilon_y)^2=(CD)^2(1+\varepsilon_n)^2=(DB)^2(1+\varepsilon_{n+\pi/2})^2 - 2(CD)(DB)(1+\varepsilon_n)(1+\varepsilon_{n+\pi/2})\sin\gamma \qquad (١٤-١٩)$$

دوباره با چشم پوشی کردن از مربعات و توان‌های بالاتر کرنش‌ها، و اینکه $\sin\gamma=\gamma$ رابطه ١٤-١٩ اینگونه خواهد شد:

$$(CB)^2(1+2\varepsilon_y)=(CD)^2(1+2\varepsilon_n)+(DB)^2(1+2\varepsilon_{n+\pi/2})-2(CD)(DB)\gamma$$

از شکل ١٤-١٤الف می‌بینیم که $(CB)^2=(CD)^2+(DB)^2$ و معادله بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$2(CB)^2\varepsilon_y=2(CD)^2\varepsilon_n+2(DB)^2\varepsilon_{n+\pi/2}-2(CD)(DB)\gamma$$

با تقسیم بر $2(CB)^2$ و فاکتورگیری خواهیم داشت:

$$\gamma=\frac{\varepsilon_n\sin^2\theta+\varepsilon_{n+\pi/2}\cos^2\theta-\varepsilon_y}{\sin\theta\cos\theta}$$

با جایگزاری ε_n و $\varepsilon_{n+\pi/2}$ از روابط ١٤-١٦ و ١٤-١٧ داریم:

$$\frac{\gamma}{2}=\frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\sin 2\theta+\frac{\gamma_{xy}}{2}\cos 2\theta \qquad (١٤-٢٠)$$

١٤-٧ کرنش های اصلی

از مقایسه روابط ١٤-١٧ و ١٤-٢٠ با روابط ١٤-٥ و ١٤-٦ در می‌یابیم که این دو معادله با جانشینی ε_n به جای σ_n، ε_x به جای σ_x، ε_y به جای σ_y ، $\gamma_{xy}/2$ به جای τ_{xy} و $\gamma/2$ به جای τ به دست می‌آیند. به همین ترتیب هر نتیجه‌ای که از روابط ١٤-٥ و ١٤-٦ به دست بیایند و به σ_n و τ وابسته باشند همان استنتاج‌ها در مورد روابط ١٤-١٧ و ١٤-٢٠ نیز با جانشینی ε_n و $\gamma/2$ وجود خواهند داشت.

بنابراین در یک نقطه از عضو سازه‌ای دو صفحه متقابلاً متعامد وجود دارند که کرنش برشی γ صفر است و در حالت نرمال، کرنش عمودی، بیشینه یا کمینه مقدار جبری کرنش مستقیم در آن نقطه است. این کرنش‌های عمودی کرنش‌های اصلی در آن نقطه هستند و با مقایسه روابط ١٤-٨ و ١٤-٩ اینگونه تعیین می‌شوند:

$$\varepsilon_I=\frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+\gamma_{xy}^2} \qquad (١٤-٢١)$$

و همچنین:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\varepsilon_{II} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (۲۲-۱٤)$$

از آنجایی که کرنش برشی γ در این صفحه‌ها برابر صفر است انتظار می‌رود که تنش برشی نیز صفر باشد و از بخش۱٤-۳ نتیجه می‌گیریم که راستای کرنش‌های اصلی و تنش‌های اصلی بر هم منطبق است. صفحه‌های مربوطه، از رابطه۱٤-۷ یا از رابطه زیر تعیین می‌شوند:

$$\tan 2\theta = -\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad (۲۳-۱٤)$$

بیشترین مقدار کرنش برشی در نقطه مورد از رابطه زیر به دست می آید:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (۲٤-۱٤)$$

یا

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)_{\max} = \frac{\varepsilon_I - \varepsilon_{II}}{2} \qquad (۲۵-۱٤)$$

۱٤-۸ دایره کرنش موهر

مبحث مربوط به بخش۱٤-۷ را می‌توان در مورد دایره تنش موهر توضیح داده شده در بخش۱٤-٤ نیز به کار بست. دایره‌ای مشابه با آنچه در شکل۱٤-۱۱ نشان داده شد برای کرنش نیز قابل رسم است. اما باید مقادیر σ_x، σ_y و ... را با ε_x، ε_y و ... مانند آنچه در بخش۱٤-۷ گفته شد جایگزین کرد. حدود بالا و پایینی افقی دایره، کرنش‌های اصلی را نشان می‌دهند و شعاع دایره نصف کرنش برشی بیشینه است و همینطور الی آخر.

مثال۱٤-۵) عضو سازه‌ای به گونه‌ای بارگذاری شده است که در یک نقطه خاص در عضو، سیستم تنش دوبعدی شامل σ_x برابر $+60\ N/mm^2$ و σ_y برابر با $-40\ N/mm^2$ و $\tau_{xy} = 50 N/mm^2$ می‌باشد. الف) کرنش عمودی در دو راستای x و y و کرنش برشی γ_{xy} را در نقطه مذکور محاسبه کنید. ب) کرنش‌های اصلی در نقطه مذکور را محاسبه کنید و موقعیت صفحه‌های اصلی را تعیین کنید. ج) با استفاده از روش ترسیمی صحت و سقم جواب خود را بررسی کنید . مقدار E را برابر با $200000 N/mm^2$ و ضریب پواسون $\nu = 0.3$ در نظر بگیرید.

حل)الف) از بخش۷-۸ داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\varepsilon_x = \frac{1}{200000}(60+0.3\times 40) = 360\times 10^{-6}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{200000}(-40-0.3\times 60) = -290\times 10^{-6}$$

مدول برشی G با استفاده از رابطه۷-۲۱ به دست خواهد آمد، بنابراین:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200000}{2(1+0.3)} = 76923\frac{N}{mm^2}$$

بدین ترتیب از رابطه۷-۹ داریم:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{50}{76923} = 650\times 10^{-6}$$

ب) حال با جایگذاری مقادیر ε_x، ε_y و γ_{xy} در روابط۱٤-۲۱ و۱٤-۲۲ داریم:

$$\varepsilon_I = 10^{-6}\left[\frac{360-290}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(360+290)^2 + 650^2}\right]$$

بنابراین:

$$\varepsilon_I = 495\times 10^{-6}$$

و به طریقی مشابه خواهیم داشت:

$$\varepsilon_{II} = -425\times 10^{-6}$$

از رابطه۱٤-۲۳ خواهیم داشت:

$$\tan 2\theta = -\frac{650\times 10^{-6}}{360\times 10^{-6} + 290\times 10^{-6}} = -1$$

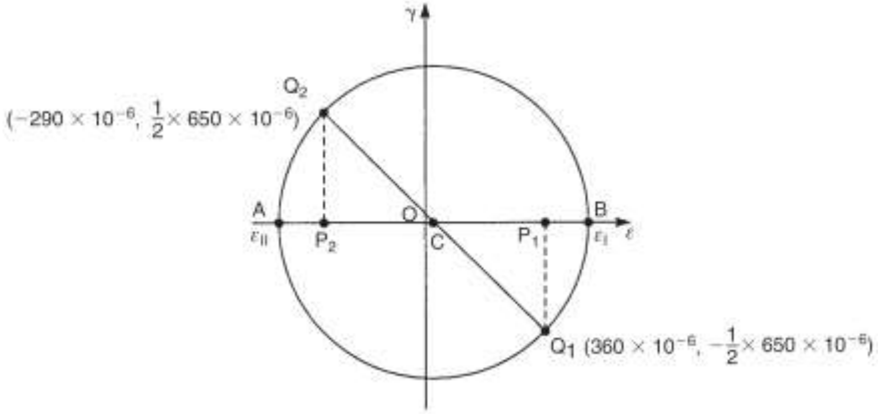
بنابراین دو حالت خواهیم داشت:

$2\theta = -45^\circ$ یا -225°

$\theta = -22.5^\circ$ یا -112.5°

ج) محورهای $O\varepsilon$ و $O\gamma$ رسم می‌شود و نقاط $Q_1\left(360\times 10^{-6}, \frac{1}{2}\times 650\times 10^{-6}\right)$ و $Q_2\left(-290\times 10^{-6}, \frac{1}{2}\times 650\times 10^{-6}\right)$ بر روی نمودار علامت گذاری می‌شوند. مرکز دایره C محل تقاطع Q_1Q_2 و محور $O\varepsilon$ است(شکل۱٤-۱۵). سپس دایره با شعاعی برابر CQ_1 و نقاط $B(\varepsilon_I)$ و $A(\varepsilon_{II})$ نیز رسم می‌شوند. در نهایت زاویه‌های $Q_1CB = -2\theta$ و $Q_1CA = -2\theta - \pi$ بدست خواهند آمد.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل ١٤-١٥ دایره کرنش موهر مثال ١٤-٥

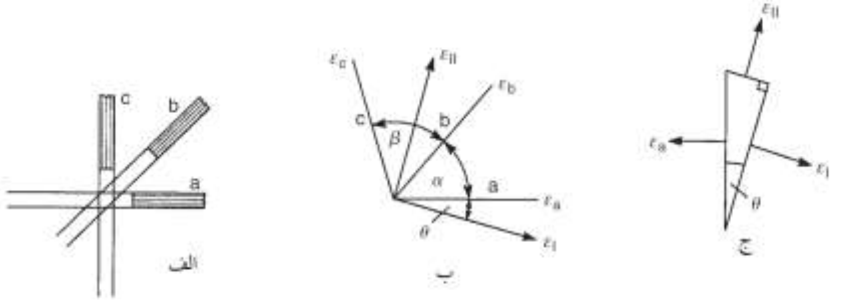
١٤-٩ ارزیابی تجربی کرنش‌ها و تنش‌های سطحی

تنش‌ها در نقطه‌ای روی سطح یک عضو سازه‌ای ممکن است با ارزیابی کرنش‌ها در آن نقطه قابل دستیابی باشد. این کار معمولاً با کرنش‌سنج‌های بر مبنای مقاومت الکتریکی[1] انجام می‌شود. این کرنش‌سنج‌ها مانند یک ساندویچ هستند که مغزه و ماده اصلی آن یک سیم ظریف با طول کوتاه است و بقیه آن دو لایه از کاغذ باردار شده است که اطراف سیم را احاطه کرده‌اند. تمام این مجموعه بر روی سطح عضو چسبانده می‌شود. مقاومت سیم هنگامی که سیم کشیده می‌شود یا فشرده می‌شود تغییر می‌کند، پس هنگامی که سطح عضو تغییر شکل می‌دهد و دچار کرنش می‌شود، کرنش سنج تغییر مقاومت را که به وسیله مدارهای ویت استون بریج[2] (مداری متشکل از مقاومت‌های معلوم و مجهول که توسط آن میتوان مقاومت مجهول را دقیقا اندازه گیری کرد) قابل اندازه گیری است به ما نشان خواهد داد. کرنش سنج‌ها فقط کرنش‌های مستقیم را اندازه گیری می‌کنند، اما وضعیت تنش در یک نقطه خاص بر حسب تنش‌های اصلی از طریق کرنش سنج های رزت[3] قابل بررسی است. این کرنش سنج‌ها شامل سه کرنش سنج هستند که در یک زاویه معین نسبت به هم مایلند.

---

[1] Electrical resistance strain gauges
[2] Wheatstone Bridge
[3] Rosette

معمولاً با زاویه ٤٥ درجه هستند یا مانند شکل١٤–١٦الف کرنش سنج‌های رزت، راست گوشه هستند. رزت‌های متساوی الزاویه دارای کرنش سنج با زاویه تمایل ٦٠ هستند.



شکل١٤–١٦ اندازه‌گیری کرنش‌سنج‌های الکتریکی

فرض کنید که یک رزت مانند آنچه در شکل١٤–١٦ب نشان داده شده است دارای سه بازوی a، b و c با زاویه های α و β است. همچنین فرض کنید که ε_I و ε_{II} کرنش‌های اصلی ما در نقطه مورد نظر هستند و ε_I با زاویه نامعلوم θ نسبت به بازوی a مایل شده است. حال اگر ε_a ، ε_b و ε_c کرنش‌های اندازه گیری شده در راستاهای θ، $\theta+\alpha$ و $\theta+\alpha+\beta$ نسبت به ε_I باشند از رابطه١٤–١٧ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_a = \varepsilon_I \cos^2\theta + \varepsilon_{II} \sin^2\theta \qquad (١٤\text{–}٢٦)$$

که ε_n به ε_a تبدیل شده است، ε_x به ε_I تبدیل شده است، ε_y به ε_{II} تبدیل شده است و $\gamma_{xy}=0$ است. از آنجا که جهت های x و y جهت‌های اصلی هستند این موقعیت همان موقعیت قبلی است. تا آنجا که ε_a، ε_I و ε_{II} به صورت کرنش‌های یک المان مثلثی مانند آنچه در شکل١٤–١٦ج نشان داده شده است به هم مربوط می‌شوند و با نوشتن دوباره رابطه١٤–٢٦ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_I}{2}(1+\cos 2\theta) + \frac{\varepsilon_{II}}{2}(1-\cos 2\theta)$$

یا

$$\varepsilon_a = \frac{1}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2\theta \qquad (١٤\text{–}٢٧)$$

بطور مشابه:

$$\varepsilon_b = \frac{1}{2}(\varepsilon_I+\varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I-\varepsilon_{II})\cos 2(\theta+\alpha) \qquad (١٤\text{–}٢٨)$$

و

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2}(\varepsilon_I + \varepsilon_{II}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_I - \varepsilon_{II})\cos 2(\theta + \alpha + \beta) \qquad (۱٤-۲۹)$$

بنابراین اگر ε_a، ε_bو ε_c در راستاهای مورد نظر اندازه گیری شوند، با زاویه‌های مشخص α و β، برای ما ε_I، ε_{II} و θ تنها مجهولات روابط ۱٤-۲۷، ۱٤-۲۸ و ۱٤-۲۹ هستند. با تعیین کرنش‌های اصلی، ما تنش‌های اصلی را با استفاده از روابط بخش ۷-۸ به دست می‌آوریم، بنابراین

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}(\sigma_I - \nu\sigma_{II}) \qquad (۱٤-۳۰)$$

و

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}(\sigma_{II} - \nu\sigma_I) \qquad (۱٤-۳۱)$$

با حل روابط ۱٤-۳۰ و ۱٤-۳۱ برای مقادیر σ_I و σ_{II} خواهیم داشت:

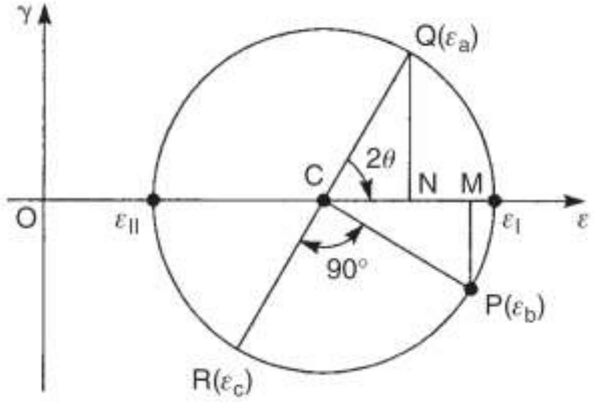
$$\sigma_I = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_I - \nu\varepsilon_{II}) \qquad (۱٤-۳۲)$$

و

$$\sigma_{II} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{II} - \nu\varepsilon_I) \qquad (۱٤-۳۳)$$

برای یک رزت ٤٥ درجه $\alpha = \beta = 45^\circ$ خواهد بود و کرنش‌های اصلی را می‌توان از طریق هندسه دایره موهر کرنش‌ها به دست آورد. فرض کنید که بازوی a رزت با زاویه نامعلوم θ مایل است تا بیشترین کرنش اصلی را مانند آنچه در شکل ۱٤-۱٦ب وجود دارد به دست آورد. بنابراین دایره موهر کرنش ها مانند شکل ۱٤-۱۷ خواهد بود. کرنش‌های برشی γ_a، γ_b و γ_c در این بحث مورد تاکید نیستند و به همین دلیل از آنها صرف نظر می‌شود، از شکل ۱٤-۱۷ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۴-۱۷ دایره موهر کرنش‌ها برای کرنش سنج رزت ۴۵ درجه

شعاع دایره برابر CQ است با:

$$CQ = \sqrt{CN^2 + QN^2}$$

بنابراین:

$$CQ = \sqrt{\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_a - \varepsilon_c)\right]^2 + \left[\varepsilon_b - \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c)\right]^2}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$CQ = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}$$

بنابراین مقدار ε_I به صورت زیر تعریف می‌شود:

$\varepsilon_I = OC +$ شعاع دایره

بنابراین:

$$\varepsilon_I = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \qquad (۱۴-۳۴)$$

همچنین داریم:

$\varepsilon_{II} = OC -$ شعاع دایره

یعنی:

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_c) - \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2} \qquad (۱۴-۳۵)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در نهایت زاویه θ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\tan 2\theta = \frac{QN}{CN} = \frac{\varepsilon_b - \left(\frac{1}{2}\right)(\varepsilon_a + \varepsilon_c)}{\left(\frac{1}{2}\right)(\varepsilon_a - \varepsilon_c)}$$

به عبارت دیگر:

$$\tan 2\theta = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \qquad (٣٦-١٤)$$

چنین راهکاری را نیز می‌توان برای روزت ٦٠ درجه اتخاذ کرد.

مثال١٤-٦) شفت توپر با مقطع دایروی دارای قطر ٥٠ میلی متر و تحت اثر لنگر T و بار محوری P است. یک کرنش‌سنج مستطیلی رزت روی سطح شفت نصب شده است و مقادیر کرنش زیر را ثبت کرده است:

$$\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_b = -200 \times 10^{-6}, \quad \varepsilon_c = -300 \times 10^{-6}$$

کرنش‌سنج‌های a و c همراستا هستند و عمود بر محور شفت می‌باشند. اگر ماده و جنس شفت دارای مدول یانگ $70000\ N/mm^2$ و ضریب پواسون 0.3 باشد مقادیر T و P را محاسبه کنید.

حل) با جایگزاری مقادیر ε_a، ε_b و ε_c در رابطه١٤-٣٤ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_I = \frac{10^{-6}}{2}(1000-300) + \frac{10^{-6}}{\sqrt{2}}\sqrt{(1000+200)^2 + (-200+300)^2}$$

که خواهیم داشت:

$$\varepsilon_I = \frac{10^{-6}}{2}(700+1703) = 1202 \times 10^{-6}$$

از رابطه١٤-٣٥ داریم:

$$\varepsilon_{II} = \frac{10^{-6}}{2}(700-1703) = -502 \times 10^{-6}$$

با جانشانی ε_I و ε_{II} در رابطه١٤-٣٢ خواهیم داشت:

$$\sigma_I = \frac{70000 \times 10^{-6}}{1-(0.3)^2}(1202 - 0.3 \times 502) = 80.9 \frac{N}{mm^2}$$

و به طریق مشابهی از رابطه١٤-٣٣ خواهیم داشت:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\sigma_I = \frac{70000\times10^{-6}}{1-(0.3)^2}(-505+0.3\times1202) = -10.9\frac{N}{mm^2}$$

از آنجایی که $\sigma_y = 0$ است (توجه داشته باشید که بـار محـوری فقـط σ_x تولیـد مـی‌کنـد) روابط ۱۴-۸ و ۱۴-۹ به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

الف
$$\sigma_I = \frac{\sigma_x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}$$

ب
$$\sigma_{II} = \frac{\sigma_x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}$$

با جمع دو معادله (الف) و (ب) خواهیم داشت:

$$\sigma_I+\sigma_{II} = \sigma_x$$

بنابراین:

$$\sigma_x = 80.9-10.9 = 70\frac{N}{mm^2}$$

با جانشانی σ_x در روابط (الف) و (ب) خواهیم داشت:

$$\tau_{xy} = 29.7\frac{N}{mm^2}$$

برای بار محوری p:

$$\sigma_x = 70\frac{N}{mm^2} = \frac{P}{A} = \frac{P}{\left(\frac{\pi}{4}\right)\times50^2} \quad \Rightarrow \quad P = 137.4kN$$

همینطور برای لنگر T با استفاده از رابطه۱۱-۴ خواهیم داشت:

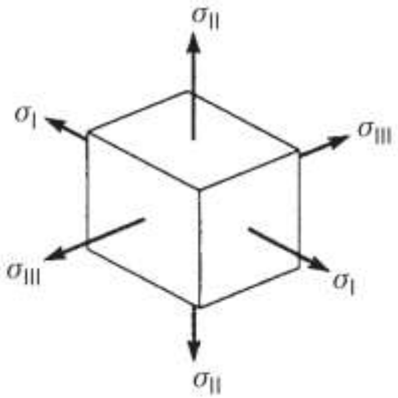
$$\tau_{xy} = 29.7\frac{N}{mm^2} = \frac{Tr}{J} = \frac{T\times25}{\left(\frac{\pi}{32}\right)\times50^4} \quad \Rightarrow \quad T = 0.7kN.m$$

توجه داشته باشید که P در این مورد به صورت نرمال از مقـدار کـرنش محـوری ε_a قابـل محاسبه است. بنابراین از رابطه۷-۸ خواهیم داشت: (با جواب روش قبلی یکسان است)

$$\sigma_x = E\varepsilon_a = 70000\times1000\times10^{-6} = 70\frac{N}{mm^2}$$

۱۴-۱۰ نظریه‌های شکست الاستیک

تنش نرمال در یک عضو سازه‌ای تحت کشش ساده یا فشار ساده به صورت مستقیم متناسب با کرنش بالای نقطه تسلیم (وادادگی) مصالح (جنس ماده تشکیل دهنده عضو) آن است(بخش۷-۷). بنابراین طراحی چنین عضوی با استفاده از تنش نرمال در تسلیم، نسبتاً ساده است. با این وجود، ما در بخش۱٤-۳ مشاهده کردیم که تنش نرمال و برشی در یک نقطه از یک عضو سازه‌ای تحت سیستم بارگذاری مرکب لزوماً بیشترین مقدار، در آن نقطه نیستند. در چنین مواردی واضح نیست که شکست چگونه رخ می‌دهد، به همین دلیل تعیین ظرفیت سازه و یا طراحی عضو سازه‌ای با بارهای داده شده دشوار است. یک روش، شاید استفاده از آزمایش مستقیم باشد، به ترتیبی که عضو سازه‌ای تحت بارگذاری قرار گیرد تا جایی که تغییر شکل‌ها دیگر متناسب با بار اعمال شده نباشند. چنین راهکاری همانطور که می‌بینید هم وقت را هدر می‌دهد و هم غیر اقتصادی است. روشی برای ما ایده آل است که چند پارامتر نماینده از تنش‌های اعمال شده را به تنش تسلیم در کشش ساده (که برای یک ماده خاص ثابت است) مربوط سازد.



شکل۱٤-۱۸ ساده سازی سیستم تنش مرکب سه بعدی

در بخش۱٤-۳ ما دیدیم که یک سیستم تنش مرکب دو بعدی شامل تنش‌های نرمال و برشی را می‌توان با یک سیستم ساده‌تر شامل فقط تنش‌های نرمال نشان داد. به عبارت دیگر فقط شامل تنش‌های اصلی. بنابراین مسئله ما تا حدودی ساده می‌شود چون در این حالت بارهای اعمال شده با سیستمی از تنش‌های نرمال نمایش داده می‌شوند. این روش را بدون

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

توجه به ترکیب بارگذاری و سیستم تنش ناشی از آن می‌توان در سه بعد نیز تعمیم داد، در نهایت سه تنش اصلی σ_I، σ_{II} و σ_{III} مانند آنچه در شکل ١٤-١٨ نشان داده شده است برای یک المان سه بعدی خواهیم داشت. حال کاری که باید انجام دهیم این است که به روشی، این تنش‌های اصلی را به تنش تسلیم ماده تحت کشش ساده σ_y ارتباط بدهیم.

مصالح‌های شکل‌پذیر

تعدادی نظریه شکست الاستیک برای مصالح‌های شکل‌پذیر در گذشته ارائه شدند اما تجربه و نتایج آزمایشات در نهایت منجر به حذف همه آنها به جز دو مورد شد.

نظریه تنش برشی بیشینه[1]

این نظریه معمولاً با نام ترسکا و گست[2] همراه است. این نظریه بیان می‌کند که: «شکست (یعنی تسلیم) هنگامی رخ می‌دهد که بیشینه تنش برشی در مصالح برابر با مقدار بیشینه تنش برشی در شکست تحت کشش ساده بشود».

برای سیستم دوبعدی تنش، بیشینه تنش برشی بر حسب تنش‌های اصلی به وسیله رابطه١٤-١٢ تعیین می‌شود. برای موارد سه بعدی بیشینه تنش برشی از معادله زیر به دست می آید:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \qquad (٣٧-١٤)$$

که σ_{max} و σ_{min} بیشینه و کمینه تنش‌های اصلی از نظر جبری هستند. در شکست و گسیختگی در کشش ساده، تنش تسلیم σ_y در واقع یک تنش اصلی است و از آنجایی که تنش نرمالی نمی تواند عمود بر محور بارگذاری وجود داشته باشد بنابراین بیشینه تنش برشی از روابط١٤-١٢ و ١٤-٣٧ برابر است با:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_Y}{2} \qquad (٣٨-١٤)$$

بنابراین این نظریه بیان می‌کند که شکست در یک سیستم مرکب هنگامی رخ می‌دهد که:

[1] Maximum shear stress theory
[2] Tresca and Guest

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\frac{\sigma_{max}-\sigma_{min}}{2}=\frac{\sigma_Y}{2}$$

یا به عبارتی دیگر:

$$\sigma_{max}-\sigma_{min}=\sigma_Y \qquad (١٤-٣٩)$$

اجازه بدهید تا در این قسمت سیستم‌های تنش دارای مقادیر مختلف وابسته به هم σ_I، σ_{II} و σ_{III} را مورد بررسی قرار دهیم. در قدم اول فرض کنید که $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} > 0$ باشد. از رابطه١٤-٣٩ می‌توان نتیجه گرفت که شکست هنگامی رخ می‌دهد که:

$$\sigma_I-\sigma_{III}=\sigma_Y \qquad (١٤-٤٠)$$

در قدم دوم فرض کنید که $\sigma_I > \sigma_{II} > 0$ اما $\sigma_{III}=0$ است . در این مورد سیستم تنش سه بعدی شکل١٤-١٨ به یک سیستم تنش دو بعدی ساده می‌شود اما هنوز بر یک المان سه بعدی اثر می‌کند. بنابراین رابطه١٤-٣٩ به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\sigma_I-0=\sigma_Y$$

یا

$$\sigma_I=\sigma_Y \qquad (١٤-٤١)$$

در این قسمت ما یک تناقض آشکار با رابطه١٤-١٢ مشاهده می‌کنیم که بیشینه تنش برشی در یک سیستم تنش دو بعدی برابر با نصف اختلاف σ_I و σ_{II} است. با این وجود بیشینه تنش برشی در آن حالت، در صفحه المان دوبعدی رخ می‌دهد. یعنی صفحه σ_I و σ_{II}. در این مورد ما یک المان سه بعدی داریم، در نتیجه بیشینه تنش برشی در صفحه σ_I و σ_{III} قرار خواهد داشت. در قدم آخر فرض کنید که $\sigma_I > 0$، $\sigma_{II} < 0$ و $\sigma_{III}=0$ باشد. دوباره یک سیستم تنش دوبعدی داریم که بر یک المان سه بعدی اثر می‌کند اما در این حالت σ_{II} یک تنش فشاری است و از نظر جبری کمتر از σ_{III} است. بنابراین رابطه١٤-٣٩ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\sigma_I-\sigma_{II}=\sigma_Y \qquad (١٤-٤٢)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

نظریه انرژی کرنش برشی

این نظریه شکست الاستیک به صورتی جداگانه توسط وون میسس ، مکس ول و هنکی[1] بنا شد اما بیشتر با نام وون میسس شناخته می‌شود. این نظریه بیان می‌کند که: «شکست هنگامی رخ می‌دهد که انرژی برش یا انرژی کرنش ناشی از اعوجاج در مصالح به مقدار برابر آن در تسلیم تحت کشش ساده برسد».

درسال ۱۹۰٤ هیوبر[2] بیان کرد که انرژی کرنش نهایی U_t یک المان از یک مصالح را می‌توان متشکل از دو بخش جداگانه دانست : شکل، حجم.

انرژی قسمتی که به حجم مربوط می‌شود با عنوان انرژی کرنش حجمی U_v و انرژی قسمتی که به شکل مربوط می‌شود با عنوان انرژی کرنش برشی یا انرژی کرنشی ناشی از اعوجاج U_s شناخته می‌شود. بنابراین

$$U_t = U_v + U_s \qquad (\text{١٤-٤٣})$$

از آنجایی که به دست آوردن U_t و U_v نسبتاً ساده است ما مقدار U_s را ازرابطه١٤-٤٣ به دست می‌آوریم و خواهیم داشت:

$$U_s = U_t - U_v \qquad (\text{١٤-٤٤})$$

به هرحال در ابتدا ما باید ثابت کنیم که تغیر شکل یک المان از مصالح، قابلیت این را دارد که به تغییر در حجم و شکل تجزیه شود.

تنش های اصلی σ_I، σ_{II} و σ_{III} اثر کننده بر المان شکل١٤-١٨ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma_I = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{1}{3}(2\sigma_I - \sigma_{II} - \sigma_{III})$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{1}{3}(2\sigma_{II} - \sigma_I - \sigma_{III})$$

$$\sigma_{III} = \frac{1}{3}(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}) + \frac{1}{3}(2\sigma_{III} - \sigma_{II} - \sigma_I)$$

یا

[1] von Mises, Maxwell and Hencky

[2] Huber

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

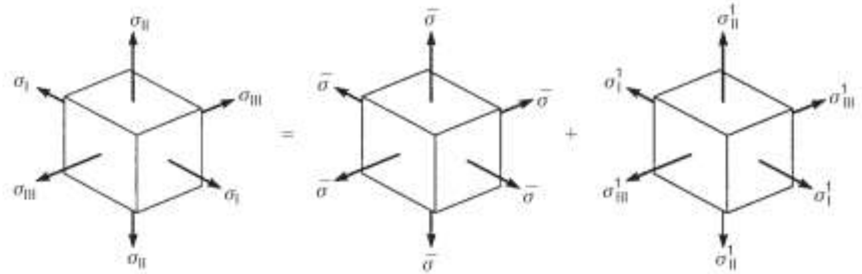
$$\left.\begin{aligned}\sigma_I &= \bar{\sigma}+\sigma_I^1\\ \sigma_{II} &= \bar{\sigma}+\sigma_{II}^1\\ \sigma_{III} &= \bar{\sigma}+\sigma_{III}^1\end{aligned}\right\} \qquad (٤٥-١٤)$$

بنابراین سیستم تنش شکل١٤-١٨ را می‌توان به صورت جمع دو سیستم تنش مجزا مانند آنچه در شکل١٤-١٩ نشان داده شده است نشان داد. سیستم تنش $\bar{\sigma}$ مانند یک تنش هیدرواستاتیک یا حجمی است که باعث تغییر حجم می‌شود اما تغییر شکل را ایجاد نمی‌کند. اثر سیستم تنش σ^1 را به روش زیر می‌توان تعیین کرد. با جمع روابط١٤-٤٥ خواهیم داشت:

$$\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}=3\bar{\sigma}+\sigma_I^1+\sigma_{II}^1+\sigma_{III}^1$$

اما

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{3}\left(\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)$$



شکل١٤-١٩ نمایش تنش‌های اصلی به صورت تنش‌های حجمی و اعوجاج

بنابراین:

$$\sigma_I^1+\sigma_{II}^1+\sigma_{III}^1=0 \qquad (٤٦-١٤)$$

از روابط تنش – کرنش قسمت٧-٨ خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_I^1 &= \frac{\sigma_I^1}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{II}^1+\sigma_{III}^1\right)\\ \varepsilon_{II}^1 &= \frac{\sigma_{II}^1}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_I^1+\sigma_{III}^1\right)\\ \varepsilon_{III}^1 &= \frac{\sigma_{III}^1}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_I^1+\sigma_{II}^1\right)\end{aligned}\right\} \qquad (٤٧-١٤)$$

کرنش حجمی ε_vبه σ_I^1، σ_{II}^1و σ_{III}^1 بستگی دارد و برابر جمع کرنش‌های خطی است. بنابراین طبق رابطه۱۴-۴۷ خواهیم داشت:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_I^1 + \varepsilon_{II}^1 + \varepsilon_{III}^1 = \frac{(1-2\nu)}{E}\left(\sigma_I^1 + \sigma_{II}^1 + \sigma_{III}^1\right)$$

که از رابطه۱۴-۴۶ خواهیم داشت

$$\varepsilon_v = 0$$

این امر به این منجر می شود که σ_I^1، σ_{II}^1و σ_{III}^1 تغییری در حجم ایجاد نکنند و فقط تغییر شکل ایجاد کنند. بنابراین ما توانستیم سیستم‌های تنش σ_I، σ_{II} و σ_{III} را به تنش‌های تغییر دهنده حجم $\overline{\sigma}$ و تنش های تغییر دهنده شکل σ^1 تقسیم کنیم. در قسمت۷-۱۰ ما عبارتی را برای انرژی کرنشی U مربوط به یک عضو تحت تنش نرمال σ به دست آوردیم.

$$U = \frac{\sigma^2}{2E} \times AL_0 \qquad (۳۰-۷)$$

این معادله به صورت زیر قابل بازنویسی است :

$$U = \frac{1}{2} \times \sigma \times \varepsilon \times \text{حجم}$$

از آنجایی که $E = \sigma / \varepsilon$ است انرژی کرنشی برای واحد حجم برابر است با $\sigma\varepsilon / 2$. بنابراین برای یک المان سه بعدی تحت تنش $\overline{\sigma}$ بر هر یک از شش وجهش، انرژی کرنش در یک راستا برابر است با:

$$\frac{1}{2} \times \overline{\sigma} \times \overline{\varepsilon}$$

که $\overline{\varepsilon}$ کرنش ناشی از $\overline{\sigma}$ در هر یک از سه راستاست. انرژی کرنشی حجمی (نهایی) به ازای واحد حجم U_v برای المان از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$U_v = 3\left(\frac{1}{2}\overline{\sigma}\overline{\varepsilon}\right)$$

یا از آنجاییکه:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\overline{\sigma}}{E} - 2\nu\frac{\overline{\sigma}}{E} = \frac{\overline{\sigma}}{E}(1-2\nu)$$

$$U_v = \frac{1}{2}\overline{\sigma}\frac{3\overline{\sigma}}{E}(1-2\nu) \qquad (۱۴-۴۸)$$

اما

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{3}\left(\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)$$

بنابراین با استفاده از رابطه۱۴-۴۸ داریم:

$$U_v=\frac{(1-2\nu)}{6E}\left(\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)^2 \qquad (۱۴-۴۹)$$

با استدلال مشابهی انرژی کرنشی نهایی به ازای واحد حجم U_t یک المان تحت تنش‌های σ_I، σ_{II} و σ_{III}برابر است با:

$$U_v=\frac{1}{2}\sigma_I\varepsilon_I+\frac{1}{2}\sigma_{II}\varepsilon_{II}+\frac{1}{2}\sigma_{III}\varepsilon_{III} \qquad (۱۴-۵۰)$$

که:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_I&=\frac{\sigma_I}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)\\ \varepsilon_{II}&=\frac{\sigma_{II}}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_I+\sigma_{III}\right)\\ \varepsilon_{III}&=\frac{\sigma_{III}}{E}-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_I+\sigma_{II}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (۱۴-۵۱)$$

با جانشانی ε_I و ... در رابطه۱۴-۵۰ و سپس انجام همین کار برای U_v و رابطه۱۴-۴۹ و U_t در رابطه۱۴-۴۴ خواهیم داشت:

$$U_s=\frac{1}{2E}\left[\sigma_I^2+\sigma_{II}^2+\sigma_{III}^2-2\nu\left(\sigma_I\sigma_{II}+\sigma_{II}\sigma_{III}+\sigma_{III}\sigma_I\right)-\frac{(1-2\nu)}{6E}\left(\sigma_I+\sigma_{II}+\sigma_{III}\right)^2\right]$$

که به صورت زیر برای واحد حجم ساده می‌شود:

$$U_s=\frac{(1-2\nu)}{6E}\left[\left(\sigma_I-\sigma_{II}\right)^2+\left(\sigma_{II}-\sigma_{III}\right)^2+\left(\sigma_{III}-\sigma_I\right)^2\right] \qquad (۱۴-۵۲)$$

از رابطه۷-۲۱ داریم:

$$E=2G(1+\nu)$$

انرژی کرنشی برشی یا اعوجاجی برای واحد حجم در شکست تحت کشش ساده با مقادیر زیر در رابطه است : $\sigma_I=\sigma_Y,\ \sigma_{II}=\sigma_{III}=0$، بنابراین:

$$U_s(\text{در شکست تحت کشش ساده})=\frac{\sigma_Y^2}{6G} \qquad (۱۴-۵۳)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

طبق معیار وون میسس، شکست هنگامی رخ می دهد که U_s به دست آمده از ١٤-٥٢ به مقدار U_s به دست آمده از رابطه١٤-٥٣ برسد. یعنی:

$$(\sigma_I-\sigma_{II})^2+(\sigma_{II}-\sigma_{III})^2+(\sigma_{III}-\sigma_I)^2=2\sigma_Y^2 \qquad (١٤-٥٤)$$

برای یک سیستم تنش دوبعدی که در آن $\sigma_{III}=0$ ،رابطه١٤-٥٤ به صورت زیر می‌شود:

$$\sigma_I^2+\sigma_{II}^2-\sigma_I\sigma_{II}=\sigma_Y^2 \qquad (١٤-٥٥)$$

کاربرد در طراحی

آیین نامه‌های سازه‌های فولادی در ساختمان‌ها از معیار وون میسس در سیستم‌های تنش دو بعدی (رابطه١٤-٥٥) برای تعیین تنش مجاز هم ارز اعضای تحت خمش یا برش استفاده می‌کنند. بنابراین اگر σ_xو τ_{xy} به ترتیب تنش نرمال و برشی در نقطه‌ای از عضو تحت اثر خمش و برش باشند، تنش‌های اصلی در نقطه مذکور از روابط ١٤-٨ و ١٤-٩، برابر خواهند بود با:

$$\sigma_I=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_{II}=\frac{\sigma_x}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\sigma_x^2+4\tau_{xy}^2}$$

با جانشانی این عبارت‌ها در رابطه١٤-٥٥ و ساده سازی خواهیم داشت:

$$\sigma_Y=\sqrt{\sigma_x^2+3\tau_{xy}^2} \qquad (١٤-٥٦)$$

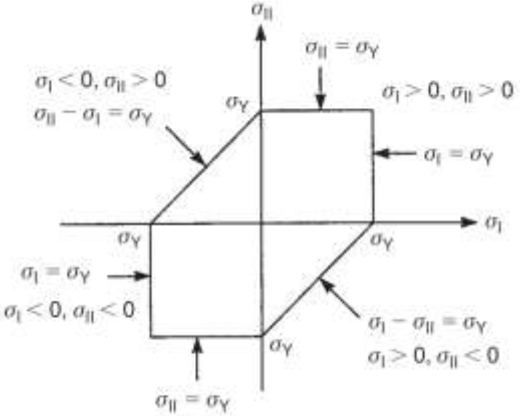
در آیین نامه‌ها σ_Y با عنوان تنش هم ارز شناخته می‌شود و مقادیر مجاز برای دسته‌های مختلفی از اعضای سازه‌ای معین است.

مکان هندسی تسلیم و وادادگی

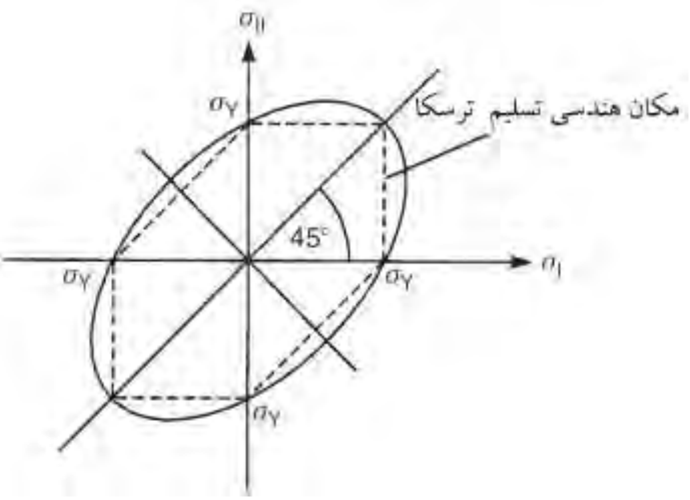
روابط١٤-٣٩ و ١٤-٥٤ را می‌توان به صورت ترسیمی برای یک سیستم تنش دو بعدی رسم نمود که در آن $\sigma_{III}=0$ باشد. فرض می‌شود که تنش تسلیم σ_Y در کشش و فشار یکسان است. شکل١٤-٢٠ مکان هندسی تسلیم برای بیشینه تنش برشی یا نظریه شکست الاستیک ترسکا، نشان می‌دهد. در ربع اول و سوم، هنگامی که σ_I و σ_{II} علامت یکسان دارند، شکست هنگامی رخ می‌دهد که $\sigma_I=\sigma_Y$ یا $\sigma_{II}=\sigma_Y$ (رابطه١٤-٤١)، البته بسته به

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

آن که کدام تنش اصلی زودتر به مقدار σ_Y می‌رسد. به عنوان مثال برای یک عضو سازه‌ای تحت اثر بارهایی که مقدار معین $\sigma_Y > \sigma_Y$ و مقادیر متغیر σ_I را تولید می‌کنند اگر بارها افزایش بیابند شکست هنگامی رخ می‌دهد که σ_I به مقدار σ_Y برسد، به صورت مشابه برای مقدار ثابت σ_I و مقدار متغیر σ_{II} در ربع دوم و سوم که σ_I و σ_{II}دارای علامت‌های مخالف هستند، شکست هنگامی رخ می دهد که $\sigma_I - \sigma_{II} = \sigma_Y$ یا $\sigma_{II} - \sigma_I = \sigma_Y$ باشد. (رابطه۱۴-۴۲) اما این روابط، معادله‌های خطوط مستقیم هستند. هر کدام دارای شیب ۴۵ درجه هستند و محور σ_Y را در σ_{II} قطع می‌کند.



شکل۱۴-۲۰ مکان هندسی تسلیم برای نظریه شکست الاستیک ترسکا



شکل۱۴-۲۱ مکان هندسی برای نظریه وون میسس

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

واضح است که تمام ترکیب های σ_I و σ_{II} که داخل مکان هندسی قرار بگیرند باعث شکست نخواهند شد، در حالی که تمام ترکیب های σ_I و σ_{II} که رو یا بیرون مکان هندسی قرار می‌گیرند باعث شکست خواهند شد. بنابراین داخل مکان هندسی نماینده شرایط الاستیک و خارج مکان هندسی نماینده شرایط پلاستیک است. به یاد داشته باشید که در مکان هندسی تسلیم، σ_I و σ_{II} قابل تعویض هستند. نظریه انرژی کرنش برشی (وون میسس) برای سیستم تنش دو بعدی در رابطه ١٤-٥٥ ارائه شده است. این معادله را می‌توان با یک بیضی نمایش داد که محورهای اصلی و فرعی آن با زاویه ٤٥ درجه نسبت به σ_I و σ_{II} مایل شده‌اند، مانند آنچه در شکل ١٤-٢١ نمایش داده شده است. همینطور می‌توان نشان داد که این بیضی از شش گوشه در مکان هندسی تسلیم ترسکا عبور می‌کند. بنابراین در این نقاط این دو نظریه دقیقاً نتایج برابری به ما می‌دهند. با این وجود برای سایر ترکیب‌های σ_I و σ_{II} نظریه ترسکا شکست را پیش بینی می‌کند در حالی که نظریه وون میسس پیش بینی‌ای ندارد، بدین ترتیب نظریه ترسکا محافظه کارانه تر است. اهمیت مکان هندسی تسلیم در کاربرد آن در بررسی صحت نظریه های مختلف در کارهای تجربی است. اعضای سازه‌ای ساخته شده از مصالح‌های گوناگون تحت یک دامنه و رنج کامل از ترکیبات σ_I و σ_{II} قرار می‌گیرند که ممکن است هرکدام موجب شکست شوند. سپس نتایج بر روی مکان هندسی تسلیم رسم می‌شود و صحت و سقم و تطابق با واقعیت در هر تئوری برای مصالح‌های مختلف تعیین می‌شود.

مثال ١٤-٧) وضعیت تنش در یک نقطه از عضو سازه‌ای با یک سیستم تنش دو بعدی به صورت زیر تعریف شده است:

$$\sigma_x = 140\frac{N}{mm^2}, \sigma_y = -70\frac{N}{mm^2}, \tau_{xy} = +60\frac{N}{mm^2}$$

اگر مصالح عضو دارای تنش تسلیم در کشش $225N/mm^2$ باشد، تعیین کنید که تسلیم بر طبق نظریه‌های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس رخ خواهد داد یا خیر؟

حل) اولین قدم تعیین تنش های اصلی σ_I و σ_{II} از روابط ١٤-٨ .و ١٤-٩ است.

$$\sigma_I = \frac{1}{2}(140-70)+\frac{1}{2}\sqrt{(140+70)^2 + 4\times 60^2} = 155.9\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{II} = \frac{1}{2}(140-70)-\frac{1}{2}\sqrt{(140+70)^2 + 4\times 60^2} = -85.9\frac{N}{mm^2}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

و از آنجایی که مقدار σ_{II} از نظر جبری کوچکتر از σ_{III} است (که برابر صفر است) رابطه۱٤-٤۲ کاربرد دارد. بنابراین:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 241.8\frac{N}{mm^2}$$

این مقدار از $\sigma_Y = 225 N/mm^2$ بزرگتر است پس بنابر تئوری ترسکا شکست رخ داده است. با جایگزاری مقادیر σ_Iو σ_{II} بالا در ۱٤-٥٥خواهیم داشت:

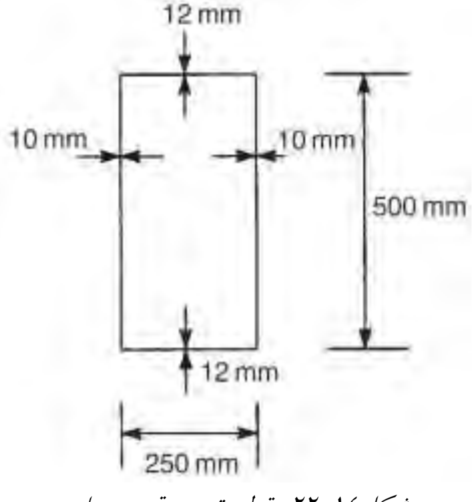
$$(155.9)^2 + (-85.9)^2 - (155.9)(-85.9) = 45075.4$$

ریشه دوم عبارت برابر با$212.3N/mm^2$است؛ بنابراین بر طبق نظریه وون میسس مصالح هنوزگسیخته نشده است.

مثال۱٤-۸) مقطع مستطیلی تیر ورق جعبه‌ای با جداره نازک(شکل۱٤-۲۲) تحت گشتاور خمشی*250kN.m* و گشتاور پیچشی *200kN.m* قرار دارد. اگر تنش هم ارز مجاز برای مصالح تیرورق جعبه‌ای $180N/mm^2$ باشد تعیین کنید که طرح با استفاده از شرایط لازم رابطه۱٤-٥٦ رضایت بخش است یا خیر؟

حل) بیشینه تنش برشی در مقطع در دیواره‌های عمودی مقطع رخ می‌دهد و به وسیله رابطه۱۱-۲۲ تعیین می‌شود:

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{2At_{min}} = \frac{200\times10^6}{2\times500\times250\times10} = 80\frac{N}{mm^2}$$



شکل۱٤-۲۲ مقطع تیر ورق جعبه‌ای

بیشینه تنش ناشی از خمش در بالا و پایین هر دیواره عمودی رخ می‌دهد و به وسیله رابطه ۹-۹ به دست می‌آید:

$$\sigma = \frac{My}{I}$$

که

$$I = 2\times12\times250\times250^2 + \frac{2\times10\times500^3}{12} = 583.3\times10^6 mm^4$$

بنابراین :

$$\sigma = \frac{250\times10^6\times250}{583.3\times10^6} = 107.1\frac{N}{mm^2}$$

با جانشانی این مقادیر در رابطه ١٤-٥٦ خواهیم داشت:

$$\sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{107.1^2 + 3\times80^2} = 175.1\frac{N}{mm^2}$$

این تنش هم ارز کمتر از مقدار مجاز ۱۸۰ نیوتن بر میلی متر مربع است بنابراین مقطع تیرورق جعبه‌ای مناسب و رضایت بخش است.

مثال ١٤-۹) تیری با مقطع مستطیلی ٦۰ میلی‌متر در ۱۰۰ میلی‌متر تحت بارکششی محوری ٦۰ هزار نیوتن قرار گرفته است. اگر مصالح تیر در کشش ساده در تنش ۱۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع گسیخته شود با استفاده از نظریه‌های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس بیشینه نیروی کششی‌ای که می‌توان بر مقطع تیر در جهتی موازی با ضلع بزرگترش وارد کرد را تعیین نمایید.

حل) تنش نرمال σ_x ناشی از بار محوری در طول سطح مقطع تیر، یکسان است و اینگونه به دست می‌آید:

$$\sigma_x = \frac{60000}{60\times100} = 10\frac{N}{mm^2}$$

بیشینه تنش برشی $\tau_{\max}$ در محور افقی تقارن مقطع تیر رخ می‌دهد و از رابطه ۱۰-۷ خواهیم داشت:

الف

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2}\times\frac{S_y}{60\times100}$$

از روابط ١٤-۸ و ١٤-۱۹ داریم:

$$\sigma_I = \frac{10}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 4\tau_{\max}^2}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\sigma_{II} = \frac{10}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{10^2 + 4\tau_{\max}^2}$$

یا

ب $$\sigma_I = 5 + \sqrt{25 + \tau_{\max}^2} \qquad \sigma_{II} = 5 - \sqrt{25 + \tau_{\max}^2}$$

از رابطه (ب) مشخص است که σ_{II} منفی است و از آنجایی که $5 < \left|25 + \tau_{\max}^2\right|$، بنابراین در نظریه ترسکا رابطه۱٤-٤۲ به کار می‌رود:

$$\sigma_I - \sigma_{II} = 2\sqrt{25 + \tau_{\max}^2} = 150\frac{N}{mm^2}$$

که خواهیم داشت:

$$\tau_{\max} = 74.8\frac{N}{mm^2}$$

بنابر رابطه (الف) داریم:

$$S_y = 299.3kN$$

حال با جانشانی σ_Iو σ_{II} در رابطه۱٤-٥٥ خواهیم داشت:

$$\left(5 + \sqrt{25 + \tau_{\max}^2}\right)^2 + \left(5 - \sqrt{25 + \tau_{\max}^2}\right)^2 - \left(5 + \sqrt{25 + \tau_{\max}^2}\right)\left(5 - \sqrt{25 + \tau_{\max}^2}\right) = 150^2$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{\max} = 86.4\frac{N}{mm^2}$$

دوباره ازرابطه (الف) خواهیم داشت:

$$S_y = 345.6kN$$

مصالح های ترد

مصالح ترد مثل چدن، بتن و سرامیک هنگامی که تحت تنش‌های کششی قرار می‌گیرند در مقادیر تنشی بسیار نزدیک به حد الاستیک گسیخته می‌شوند و دارای تنش تسلیم شدگی کم یا بدون تسلیم شدگی بر روی صفحات بیشینه تنش برشی هستند. در حقیقت صفحه گسیختگی بر خلاف مصالح نرم که دارای صفحات شکست مایل با زاویه تقریبی ٤٥ درجه نسبت به محور بارگذاری بودند در این حالت، عموماً مسطح و بر محور بارگذاری عمود است. در این مورد شکست بر روی صفحات، بیشینه تنش برشی رخ می‌دهد. (بخش‌های۸-۳ و ١٤-۲ را مشاهد نمایید.)

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

این امر بیان می‌کند که تنش‌های برشی تاثیری بر شکست مصالح ترد ندارند و رابطه مستقیمی بین تنش‌های اصلی در یک نقطه از مصالح ترد تحت سیستم بارگذاری مرکب و تنش گسیختگی تحت کشش یا فشار ساده وجود دارد. این موضوع اساس قابل قبول ترین نظریه شکست در مصالح ترد را شکل می‌دهد.

نظریه تنش نرمال بیشینه

این نظریه ، اغلب به رانکین[1] نسبت داده می‌شود و بیان می‌کند که: «شکست هنگامی رخ می‌دهد که مقدار یکی از تنش‌های اصلی به مقدار تنش تسلیم در کشش یا فشار ساده برسد». برای بیشتر مصالح ترد مقدار تنش گسیختگی در کشش، بسیار کمتر از تنش گسیختگی در فشار است. به عنوان مثال برای بتن σ_Y (در فشار) تقریبا ۲۰ برابر σ_Y (در کشش) است. بنابراین در هر مسئله لازم است تا بدانیم که کدام تنش تسلیم به دست می‌آید. فرض کنید که یک ماده ترد تحت یک سیستم بارگذاری مرکب که تولید تنش‌های اصلی σ_I، σ_{II} و σ_{III} می‌کنند مانند شکل۱۴-۱۸ قرار دارد. بنابراین برای $\sigma_I > \sigma_{II} > \sigma_{III} > 0$ گسیختگی هنگامی رخ می‌دهد که:

$$\sigma_I = \sigma_Y \quad \text{کشش} \qquad (۱۴-۵۷)$$

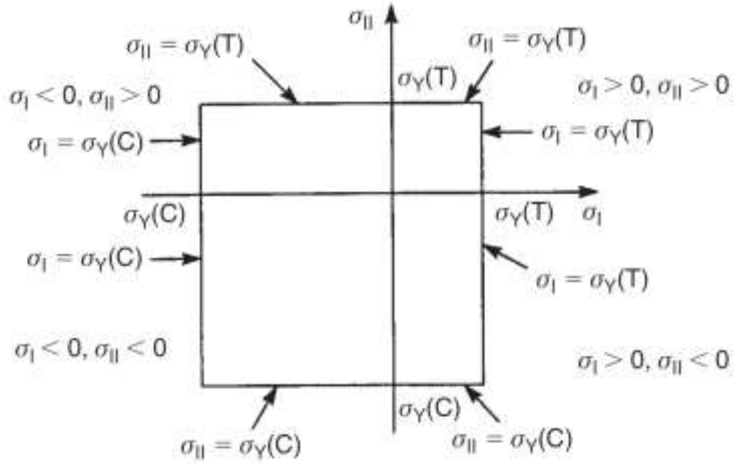
و همینطور برای $0 < \sigma_I > \sigma_{II} > 0$، $\sigma_{III} < 0$ و $\sigma_I < \sigma_Y$ (کشش) شکست هنگامی رخ می‌دهد که

$$\sigma_{III} = \sigma_Y \quad \text{فشار} \qquad (۱۴-۵۸)$$

و الی آخر.

می‌توان مانند نظریه‌های گسیختگی ترسکا و وون میسس در مصالح نرم مکان هندسی را برای یک مورد دو بعدی رسم کرد (در شکل۱۴-۲۳ نشان داده شده است). توجه داشته باشید که تنش گسیختگی در کشش $\sigma_Y(T)$ عموماً از تنش گسیختگی در فشار $\sigma_Y(C)$ کمتر است. مکان هندسی تسلیم به صورت متقارن حول محورهای σ_I و σ_{II}قرار نگرفته است. ترکیبات تنش مربوط به نقاط داخل مکان هندسی منجر به شکست نمی‌شوند در حالی که ترکیبات تنش σ_I و σ_{II} روی مکان هندسی یا خارج از آن منجر به گسیختگی می‌شوند.

[1] Rankine



شکل١٤-٢٣ مکان هندسی تسلیم برای یک ماده ترد

مثال١٤-١٠) تیر بتنی دارای مقطع مستطیلی دارای ابعاد٢٥٠ میلی متر در ٥٠ میلی متر است و دارای دهانه٤ متری به صورت دو سر ساده می‌باشد. اگر تنش گسیختگی در کشش ساده برای بتن $1.5N/mm^2$ باشد بیشینه بار متمرکزی که تیر در میان دهانه می‌تواند تحمل کند را تعیین کنید، از وزن خود تیر صرف نظر کنید.

حل) اگر بار متمرکز W نیوتن بر وسط تیر اعمال شود، بیشینه ممان خمشی در میانه دهانه رخ می دهد و برابر خواهد بود با:

$$\frac{4W}{4} = W$$

بیشینه تنش کششی مستقیم ناشی از خمش در تارهای پایینی تیر رخ می‌دهد و برابر است با:

$$\sigma = \frac{W \times 10^3 \times 250 \times 12}{250 \times 500^3} = W \times 9.6 \times 10^{-5}\, \frac{N}{mm^2}$$

در این نقطه بیشینه تنش اصلی از رابطه١٤-٨ برابر خواهد بود با:

$$\sigma_I = W \times 9.6 \times 10^{-5}\, \frac{N}{mm^2}$$

بنابراین از رابطه١٤-٥٧ مقدار بیشینه W به دست می‌آید:

$$\sigma_I = W \times 9.6 \times 10^{-5} = \sigma_Y \text{ کششی } = 1.5 \frac{N}{mm^2}$$

که خواهیم داشت:

$$W = 15.6kN$$

بیشینه تنش برشی در محور افقی تقارن مقطع تیر در هر تکیه گاه رخ می‌هد و از رابطه۱۰-۷ بدست خواهد آمد:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \times \frac{\frac{W}{2}}{250 \times 500}$$

یعنی:

$$\tau_{\max} = W \times 0.6 \times 10^{-5} \frac{N}{mm^2}$$

از رابطه۱٤-۸ بیشینه تنش اصلی برابر خواهد بود با:

$$\sigma_I = W \times 9.6 \times 10^{-5} = \sigma_Y \text{ کششی } = 1.5 \frac{N}{mm^2} \text{ کششی } = 1.5 \frac{N}{mm^2}$$

که خواهیم داشت:

$$W = 250\,kN$$

بنابراین بیشینه مقدار مجاز W برابر با ۱۵/٦کیلونیوتن است.

مسائل

۱) در یک نقطه از یک مصالح الاستیک دو صفحه متقابلاً متعامد وجود دارد که یکی از آنها دارای تنش کششی مستقیم ۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع و تنش برشی ٤۰ نیوتن بر میلی متر مربع است، صفحه دیگر تحت تنش فشاری مستقیم ۳۵ نیوتن بر میلی متر مربع و یک تنش برشی مکمل ٤۰ نیوتن بر میلی متر مربع قرار دارد. تنش‌های اصلی در این نقطه، موقعیت صفحه‌هایی که روی آنها اثر می‌کنند و موقعیت صفحه‌هایی که تنش نرمالی روی آنها وجود ندارد را تعیین کنید.

۲) یکی از تنش های اصلی در یک سیستم تنش دو بعدی ۱۳۹ نیوتن بر میلی متر مربع اعمال شده بر صفحه A است. بر روی صفحه دیگر با نام B تنش‌های نرمال ۱۰۸ و برشی ٦۲ نیوتن بر میلی متر مربع اعمال شده اند. موارد زیر را تعیین کنید:

الف) زاویه بین صفحات A و B

ب) تنش اصلی دیگر

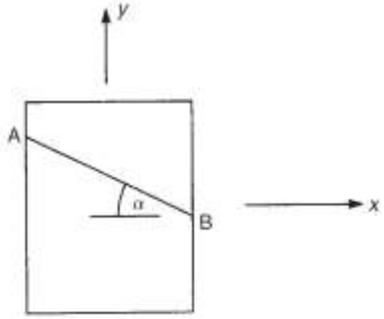
ج) تنش عمود بر روی صفحه متعامد بر B

۳) می‌توان وضعیت تنش در یک نقطه از یک عضو سازه‌ای را با یک سیستم تنش دو بعدی شامل شرایط زیر نشان داد: تنش نرمال در صفحه مایل با زاویه ٦٠ درجه نسبت به جهت مثبت σ_x و تنش‌های اصلی را تعیین کنید. همچنین زاویه تمایل صفحات اصلی را نسبت به صفحه ای که σ_x بر آن اعمال می‌شود محاسبه کنید. درستی پاسخ خود را با یک روش ترسیمی بررسی کنید.

٤) تنش برشی و نرمال صفحه AB در شکل ١٤-٢٤ را در حالت‌های زیر تعیین کنید:

۱) $\alpha = 60^\circ, \sigma_x = 54\dfrac{N}{mm^2}, \sigma_y = 30\dfrac{N}{mm^2}, \tau_{xy} = 5\dfrac{N}{mm^2}$

۲) $\alpha = 120^\circ, \sigma_x = -60\dfrac{N}{mm^2}, \sigma_y = -36\dfrac{N}{mm^2}, \tau_{xy} = 5\dfrac{N}{mm^2}$



شکل١٤-٢٤ صفحه مسئله٤

۵) تنش برشی τ_{xy} در یک میدان دو بعدی عمل می‌کند که بیشینه تنش برشی و تنش اصلی بزرگ آن به ترتیب با علامت های $\tau_{\max}$ و σ_1 نمایش داده می‌شوند. با استفاده از هندسه دایره موهر تنش‌ها، عبارتی را بر حسب پارامترهای مشخص برای بیشینه مقادیر تنش نرمال که بر صفحات x و y اعمال می‌شود استخراج کنید.

٦) در یک آزمایش تجربی برای تعیین تنش‌های اصلی، مقطع طره‌ای توخالی دارای مقطع دایروی تحت گشتاور خمشی متغییر و گشتاور پیچشی قرار گرفته است. قطر داخلی و

خارجی طره ٤٠ و ٥٠ میلی متر است. در شرایط بارگذاری مفروض گشتاور خمشی و پیچشی در یک برش خاص از طره به ترتیب برابر با ١٠٠ و ٥٠ نیوتن متر هستند. بیشینه و کمینه تنش‌های اصلی در نقطه‌ای در سطح خارجی طره در این برش که در آن تنش نرمال ناشی از ممان خمشی کششی است را محاسبه کنید. بیشینه تنش برشی در نقطه و زاویه تمایل تنش‌های اصلی با محور طره را تعیین کنید.
مقادیر تجربی تنش های اصلی از قرائت‌های یک کرنش سنج رزت تخمین زده می‌شود که با زاویه ٤٥ درجه، به گونه‌ای نصب شده است که یکی از بازوهایش موازی و دیگری عمود بر محور طره است. برای شرایط بارگذاری لنگر صفر و ممان خمشی متغیر، نرخ قرائت‌های این کرنش‌سنج را تفسیر کنید.

٧) سیلندر جدار نازکی با قطر داخلی ١٢٠٠ میلی متر و دیواره‌هایی با ضخامت١/٢ میلی متر تحت فشار داخلی ٠/٧ نیوتن بر میلی متر مربع و یک گشتاور پیچشی حول محور طولی به اندازه ٥٠٠ نیوتن در متر است. تنش‌های اصلی در نقطه‌ای در دیواره سیلندر و همینطور بیشینه تنش برشی را تعیین کنید.

٨) قطعه‌ای مستطیلی از مصالح، تحت تنش کششی ٨٣ و ٦٥ نیوتن بر میلی متر مربع در دو وجه متقابلا متعامد قرار دارد. کرنش را در راستای هر تنش و در راستای عمود بر هر تنش را بیابید. بیشینه کرنش برشی در صفحه تنش‌ها، بیشینه تنش برشی و جهت‌های آنها را نیز تعیین کنید. مقدار E را برابر با$200000 N/mm^2$ و ضریب پواسون را برابر $\nu = 0.3$ در نظر بگیرید.

٩) تیر طره‌ای با طول ٢ متر دارای مقطع مستطیلی ١٠٠ میلی متر پهنا و ٢٠٠ میلی متر ارتفاع است. این تیر تحت بار محوری به صورت کششی P و یک بار گسترده با شدت یکنواخت W و رو به پایین است. یک کرنش سنج مستطیلی رزت بر روی یک ضلع عمودی تیر در انتهای گیردار تیر و در صفحه خنثی آن نصب شده است و مقادیر کرنش زیر را ثبت کرده است:

$\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}, \varepsilon_b = 100 \times 10^{-6}, \varepsilon_c = -300 \times 10^{-6}$

بازوی a روزت با محور طولی تیر هم ردیف است و بازوی c عمود بر محور عمودی تیر است. مقدار ضریب پواسون، کرنش‌های اصلی در نقطه مورد نظر و مقادیر P و w را محاسبه کنید. مدول یانگ E را برابر با $200000N/mm^2$ فرض کنید.

۱۰) تیری دارای مقطع قوطی جدار نازک مستطیلی با پهنای ۵۰ میلی متر و ارتفاع ۱۰۰ میلی متر و ضخامت دیواره ۲ میلی متر است. در یک مقطع خاص تیر ممان خمشی M و لنگر T را حمل می‌کند. کرنش سنج رزت مستطیلی‌ای که بر دیواره افقی بالایی تیر قرار داده شده است مقادیر زیر را برای کرنش‌ها ثبت کرده است:

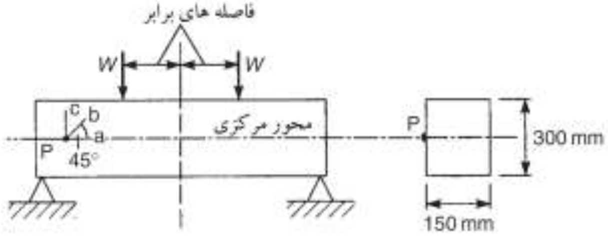
$\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}, \varepsilon_b = -200 \times 10^{-6}, \varepsilon_c = -300 \times 10^{-6}$

اگر بازوی a کرنش سنج با محور طولی تیر هم ردیف، بازوی c کرنش سنج عمود بر محور طولی تیر باشد مقادیر M و T را محاسبه کنید. مقدار E را برابر با $200000N/mm^2$ و پواسون را برابر $\nu = 0.3$ در نظر بگیرید.

۱۱) تیر با تکیه‌گاه دو سر مفصل شکل١٤-٢٥ دو بار عرضی متقارن w را حمل می‌کند. کرنش‌سنج مستطیلی رزت کار گذاشته شده در نقطه P قرائت‌های زیر را از کرنش می‌دهد:

$\varepsilon_a = -222 \times 10^{-6}, \varepsilon_b = -213 \times 10^{-6}, \varepsilon_c = 45 \times 10^{-6}$

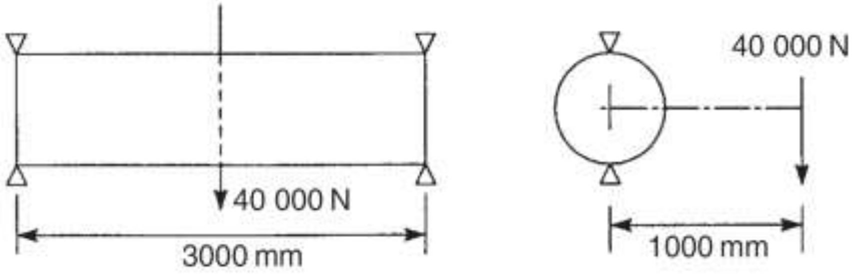
همچنین تنش نرمال P ناشی از یک بار فشاری محوری خارجی برابر با ۷ نیوتن بر میلی متر مربع است. بزرگی بار عرضی را محاسبه کنید. مقدار E را برابر با $31000N/mm^2$ و پواسون را برابر $\nu = 0.2$ در نظر بگیرید.



شکل١٤-٢٥

۱۲) در یک آزمایش کشش بر یک نمونه فلزی با سطح مقطع ۲۰ در ۱۰ میلی‌متر، شکست الاستیک در بار ۷۰ هزار نیوتن رخ داده است. ورق نازکی از همان مصالح قرار است به گونه‌ای تحت بارگذاری قرار بگیرد که در یک نقطه خاص در صفحه تنش‌ها مقادیر زیر برای آن تعریف شده باشند. بیشینه مقادیر مجاز σ_x را با استفاده از نظریه‌های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس بیابید.

۱۳) تیری با مقطع دایره‌ای، ۳۰۰۰ میلی متر طول دارد و در هر انتها به تکیه‌گاهی وصل است که به انتهای تیر اجازه دوران در صفحات عمودی طولی تقارن می‌دهد اما از دوران انتهاهای تیر در صفحات عمودی متعامد بر محور تیر جلوگیری می‌کند.(شکل ١٤-٢٦) تیر دارای بار دارای برون محوری و فاصله دار، ٤٠٠٠٠ نیوتن در میان دهانه است. اگر مصالح تیر در تنش کشش ساده ١٤٥ نیوتن بر میلی متر مربع دچار گسیختگی الاستیک شود کمترین قطر تیر را بر اساس نظریه های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس محاسبه کنید.

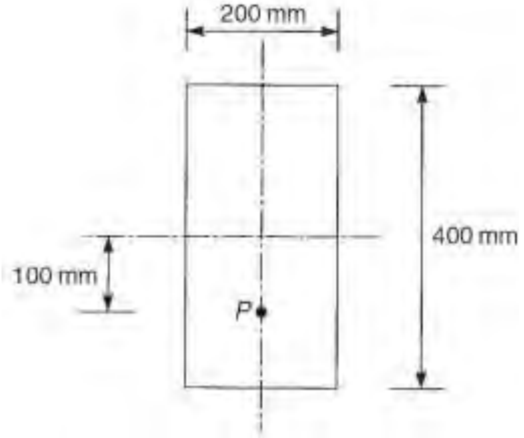


شکل ١٤-٢٦

١٤) تیر طره‌ای با سطح مقطع دایره‌ای، قطر ۱۵۰ میلی متر و ساخته شده از فولاد، هنگامی که تحت کشش ساده قرار می‌گیرد، در تنش ۱۵۰ نیوتن بر میلی متر مربع دچار گسیختگی الاستیک می‌شود. این طره، گشتاور خمشی و پیچشی را تحمل می کند که گشتاور پیچشی دو برابر گشتاور خمشی است. بیشینه مقادیر مجاز ممان خمشی و لنگر را بر اساس نظریه‌های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس بیابید.

١٥) مصالحی خاص دارای تنش تسلیم در کشش ساده ۳۸۷ نیوتن بر میلی متر مربع است. حد تسلیم در فشار با مقدار آن در کشش یکسان است. این مصالح تحت سه تنش با جهت‌های متقابل متعامد است. تنش‌ها با نسبت *3:2:-1.8* هستند. تنش‌هایی که باعث شکست می‌شوند را بر اساس نظریه‌های شکست الاستیک ترسکا و وون میسس بیابید.

١٦) ستونی دارای مقطعی مانند شکل١٤-٢٧، بار فشاری P را به صورت موازی با محور طولی خود حمل می‌کند. اگر تنش‌های گسیختگی مصالح ستون در کشش ساده ٤ و در فشار ساده ٢٢ نیوتن بر میلی متر مربع باشند، بیشینه مقدار مجاز P را با استفاده از نظریه بیشینه تنش نرمال بیابید.



شکل١٤-٢٧

فصل پانزدهم
روش‌های انرژی و کار مجازی

مقدمه

بیشتر مسائل سازه‌ای که تا اینجا ما با آنها رو در رو شده‌ایم شامل سازه‌هایی بودند که عکس العمل‌های تکیه گاهی و سیستم نیروهای داخلی آنها از نظر استاتیکی معین بود. لیکن سازه‌هایی مانند تیرها، خرپاها، کابل‌ها و طاق‌های سه مفصلی و در مورد تیرها، ما تغییر مکان‌ها را محاسبه نمودیم. همچنین برخی سازه‌های نامعین استاتیکی نیز بررسی شدند. سازه‌هایی شامل اعضای سازه‌ای مختلط در بخش۷-۱۰ و تیرهای یا مقطع دایروی تحت پیچش، دارای تکیه گاه در دو انتها در بخش۱۱-۱ بررسی شدند. این مسائل نسبتاً ساده، با استفاده از ترکیبی از تعادل استاتیکی و معادلات سازگاری جابجایی حل شدند. علاوه بر این در بخش۱۳-٦، یک تیر طره پایه‌دار با استفاده از اصل جمع آثار قوا تحلیل شد. در حالی که عکس العمل‌های تکیه گاهی بعضی از موارد تیرهای دو سرگیردار به وسیله ترکیبی از شرایط تعادل تکیه گاهی و روش لنگر سطح تعیین می‌شد. این روش ها برای مسائل نسبتا ساده کاملا مناسب بودند. با این وجود، برای سازه‌های پیچیده‌تر روش‌های بهتر تحلیل نیاز است که دارای درجه بالاتری از نامعینی استاتیکی باشند. این روش‌ها همچنین قادر خواهند بود تا راه حل‌های سریع را برای برخی مسایل معین استاتیکی، به ویژه آنهایی که شامل محاسبه جابجایی‌ها می‌شوند فراهم کنند.

این روش‌ها به دو دسته تقسیم خواهند شد و بر مبنای دو مفهوم مهم بنا شده اند، اولی اصل کار مجازی است. اصل کار مجازی اساسی‌ترین و قوی ترین ابزار موجود برای تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی است و این مزیت را دارد که قابلیت رویارویی با شرایطی بیش از شرایط موجود در حدود الاستیک را دارد . مفهوم دوم، بر اساس انرژی کرنش بنا شده است و این قابلیت را دارد که می‌تواند برای مسایل پیچیده که ممکن است جواب‌های دقیق برای آنها وجود نداشته باشد جواب هایی تقریبی تامین کند. در حقیقت دو روش در بعضی موارد هم ارز هستند، هر چند معادلات حاکم بر دو روش متفاوت هستند، اما در بعضی

موارد معادله‌ها با با هم یکسان هستند. در تحلیل سازه‌های مدرن به صورت فراوان از تکنیک‌های بر مبنای کامپیوتر استفاده می‌شود. این روش‌ها شامل روش های سختی و نرمی[1] هستند. از آنجا که فرمولاسیون ماتریس‌های سختی المان‌های یک سازه پیچیده بر اساس یکی از راهکارهای بالاست داشتن دانش و فهم کاربرد آنها دارای مزیت خواهد بود. ما روش‌های سختی و نرمی و نقش آنها در تحلیل کامپیوتری را در فصل ١٦ بررسی خواهیم نمود. راهکارهای دیگر متخصصان در برخی مسائل خاص توسعه یافته‌اند. نمونه‌هایی از این راهکارها روش شیب افت در تیرها و روش پخش لنگر برای تیرها و قاب‌ها است. این روش ها نیز در فصل ١٦ که ما سازه‌های نامعین استاتیکی را مورد بررسی قرار خواهیم داد توضیح داده خواهند شد. در ابتدا، در این فصل ما اصل کار مجازی، قضایای مختلف انرژی و برخی از کاربردهای این دو مفهوم را بررسی می‌نماییم.

١٥-١ کار

قبل از اینکه اصل کار مجازی[2] را با جزییات مورد بررسی قرار بدهیم این امر که کار دقیقاً چیست از اهمیت برخوردار است. تعریف پایه‌ای کار در مکانیک مقدماتی این است که: «کار هنگامی انجام می‌شود که یک نیرو، نقطه اثرش را حرکت می‌دهد». هر چند ما به تعریف دقیق‌تری از کار نیازمندیم زیرا ما با کارهایی در تعاملیم که توسط نیروها و لنگرها انجام می‌شوند، همینطور با کارهایی رو در روییم که جسمی که نیرو بر آن اثر می‌کند دارای یک جابجایی معین است که بر خط اثر نیرو منطبق نیست. فرض کنید نیروی F بر ذره A اثر می‌کند. (شکل١٥-١الف) اگر ذره دارای جابجایی معین Δ باشد و توسط یک عامل خارجی در جهتی با زاویه α با خط اثر نیروی F به A' جابجا شود کار نیروی F یا W_F از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W_F = F(\Delta\cos\alpha) \qquad (١٥-١)$$

یا

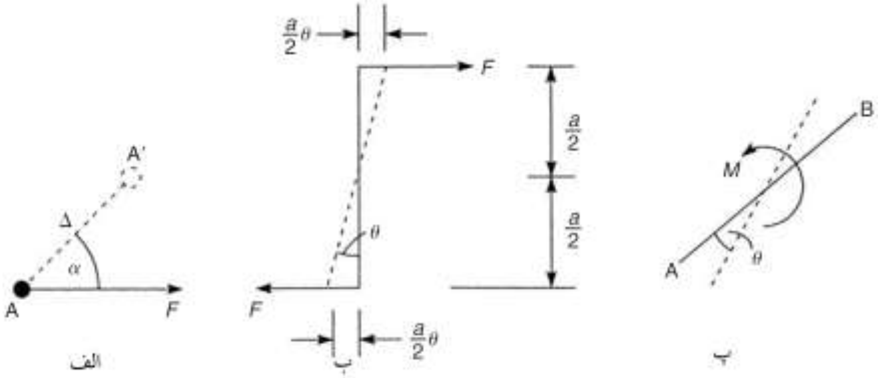
$$W_F = F(\cos\alpha)\Delta \qquad (١٥-٢)$$

[1] Flexibility
[2] Virtual work

بدین ترتیب می‌بینیم که کار انجام شده توسط نیروی F هنگامی که ذره از A به A' حرکت می‌کند می‌تواند از دو بخش F و Δ در راستای F (رابطه۱۵-۱) یا از دو بخش F در راستای Δ و Δ باشد (رابطه۱۵-۲).

حال کوپل (گشتاور خالص) شکل۱۵-۱ب را در نظر بگیرید و فرض کنید دارای دوران کوچک θ رادیان باشد. کار انجام شده توسط هر نیرو برابر $F(a/2)\theta$ خواهد بود و کار نهایی انجام شده W_c توسط کوپل برابر خواهد بود با:

$$W_C = F\frac{a}{2}\theta + F\frac{a}{2}\theta = Fa\theta$$



شکل۱۵-۱ کار انجام شده توسط نیرو و گشتاور

در ادامه برای کار انجام شده W_Mتوسط گشتاور خالص M اثر کننده بر میله AB (شکل۱۵-۱پ) با دوران کوچک مفروض θ خواهیم داشت:

$$W_M = M\theta \qquad (۱۵-۳)$$

توجه داشته باشید که در رابطه‌های ذکر شده بالا، F و گشتاور M پیش از وقوع تغییر مکان در موقعیت قرار دارند و عامل آن نیستند. همچنین در شکل۱۵-۱الف، مولفه و جزء Δ موازی راستای نیروی F، در همان راستای F است. اگر در راستای مخالف باشد کار انجام شده منفی خواهد بود. چنین استدلالی برای گشتاور نیز به کار می‌رود. در شکل۱۵-۱پ می‌بینیم که دوران θ در جهت M است. همچنین توجه داشته باشید که اگر تغییر مکان Δ عمود بر نیرو باشد کاری توسط F انجام نمی‌شود. در نهایت باید به یاد داشته باشیم که کار یک مقدار اسکالر است و از آنجایی که دارای جهت نیست (در شکل۱۵-۱الف، اگر ذره در

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

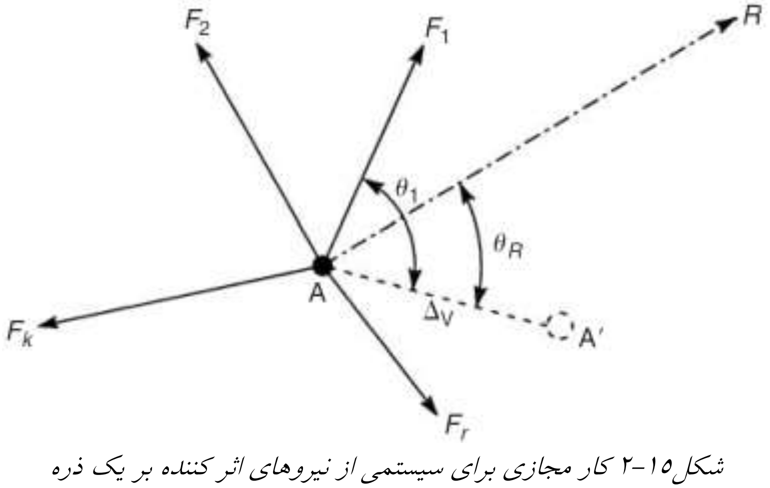
هر جهتی حرکت کند نیروی F کار انجام می‌دهد) مجموع کار انجام شده توسط دسته‌ای از نیروها برابر با جمع جبری کار انجام شده توسط تک تک آنهاست.

۱۵-۲ اصل کار مجازی

برپایی اصل در چند مرحله انجام خواهد شد، در ابتدا ما باید یک ذره را بررسی کنیم، سپس یک جسم صلب و در نهایت یک جسم تغییر شکل پذیر، که دارای کاربرد عملی مورد نیاز ما در تحلیل سازه‌هاست.

اصل کار مجازی برای ذره

در شکل۱۵-۲ یک ذره با نام A تحت اثر نیروهای همرس $F_1,F_2,...,F_K,...,F_r$ قرار گرفته است. برآیند این نیروها R است. فرض کنید که ذره دارای جابجایی دلخواه و کوچک مفروض Δ_V است و به نقطه A' در یک جهت خاص حرکت می‌کند. مقدار Δ_V یک مقدار غیر واقعی یا مجازی است و به حدی کوچک است که راستاهای نیروهای $F_1,F_2,...,F_K,...,F_r$ بدون تغییر باقی می‌مانند. زاویه θ_R را زاویه بردار برآیند R با راستای Δ_V و زاویه های $F_1,F_2,...,F_K,...,F_r$ را زاویه های $\theta_1, \theta_2,..., \theta_K,...,\theta_r$ با راستای Δ_V در نظر بگیریم.



شکل۱۵-۲ کار مجازی برای سیستمی از نیروهای اثر کننده بر یک ذره

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

سپس از روابط ۱۵-۱ و ۱۵-۲ کار مجازی نهایی W_F انجام شده توسط نیروهای F که ذره را در جابجایی مجازی Δ_V حرکت می‌دهد از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$W_F = F_1\Delta_V \cos\theta_1 + F_2\Delta_V \cos\theta_2 + \ldots + F_k\Delta_V \cos\theta_k + \ldots + F_r\Delta_V \cos\theta_r$$

بنابراین:

$$W_F = \sum_{k=1}^{r} F_k\Delta_V \cos\theta_k$$

یا علیرغم مجازی بودن از آنجاییکه Δ_V ثابت است:

$$W_F = \Delta_V \sum_{k=1}^{r} F_k \cos\theta_k \qquad (١٥-٤)$$

در رابطه۱۵-٤ $\sum_{k=1}^{r} F_k \cos\theta_k$ جمع تمام مولفه‌های نیروی F در راستای Δ_V است و بنابراین باید برابر مولفه برآیند نیروهای F یعنی R در راستای Δ_V باشد، یعنی:

$$W_F = \Delta_V \sum_{k=1}^{r} F_k \cos\theta_k = \Delta_V R\cos\theta_R \qquad (١٥-٥)$$

اگر ذره A تحت اثر نیروهای $F_1, F_2, \ldots, F_K, \ldots, F_r$ در تعادل باشد، برآیند نیروها طبق فصل دوم برابر با صفر خواهد بود. در ادامه از رابطه۱۵-۵ خواهیم داشت که کار مجازی انجام شده توسط نیروها F در طول جابجایی مجازی Δ_V برابر با صفر خواهد بود. پس قادر خواهیم بود تا اصل کار مجازی برای ذره را به صورت زیر ارائه دهیم:

«اگر یک ذره تحت اثر تعدادی نیرو در تعادل باشد کار نهایی انجام شده توسط نیروها با یک جابجایی دلخواه کوچک ذره برابر صفر است».

اگر جابجایی مجازی در جهتی عمود بر بردار برآیند R باشد ممکن است که کار نهایی انجام شده توسط نیروها برابر صفر باشد، حتی اگر ذره در تعادل نباشد. پس ما نمی‌توانیم عکس قضیه را ارائه بدهیم مگر اینکه مشخصاً بگوییم که کار نهایی انجام شده باید برای هر جابجایی دلخواه برابر صفر باشد. بنابراین:

«یک ذره تحت اثر سیستمی از نیروها در تعادل است اگر کار نهایی انجام شده توسط نیروها برای هر جابجایی مجازی ذره برابر با صفر باشد»

توجه داشته باشید که در بالا Δ_V یک جابجایی کاملا غیر حقیقی و مجازی است و هرگز رابطه‌ای با جابجایی ممکن ذره تحت اثر نیروهای F ندارد. Δ_V فقط به عنوان ابزاری برای

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

رابطه کار- تعادل (رابطه۱۵-۵) عرضه شد. بنابراین نیروهای F بدون تغییر در بزرگی و راستا در طی جابجایی مجازی باقی خواهند ماند. این امر هنگامی که جابجایی‌ها حقیقی باشند صادق نیست.

اصل کار مجازی برای جسم صلب

جسم صلب شکل۱۵-۳ را فرض کنید که تحت اثر سیستمی از نیروهای خارجی مثل $F_1, F_2, ..., F_K, ..., F_r$ است، نیروهای خارجی، نیروهای داخلی‌ای را در جسم ایجاد می‌کنند. می‌توان فرض کرد که جسم شامل بی‌نهایت ذره است. ذره‌هایی مجاور و نزدیک به هم مثل A_1 و A_2، این نیروهای داخلی برابر و در خلاف جهت خواهند بود. به عبارت دیگر خود متعادل کننده. حال فرض کنید که جسم صلب دارای یک مقدار معین جابجایی مجازی کوچک در برخی جهت های مشخص است که با Δ_V نمایش داده می‌شود. (یا یک دوران یا ترکیبی از هر دو). پس نیروهای داخلی و خارجی کار مجازی انجام می‌دهند و کار مجازی نهایی W_t جمع کار مجازی انجام شده توسط نیروهای خارج W_e و کار مجازی انجام شده توسط نیروهای داخلی W_i است. بنابراین:

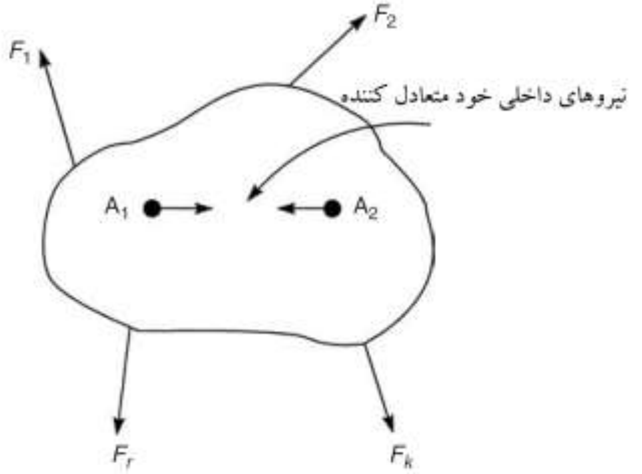
$$W_t = W_e + W_i \qquad (۱۵-٦)$$

از آنجایی که جسم، صلب است، تمام ذره‌های جسم با یک جابجایی معین Δ_V حرکت می‌کنند. بنابراین کار مجازی انجام شده بر تمام ذره‌ها از نظر عددی برابر است. هر چند، برای دو ذره مجاور مثل A_1 و A_2 در شکل۱۵-۳ نیروهای خود متعادل کننده در جهت‌های مخالف هستند و این به آن معناست که کار انجام شده روی A_1 منفی کار انجام شده روی A_2 است. بنابراین جمع کار مجازی انجام شده روی A_1 و A_2 برابر صفر است. این استدلال را می‌توان بر روی تعداد نامحدودی از جفت ذره‌های جسم تعمیم داد و نتیجه گیری کرد که کار مجازی ناشی از جابجایی مجازی در داخل یک جسم صلب صفر است. به همین دلیل رابطه۱۵-٦ به صورت زیر ساده می‌شود:

$$W_t = W_e \qquad (۱۵-۷)$$

از آنجایی که جسم صلب است و کار مجازی داخلی برابر صفر است جسم را می‌توان به عنوان یک ذره بزرگ در نظر گرفت. در ادامه اگر جسم تحت اثر مجموعه بارهای

$F_1,F_2,...,F_K,...,F_r$ در تعادل باشد. کار مجازی نهایی انجام شده توسط نیروهای خارجی در طی یک جابجایی مجازی دلخواه جسم برابر صفر خواهد بود.

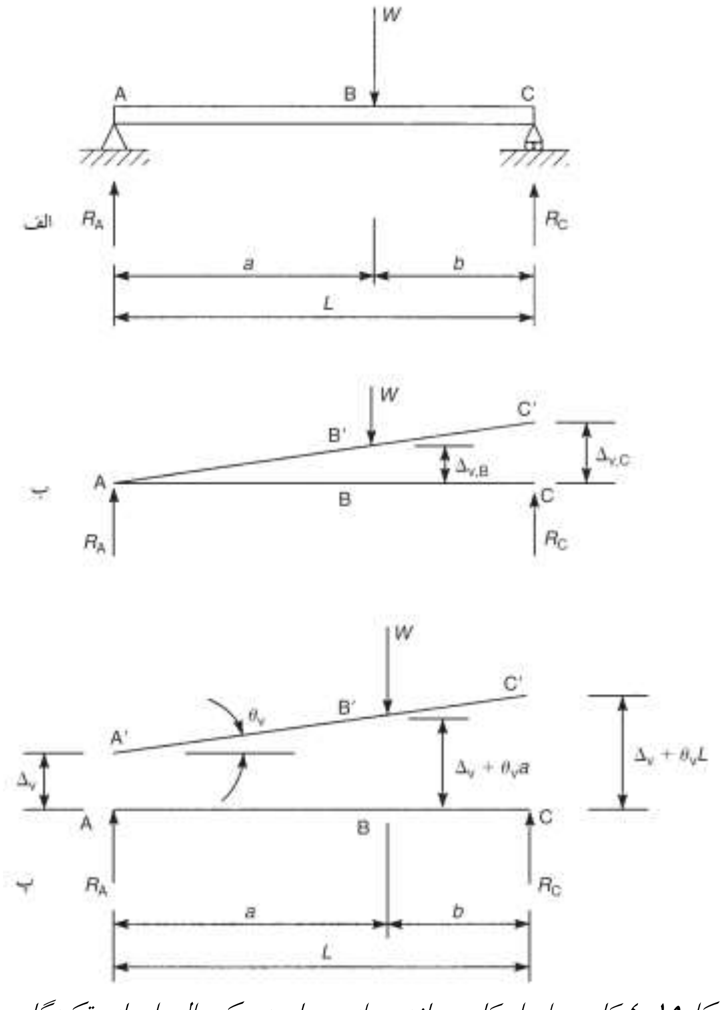


شکل۱۵-۳ کار مجازی برای یک جسم صلب

اصل کار مجازی در حقیقت یک آلترناتیو از رابطه۱۰-۲ بـرای تعیـین شـرایط لازم سیسـتم نیروهای هم صفحه جهت برقرار شدن تعادل است. برای مشخص شدن درستی این امر مـا محاسبات عکس العمل‌های تکیه‌گاهی یک تیر ساده را بررسی می‌کنیم.

مثال۱۵-۱) عکس العمل‌های تکیه گاهی تیر دو سر ساده، شکل۱۵-٤ را محاسبه کنید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۵-٤ کاربرد اصل کار مجازی برای محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی

فقط یک بار عمودی روی تیر اعمال شده به صورتی که فقط عکس العمل های عمودی R_A و R_C تولید می‌شوند. فرض کنید که تیر در C دارای مقدار جابجایی غیر واقعی و کوچک Δ_{VC} در جهت R_C همانند آنچه در شکل۱۵-٤ب نشان داده شده است باشد. از آنجایی که ما در اینجا فقط با نیروهای خارجی اثر کننده بر تیر سر و کار داریم می‌توانیم تیر را به عنوان یک جسم صلب در نظر بگیریم. بنابراین تیر حول A دوران می‌کند و C به C' حرکت می‌کند و B به B'. از مثلث‌های متشابه خواهیم داشت:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

الف $$\Delta_{V,B} = \frac{a}{a+b}\Delta_{V,C} = \frac{a}{L}\Delta_{V,C}$$

کار مجازی نهایی W_t انجام شده توسط نیروهای اثر کننده بر تیر از رابطه زیر قابل محاسبه خواهد بود:

ب $$W_t = R_C\Delta_{V,C} - W\Delta_{V,B}$$

توجه داشته باشید که کار انجام شده توسط بار W، منفی است زیرا $\Delta_{V,B}$ در جهت مخالف اثر نیرو است. همچنین توجه کنید که واکنش تکیه گاهی R_A کاری انجام نمی‌دهد زیرا تیر حول A می‌چرخد. حال با جایگزاری $\Delta_{V,B}$ در معادله (ب)، از معادله (الف) خواهیم داشت:

پ $$W_t = R_C\Delta_{V,C} - W\frac{a}{L}\Delta_{V,C}$$

از آنجایی که تیر در تعادل است، W_t طبق اصل کار مجازی برابر صفر است، بنابراین از معادله (پ) خواهیم داشت:

$$R_C\Delta_{V,C} - W\frac{a}{L}\Delta_{V,C} = 0$$

که می‌دهد:

$$R_C = W\frac{a}{L}$$

از بررسی تعادل لنگر تیر، حول A ، R_A با روشی مشابه به دست خواهد آمد، فرض کنید که به جای جابجایی منفرد Δ_{VC} تمام تیر دارای جابجایی مجازی معین Δ_V باشد. همراه با یک دوران مجازی θ_V حول A مانند آنچه در شکل١٥-٤پ نشان داده شده است. کار مجازی نهایی W_t انجام شده توسط نیروهای وارد بر تیر در این حالت اینگونه تعیین می‌شود:

ت $$W_t = R_C\Delta_V - W(\Delta_V + a\theta_V) + R_C(\Delta_V + L\theta_V) = 0$$

از آنجایی که تیر در تعادل است، با مرتب کردن رابطه (ت) خواهیم داشت:

ث $$(R_A + R_C - W)\Delta_V + (R_CL - Wa)\theta_V = 0$$

معادله (ث) برای تمام مقادیر Δ_V و θ_V معتبر است به گونه‌ای که:

$$R_A + R_C - W = 0 \qquad R_CL - Wa = 0$$

که این معادله‌ها، معادله‌های تعادلی است که ما از حل نیرو در راستای عمود، و گرفتن لنگرها حول A به دست خواهیم آورد. پیشنهاد نمی‌شود که به خاطر اصل کار مجازی از

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

کاربرد معادله۲-۱۰ صرف نظر شود. منظور مسئله۱۵-۱ نمایش کاربرد تغییر مکان مجازی و روالی است که این اصل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

کار مجازی در جسم تغییر شکل پذیر

در تحلیل سازه‌ها ما به صورت کلی با نیروهایی که بر یک جسم صلب اثر می‌کنند سر و کار نداریم . سازه‌ها و اعضای سازه‌ای، تحت بار تغییر شکل می‌دهند. این امر بدان معناست که اگر ما یک جابجایی مجازی به یک نقطه خاص از سازه اختصاص بدهیم مانند سازه‌های صلب تمام نقطه‌های سازه همان جابجایی مجازی را نخواهند داشت. یعنی مانند جسم صلب کار مجازی ناشی از نیروهای داخلی دیگر صفر نیست، زیرا کار مجازی ناشی از نیروهای خود متعادل کننده در ذره‌های مجاور یکدیگر را خنثی نمی‌کنند. بنابراین کار مجازی نهایی ناشی از اثر تغییر مکان مجازی در یک جسم تغییر شکل پذیر تحت یک سیستم نیروهای خارجی از رابطه ۱۵-٦ به دست می‌آید.

اگر جسم، تحت اثر سیستم نیروهای خارجی در تعادل باشد بنابراین هر ذره جسم در تعادل است. به همین دلیل از اصل کار مجازی می‌توان استنتاج کرد که کار مجازی انجام شده توسط نیروهای اثر کننده بر ذره بدون توجه به داخلی بودن یا خارجی بودن آنها برابر صفر است. در ادامه از آنجاییکه کار مجازی برای همه ذره‌های جسم صفر است برای تمام جسم صفر است و معادله۱۵-٦ به صورت زیر می‌شود:

$$W_i + W_e = 0 \qquad (۱۵-۸)$$

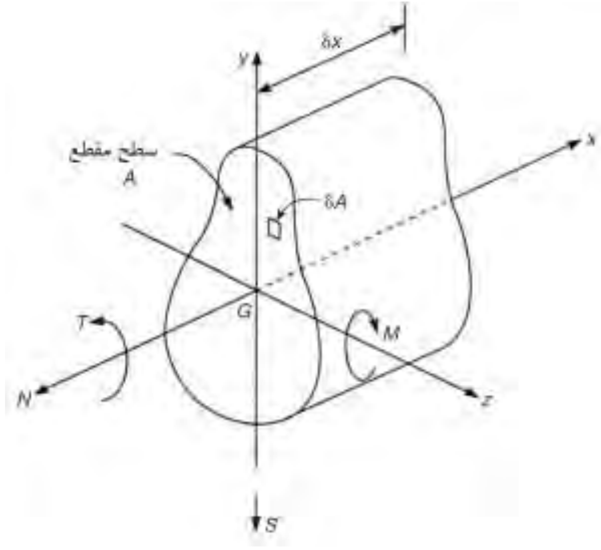
توجه داشته باشید که در استدلال بالا فقط مفاهیم شرایط تعادل و کار مورد استفاده قرار گرفتند. بنابراین معادله ۱۵-۸ به این نیاز ندارد که جسم تغییر شکل پذیر از نظر الاستیک، خطی باشد. (لازم نیست از قانون هوک پیروی کند) بنابراین اصل کار مجازی را می‌توان در مورد جسم صلب، الاستیک یا پلاستیک به کار برد. این اصل به این امر نیاز دارد که جابجایی‌ها، چه حقیقی و چه مجازی کوچک باشند تا ما بتوانیم فرض کنیم که نیروهای داخلی و خارجی چه از نظر بزرگی و چه از نظر جهت در طول جابجایی بدون تغییر مانده‌اند. علاوه بر این جابجایی‌های مجازی باید با هندسه سازه و قیدهای اعمال شده (مانند تکیه‌گاه‌ها)، سازگار باشند. استثنا شرایطی مثل مسئله۱۵-۱ است که ما جابجایی مجازی را در تکیه‌گاه در نظر می‌گیریم، این راهکار در این حالت از آنجایی معتبر است که

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

ما کار انجام شده توسط عکس العمل‌های تکیه‌گاه را در معادله کار مجازی نهایی در نظر می‌گیریم.

کار انجام شده توسط سیستم نیروهای داخلی

کار انجام شده توسط یک نیروی خارجی، محصول نیرو و جابجایی نقطه اثر در راستای خط اثر است. (روابط ۱۵-۱، ۱۵-۲ یا ۱۵-۳) در حالیکه محاسبه کار انجام شده توسط سیستم نیروهای داخلی در طول جابجایی امری پیچیده‌تر است. در فصل ۳ ما دیدیم که بدون توجه به میزان پیچیده بودن سیستم بارگذاری، می‌توان آن را به ترکیبی از بیش از چهار نوع بار ساده سازی نمود. بار محوری، نیروی برشی، لنگر خمشی و پیچش. اینها سیستم نیروهای داخلی مربوط به خود را تولید می‌کنند. حال ما کار انجام شده توسط این سیستم نیروهای داخلی را در طول جابجایی مجازی دلخواه مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل۱۵-۵ کار مجازی ناشی از سیستم نیروهای داخلی

نیروی محوری

المانی با طول δx از یک عضو سازه‌ای مانند شکل۱۵-۵ را در نظر بگیرید و فرض کنید که تحت یک سیستم نیروهای داخلی مثبت شامل یک نیروی نرمال (نیروی محوری) N، نیروی برشی S، گشتاور خمشی M و گشتاور پیچشی T قرار دارد. این سیستم نیروهای داخلی از سیستمی از بارگذاری‌های خارجی بر روی سازه‌ای ایجاد شده است که این عضو

بخشی از آن است. توجه داشته باشید که وجهی که نیروهای داخلی بر روی آن اثر می‌کنند وجهی منفی است. شکل۳-۷ را ببینید. توزیع تنش‌های مربوط به این نیروهای داخلی طبق فصول قبل، مربوط به سیستم محورهای مختصاتی است که مرکزش روی مرکز سطح مقطع قرار دارد. در حقیقت ما از این توزیع تنش‌ها برای به دست آوردن عباراتی برای کار مجازی داخلی در سازه های الاستیک خطی استفاده می‌کنیم. منطقی به نظر می‌رسد که همان مرکز را در اینجا فرض کنیم. همچنین ما فرض می‌کنیم که محور y محور تقارن است. در ابتدا ما نیروی نرمال N را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تنش مستقیم σ در هر نقطه از سطح مقطع با مقدار $\sigma = N / A$ (رابطه۷-۱) به دست می‌آید. بنابراین نیروی نرمال وارد بر المان δA در نقطه (zوy) برابر است با:

$$\delta N = \sigma \delta A = \frac{N}{A} \delta A$$

حال فرض کنید که سازه دارای یک تغییر مکان مجازی دلخواه است که تولید یک کرنش محوری مجازی ε_v در المان می‌کند. کار مجازی داخلی $\delta w_{i,N}$ ناشی از نیروی محوری وارد بر طول المانی عضو از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\delta w_{i,N} = \int_A \frac{N}{A} dA \varepsilon_v \delta x$$

و از آنجایی که $\int_A dA = A$ معادله به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$\delta w_{i,N} = N \varepsilon_v \delta x \qquad (۹-۱۵)$$

به عبارت دیگر، کار مجازی انجام شده توسط نیروی N با ضرب N و جابجایی محوری مجازی المان عضو است. برای عضوی با طول L کار مجازی $w_{i,N}$ انجام شده در طی یک کرنش دلخواه مجازی برابر خواهد بود با:

$$w_{i,N} = \int_L N \varepsilon_v \delta x \qquad (۱۰-۱۵)$$

برای سازه‌ای شامل تعدادی عضو، کار مجازی داخلی نهایی $w_{i,N}$ انجام شده توسط نیروی محوری حاصل جمع کار مجازی هر یک از اعضا است. بنابراین:

$$w_{i,N} = \sum \int_L N \varepsilon_v \delta x \qquad (۱۱-۱۵)$$

توجه داشته باشید که در به دست آوردن ۱۵-۱۱ ما فرضی در مورد مشخصات مصالح سازه نداشتیم و بدین ترتیب این رابطه علاوه بر مصالح الاستیک برای مصالح های غیر الاستیک نیز صدق می‌کند. با این وجود برای یک مصالح الاستیک خطی (که قانون هوک در آن صدق می‌کند؛ فصل۷-۷) ما می‌توانیم کرنش مجازی را بر حسب یک نیروی نرمال مجازی هم ارز بیان کنیم. بنابراین:

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_v}{E} = \frac{N_v}{EA}$$

بنابراین، اگر ما نیروی نرمال حقیقی را در یک عضو با N_A نمایش دهیم، معادله۱۵-۱۱ به صورت زیر می‌شود.

$$w_{i,N} = \sum \int_L \frac{N_A N_v}{EA} dx$$

نیروی برشی

نیروی برشی S اثر کننده بر مقطع عضو شکل ۱۵-۵ توزیعی از تنش برشی عمودی وابسته به هندسه مقطع مانند آنچه در بخش ۱۰-۲ دیدیم، تولید می‌کند. با این وجود از آنجایی که المان δA بی نهایت کوچک است ما می‌توانیم تنش برشی τ را در المان ثابت در نظر بگیریم. نیروی برشی δS روی المان برابر خواهد بود با

$$\delta S = \tau \delta A \qquad (۱۵-۱۳)$$

فرض کنید که سازه دارای یک جابجایی مجازی دلخواه است که باعث کرنش برشی مجازی γ_v در المان می‌شود. این کرنش برشی نمایش دهنده دوران زاویه‌ای در یک صفحه عمودی از المان $\delta A \times \delta x$ وابسته به محور مرکزی طولی عضو است. جابجایی عمودی مقطع را $\gamma_v \delta x$، کار مجازی داخلی انجام شده توسط نیروی برشی S را $\delta w_{i,S}$ در نظر می‌گیریم که بر روی طول المانی عضو انجام می‌شود و مقدار آن برابر است با:

$$\delta w_{i,S} = \int_A \tau dA \gamma_v \delta x$$

ما در بخش ۱۳-۵ مشاهده کردیم که اگر مجاز به تغییر واقعی شامل ضریب شکل β باشیم می‌توانیم یک تنش برشی یکسان را در سطح مقطع تیر در نظر بگیریم. بنابراین عبارت مربوط به کار مجازی داخلی عضو را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\delta w_{i,S} = \int_A \beta\left(\frac{S}{A}\right) dA \gamma_v \delta x$$

یا

$$\delta w_{i,S} = \beta S \gamma_v \delta x \qquad (١٥-١٤)$$

از اینرو کار مجازی انجام شده توسط نیروی برشی طی کرنش مجازی دلخواه در طول عضو با طول L برابر است با:

$$w_{i,S} = \beta \int_L S \gamma_v dx \qquad (١٥-١٥)$$

برای یک عضو الاستیک خطی مانند بحث نیروی محوری ما می‌توانیم کرنش برشی مجازی γ_v را بر حسب نیروی برشی مجازی هم ارز S_v بیان کنیم. بنابراین از بخش٧-٧ خواهیم داشت:

$$\gamma_v = \frac{\tau_v}{G} = \frac{S_v}{GA}$$

و از رابطه ١٥-١٥ خواهیم داشت:

$$w_{i,S} = \beta \int_L \frac{S_A S_v}{GA} dx \qquad (١٥-١٦)$$

برای یک سازه شامل تعدادی اعضای الاستیک خطی کار نهایی داخلی $w_{i,S}$ انجام شده توسط نیروهای برشی S برابر است با:

$$w_{i,S} = \sum \beta \int_L \frac{S_A S_v}{GA} dx \qquad (١٥-١٧)$$

لنگر خمشی

لنگر خمشی M اثر کننده بر مقطع عضو شکل ١٥-٥ تولید توزیعی از تنش مستقیم σ در ارتفاع سطح مقطع عضو می کند . بنابراین نیروی نرمال المان δA مربوط به این تنش $\sigma\delta A$ خواهد بود. دوباره فرض می‌کنیم که سازه دارای جابجایی مجازی دلخواه کوچکی است که تولید یک کرنش مستقیم مجازی ε_v در المان $\delta A \times \delta x$ می‌کند. بنابراین کار مجازی انجام شده نیروی نرمال اثر کننده بر المان δA برابر $\sigma \delta A \varepsilon_v$ است. بنابراین با انتگرال گرفتن در تمام سطح مقطع عضو ما کار مجازی داخلی $\delta w_{i,M}$ انجام شده توسط لنگر خمشی M در طول المانی عضو را به دست می‌آوریم:

$$\delta w_{i,M}=\int_A \sigma dA\varepsilon_v\delta x \qquad (۱۸-۱۵)$$

کرنش مجازی ε_v در المان $\delta A\times\delta x$ از معادله۹-۱ برابر است با:

$$\varepsilon_v=\frac{y}{R_v}$$

که R_v شعاع انحنای عضو ناشی از جابجایی مجازی است. بنابراین با جایگزاری ε_v در معادله۱۵-۱۸ به دست خواهیم آورد:

$$\delta w_{i,M}=\int_A \sigma\frac{y}{R_v}dA\delta x$$

یا از آنجایی که $\sigma_y\delta A$ لنگر نیروی نرمال (δA) المان است، حول محور z داریم:

$$\delta w_{i,M}=\frac{M}{R_v}\delta_x$$

بنابراین، برای عضو دارای طول L، کار مجازی داخلی انجام شده توسط لنگر خمشی حقیقی M_A برابر است با:

$$w_{i,M}=\int_L \frac{M_A}{R_v}dx \qquad (۱۸-۱۵)$$

در استنباط معادله۱۵-۱۹ رابطه تنش-کرنش خاصی فرض نشد، بنابراین این رابطه برای سیستم‌های غیرخطی نیز دارای کاربرد است. برای مورد خاص سیستم های الاستیک خطی، انحنای مجازی $1/R_v$را می‌توان بر حسب یک لنگر خمشی مجازی هم ارز M_v با استفاده از رابطه ۹-۱۱ بیان کرد:

$$\frac{1}{R_v}=\frac{M_v}{EI}$$

با جایگزاری $1/R_v$در معادله۱۵-۱۹ خواهیم داشت:

$$w_{i,M}=\int_L \frac{M_AM_v}{EI}dx \qquad (۲۰-۱۵)$$

بدین ترتیب برای سازه شامل تعدادی از اعضا، کار مجازی داخلی نهایی $w_{i,M}$ ناشی از خمش برابر است با:

$$w_{i,M}=\sum\int_L \frac{M_AM_v}{EI}dx \qquad (۲۱-۱۵)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

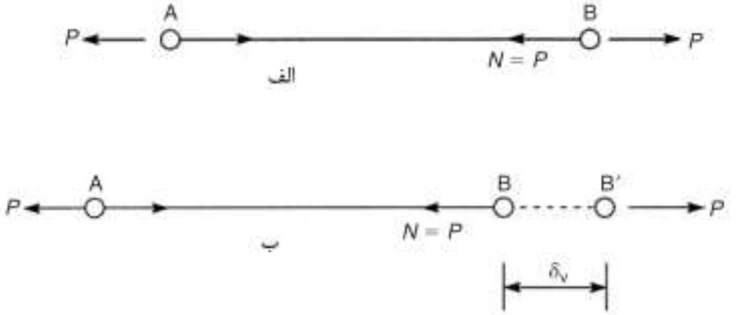
در فصل ۹ ما از اندیس z برای اشاره به لنگر خمشی در یک صفحه عمودی حول محور z، M_z و لنگر دوم سطح برای مقطع عضو ، حول محور z ، I_z استفاده کردیم. واضح است که لنگر های خمشی در معادله۱۵-۲۱ نیازی ندارند تا به یک صفحه عمودی محدود شوند و به همین دلیل از اندیس چشم پوشی می‌شود.

پیچش

کار مجازی داخلی $w_{i,T}$ ناشی از پیچش در مورد خاص میله با مقطع دایروی الاستیک خطی را می‌توان با روشی مشابه یافت. از طریق رابطه زیر:

$$w_{i,T} = \int_L \frac{T_A T_v}{GI_0} dx \qquad (۱۵-۲۲)$$

که I_o لنگر دوم قطبی سطح برای سطح مقطع میله (بخش۱۱-۱ را مشاهده کنید) است. برای تیرهای دارای مقاطع غیر دایروی، I_o با ثابت پیچش J جایگزین می‌شود، ثابت پیچش برای بسیاری از مقاطع تیر در واقعیت به صورت تجربی به دست می‌آید.



شکل۱۵-٦ علامت کار مجازی داخلی در عضو با بارگذاری محوری

لولاها

در برخی موارد ایجاد یک دوران مجازی θ_v در نقطه‌ای از عضو سازه ای که لنگر خمشی حقیقی برابر M_A است مناسب است. بدین ترتیب کار مجازی داخلی انجام شده توسط M_A برابر با $M_A\theta_v$ (رابطه۱۵-۳ را ببینید) خواهد بود. از نظر فیزیکی این موقعیت هم ارز با گذاشتن یک لولا در نقطه مورد نظر است.

علامت کار مجازی داخلی

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

تا اینجا ما عبارت‌هایی را برای کار داخلی بدون توجه به منفی و مثبت بودن آنها در رابطه با کار مجازی خارجی به دست آورده‌ایم.

فرض کنید که عضو سازه‌ای AB در شکل۱۵-٦الف عضوی از یک خرپاست و تحت اثر دو بار کششی محوری خارجی P اعمال شده، در تعادل است. واضح است که نیروی محوری داخلی که نرمال است در هر برش از عضو برابر P است. حال فرض کنید که عضو دارای یک اضافه طول و انبساط مجازی معین δ_v است، به صورتی که B به B' منتقل می‌شود. حال کار مجازی انجام شده توسط بار اعمالی P مثبت است زیرا جابجایی δ_v در همان جهت خط اثر است. هر چند کار مجازی انجام شده توسط نیروی داخلی N $(N=P)$ منفی است زیرا جابجایی B در جهت مخالف خط اثر آن است. به عبارت دیگر کار روی عضو انجام شده است. بنابراین، از معادله۱۵-۸ در این مورد خواهیم داشت:

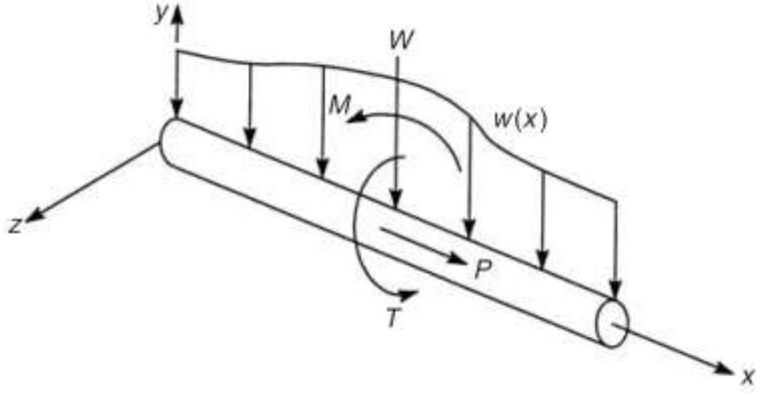
$$W_e = W_i \qquad (۱۵-۲۳)$$

معادله۱۵-۲۳ برای حالتی که جابجایی مجازی انقباض باشد و انبساط نباشد نیز کاربرد دارد، در چنین حالتی علامت‌های کارهای مجازی داخلی و خارجی در رابطه۱۵-۸ عکس می‌شود. واضح است که موارد بالا هنگامی که نیروی P فشاری باشد نیز کاربرد دارد. استدلال‌های بالا قابل تعمیم روی اعضای سازه‌ای تحت برش، خمش و بارهای پیچشی هستند. بنابراین رابطه۱۵-۲۳ به صورت کلی کاربرد دارد.

کار مجازی ناشی از سیستم نیروهای خارجی

تا این قسمت بحث ما تنها کار مجازی ناشی از بارهای متمرکز خارجی اعمال شده را مورد بررسی قرار می‌داد. برای تکمیل موضوع ما باید کار مجازی ناشی از لنگرها، لنگرها و بارهای گسترده را نیز مورد بررسی قرار دهیم.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۵-۷ کار مجازی ناشی از بارهای خارجی اعمالی

در شکل۱۵-۷ عضو سازه‌ای بار گسترده *w(x)* و در یک نقطه خاص بار متمرکز W، لنگر M و لنگر T را تحمل می‌کند. فرض کنید که در نقطه مورد نظر، یک جابجایی مجازی اعمال شده است که دارای مولفه های انتقالی $\Delta_{v,y}$ و $\Delta_{v,x}$ به ترتیب موازی محورهای y و x است و همینطور دارای مولفه‌های دورانی θ_v و ϕ_v به ترتیب در صفحات yx و zy است.

اگر ما المان کوچک δx را برای عضو در نقطه مورد نظر بررسی کنیم. بار گسترده را می‌توان در طول δx ثابت فرض کرد و اثر آن را می‌توان مانند بار متمرکز $\delta x\ w(x)$ در نظر گرفت.

بنابراین کار مجازی W_e انجام شده توسط تمام سیستم نیروهای خارجی برابر است با:

$$w_e = W\Delta_{v,y} + P\Delta_{v,x} + M\theta_v + T\phi_v + \int_L w(x)\Delta_{v,y}dx$$

برای سازه‌ای شامل تعدادی از موقعیت‌های بار، کار مجازی نهایی خارجی برابر است با:

$$W_e = \sum\left[W\Delta_{v,y} + P\Delta_{v,x} + M\theta_v + T\phi_v + \int_L w(x)\Delta_{v,y}dx\right] \qquad (۱۵-۲٤)$$

در رابطه۱۵-۲٤ به اعمال مجموعه کاملی از بارهای خارجی در هر نقطه بارگذاری نیاز نیست، در حقیقت، جمع برای مقدار مقتضی بارهاست. علاوه بر این جابجایی مجازی در عبارت بالا به نیروها و لنگرهای اعمال شده در یک صفحه عمودی مربوط است. البته ما می‌توانیم نیروها و لنگرها و مولفه‌های جابجایی مجازی را در صفحه افقی نیز داشته باشیم. در چنین حالتی معادله ۱۵-۲٤ به گونه‌ای بسط می‌یابد که سهم آنها را نیز شامل شود.

کار مجازی داخلی هم ارز رابطه۱۵–۲٤ برای یک سیستم خطی، از معادله‌های۱۵–۱۲،۱۵–۱۷، ۱۵–۲۱ و۱۵–۲۲ برابر است با

$$W_i = \sum \left[\int_L \frac{N_A N_v}{EA} dx + \beta \int_L \frac{S_A S_v}{GA} dx + \int_L \frac{M_A M_v}{EI} dx + \int_L \frac{T_A T_v}{GJ} dx + M_A \theta_v \right] \quad (۱۵–۲۵)$$

که آخرین عبارت سمت راست، کار مجازی ناشی از لنگر داخلی حقیقی در لولا (در بالا مشاهده کنید) است. توجه داشته باشید که جمع در معادله۱۵–۲۵ برای تمام اعضای سازه صورت می‌گیرد.

کاربرد سیستم های نیروی مجازی

تاکنون، در تمام سیستم‌های سازه‌ای ما کار مجازی ناشی از نیروهای حقیقی حرکت کننده در جابجایی‌های مجازی اجباری (اعمال شده، وارد شده یا تحمیل شده) را بررسی می‌کردیم. با این وجود، نیروهای حقیقی با جابجایی‌های مجازی اصلا رابطه ندارند. همانطور که دیدیم، بزرگی و جهت نیروهای حقیقی تا زمانی که تغییر مکان‌ها کوچک هستند، بدون تغییر می‌ماند. بنابراین اصل کار مجازی برای هر مجموعه‌ای از نیروهای در حال تعادل و هر مجموعه‌ای از جابجایی‌ها کاربرد دارد. بنابرای به صورت یکسان، ما می‌توانیم نیروهایی که مجموعه‌ای از نیروهای مجازی در حال تعادل هستند و جابجایی‌هایی که جابجایی‌های حقیقی هستند را عرضه کنیم. بنابراین به جای مربوط کردن سیستم‌های نیروی داخلی و خارجی به جابجایی‌های مجازی، ما می‌توانیم جابجایی‌های حقیقی خارجی و داخلی را با نیروهای مجازی مربوط کنیم. اگر ما یک سیستم نیروی مجازی را به یک جسم تغییر شکل پذیر اعمال کنیم، جسم یک سیستم نیروی مجازی داخلی ایجاد و القا خواهد کرد که در طول جابجایی‌های حقیقی حرکت خواهد کرد. بنابراین کار مجازی داخلی تولید خواهد شد. در این مورد برای مثال، معادله۱۵–۱۰ به صورت زیر خواهد شد:

$$w_{i,N} = \int_L N_v \varepsilon_A dx$$

که N_v نیروی نرمال مجازی داخلی و ε_v کرنش حقیقی است. بنابراین، برای یک سیستم خطی که نیروی نرمال حقیقی برابر N_A ، $\varepsilon_A = N_A/EA$ می‌باشد. بدین ترتیب برای سازه شامل تعدادی عضو، کار مجازی نهایی ناشی از بار نرمال مجازی برابر است با:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$W_{i,N} = \sum \int_L \frac{N_v N_A}{EA} dx$$

که برابر با معادله۱۵-۱۲ است. معادله‌های۱۵-۱۷، ۱۵-۲۱ و ۱۵-۲۳ برای کاربرد در سیستم نیروی مجازی با رفتار مشابه قابل کاربرد است.

کاربرد اصل کار مجازی

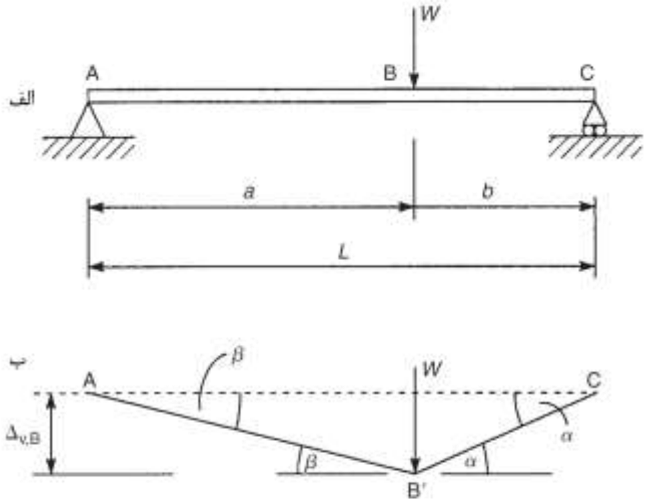
حال ما دریافته ایم که اصل کار مجازی هم برای جابجایی مجازی اجباری و هم برای نیروهای مجازی اجباری قابل استفاده است . راهکار اول مانند آنچه در مسئله۱۵-۱ دیدیم برای تعیین نیروها و راهکار دوم برای به دست آوردن جابجایی ها به کار می رود .

برای سازه های معین استاتیکی ، استفاده از جابجایی های مجازی برای تعیین سیستم نیروها نسبتا کاربردی بی مورد از اصل است ، هر چند مسئله های این دسته از سازه ها تشریح خوبی از این روش را برای ما فراهم می کنند .

همانطور که در فصل ١٦ خواهیم دید نقطه قوت اصلی این روش در کاربرد آنها در حل سازه های نامعین استاتیکی است . با این وجود ، استفاده از نیروهای مجازی به صورت ویژه برای تعیین جابجایی های حقیقی سازه سودمند است . ما هر دو راهکار را با مثال شرح می دهیم .

مثال۲-۱۵) لنگر خمشی در نقطه B در تیر با اتکای ساده ABC نشان داده شده در شکل۱۵-۸ الف را تعیین کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۵-۸ تعیین ممان خمشی در یک نقطه در تیر

ما عکس العمل‌های تکیه گاهی را برای تیر خاص مثال۱۵-۱ تعیین کردیم. اما ما در این مثال، لنگر داخلی حقیقی ، در نقطه اعمال بار ، M_B را مورد نظر داریم . بنابراین ما باید یک جابجایی مجازی که لنگر داخلی در B را به بار اعمال شده مرتبط کند ، تحمیل کنیم که این جابجایی سایر نیروهای خارجی ناشناخته مثل عکس العمل های تکیه گاه ها ، سیستم های نیروی داخلی ناشناخته مثل توزیع لنگر خمشی در طول تیر را شامل نمی شود . بنابراین اگر ما فرض کنیم که تیر در B لولا شده است و طول های AB و BC صلب باشند . یک جابجایی مجازی $\Delta_{v,B}$ در B منجر به شکل جابجا شده ای مانند شکل۱۵-۸ب خواهد شد. توجه داشته باشید که عکس العمل تکیه گاه ها در A و C کار نمی کنند و لنگر های داخلی در AB و BC کار نمی کنند زیرا AB و BC اتصال های صلب هستند . از شکل ۱۵,۸ ب خواهیم داشت:

الف
$$\Delta_{v,B} = a\beta = b\alpha$$

بنابراین:

$$\alpha = \frac{a}{b}\beta$$

و زاویه دوران BC وابسته به AB برابر است با:

ب
$$\theta_B = \beta + \alpha = \beta\left(1 + \frac{a}{b}\right) = \frac{L}{b}\beta$$

حال با برابر قرار دادن کار مجازی خارجی انجام شده توسط W با کار مجازی داخلی انجام شده توسط M_B (رابطه۱۵–۲۳را ببینید) خواهیم داشت:

$$W\Delta_{v,B} = M_B\theta_B \qquad \text{پ}$$

با جایگزاری $\Delta_{v,B}$ در معادله (پ) و θ_B در معادله (الف) از معادله (ب) خواهیم داشت:

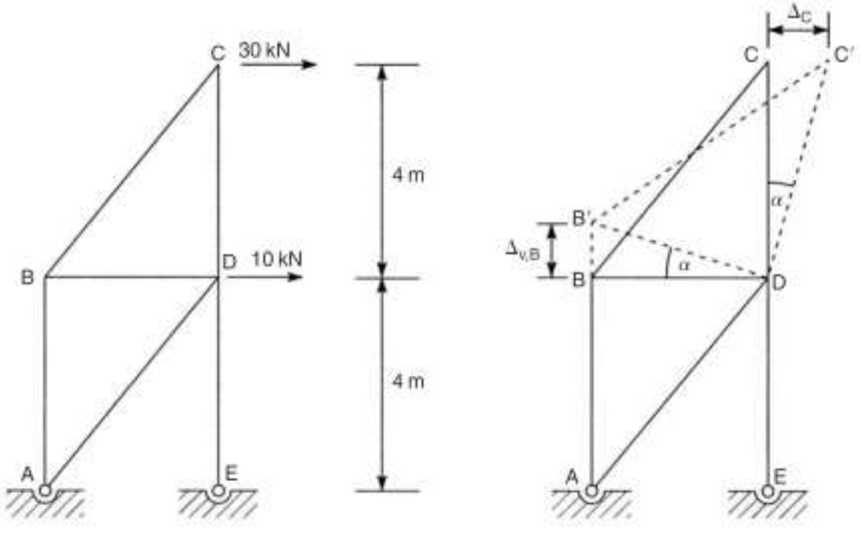
$$W\alpha\beta = M_B \frac{L}{b}\beta$$

که می‌دهد:

$$M_B = \frac{Wab}{L}$$

که نتیجه‌ای است که ما با محاسبه لنگر R_c $(=Wa/L)$ - از مثال ۱۵–۱ حول B می‌توانیم به دست بیاوریم.

مثال۱۵–۳) نیروی داخل عضو AB در خرپای نشان داده شده در شکل۱۵–۹الف را تعیین کنید.



شکل۱۵–۹ تعیین نیروی داخلی در عضوی از خرپا با استفاده از کار مجازی

نیاز است که ما نیروی عضو AB را محاسبه کنیم . بنابراین دوباره باید این نیروی داخلی را به بارهای خارجی اعمال شده مربوط کنیم بدون اینکه به نیروهای داخلی در اعضای

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

باقیمانده خرپا وابسته باشد. به همین دلیل یک اضافه طول مجازی $\Delta_{v,B}$ در B در عضو AB به صورتی که B به B' حرکت کند به سازه تحمیل می‌کنیم. اگر فرض کنیم که اعضای باقیمانده صلب هستند، نیروهای داخل آنها کار انجام نمی‌دهند. علاوه بر این مثلث BCD به عنوان یک جسم صلب حول D به صورت $B'C'D$ مانند شکل۱۵-۹ب دوران خواهد داشت. جابجایی افقی C یعنی Δ_C از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\Delta_C = 4\alpha$$

که

$$\Delta_{v,B} = 3\alpha$$

بنابراین:

$$\Delta_C = \frac{4\Delta_{v,B}}{3} \qquad \text{الف}$$

با برابر قرار دادن کار مجازی خارجی انجام شده توسط بار ۳۰ کیلونیوتن با کار مجازی داخلی انجام شده توسط نیروی F_{BA} در عضو AB خواهیم داشت: (به معادله۱۵-۲۳ و شکل۱۵-٦ رجوع کنید)

$$30\Delta_C = F_{BA}\Delta_{v,B} \qquad \text{ب}$$

با جایگزاری Δ_C از معادله (الف) در معادله (ب) خواهیم داشت:

$$30\times\frac{4}{3}\Delta_{v,B} = F_{BA}\Delta_{v,B}$$

از آنجا:

$$F_{BA} = +40kN \quad \text{کششی}$$

در بالا ما در واقع با تحمیل اضافه طول مجازی در عضو AB ، علامت مثبت (یعنی کششی) را به F_{BA} اختصاص می‌دهیم.

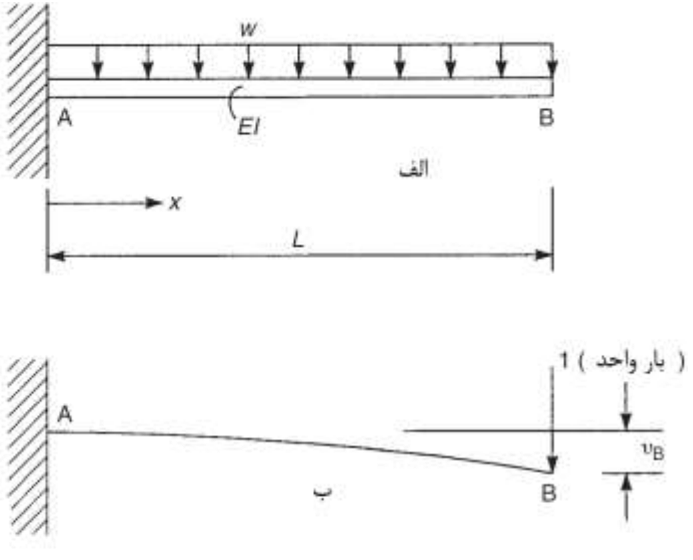
علامت حقیقی F_{BA} به این ترتیب تابع علامت کار مجازی خارجی است. بنابراین، اگر بار ۳۰ کیلونیوتن در جهت مخالف Δ_C باشد، کار خارجی انجام شده منفی خواهد بود. بنابراین F_{BA} منفی خواهد بود و بنابراین فشاری خواهد بود. صحت و سقم این حالت را با بازدید می‌توان دریافت. متناوباً برای بارگذاری مانند شکل۱۵-۹ الف، کاهش طولی در AB دلالت ضمنی بر این امر می‌کند که F_{BA} فشاری بوده است. در این مورد DC پادساعتگرد دوران کرده است. Δ_C در جهت مخالف بار ۳۰ کیلو نیوتن بوده است و بنابراین کار

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مجازی خارجی انجام شده منفی خواهد بود که منجر به یک مقدار منفی برای نیروی فشاری F_{BA} خواهد شد. بدین ترتیب F_{BA} مانند قبل، کششی خواهد بود. همچنین توجه داشته باشید که بار ۱۰ کیلونیوتنی در نقطه D کاری انجام نخواهد داد زیرا D بدون جابجایی باقی مانده است. حال ما می‌توانیم مسائل مربوط به نیروهای مجازی را مورد بررسی قرار دهیم. در حالت کلی ما به جابجایی یک نقطه خاص در سازه نیاز داریم. بنابراین اگر ما یک نیروی مجازی به سازه در آن نقطه اعمال کنیم، در جهت جابجایی مورد نیاز، کار مجازی خارجی انجام شده محصول نیروی مجازی و جابجایی حقیقی خواهد بود، که با کار مجازی داخلی ناشی از سیستم نیروهای مجازی داخلی حرکت کننده در جابجایی‌های حقیقی، برابر در نظر گرفته می‌شود. از آنجایی که انتخاب نیروی مجازی دلخواه است، ما می‌توانیم هر مقدار مناسب و مورد نظری را به آن اختصاص دهیم. ساده ترین نوع نیروی مجازی بار واحد است و این روش بدین ترتیب روش بار واحد می‌شود.

مثال۱۵–٤) خیز عمودی انتهای آزاد تیر طره شکل۱۵–۱۰الف را تعیین کنید.



شکل۱۵–۱۰ خیز انتهای آزاد تیر طره با استفاده از روش بار واحد

اجازه بدهید فرض کنیم که خیز حقیقی طره در B ناشی از بار گسترده یکسان، برابر v_B است و یک بار واحد عمودی رو به پایین بر نقطه B، پیش از رخ دادن خیز حقیقی اعمال شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

کار مجازی خارجی انجام شده توسط بار واحد از شکل۱۵-۱۰ب برابر $1\upsilon_B$ خواهد بود. فرض می شود که خیز υ_B فقط ناشی از خمش است. یعنی ما از خیز ناشی از برش صرف نظر می‌کنیم. کار مجازی داخلی از معادله۱۵-۲۱ به دست می آید و از آنجایی که تنها یک عضو درگیر است به صورت زیر تبدیل می شود:

$$W_{i,M} = \int_0^L \frac{M_A M_v}{EI} dx \qquad \text{(الف)}$$

لنگر مجازی M_v ناشی از بار واحد است پس ما می‌توانیم M_v را با M_1 جایگزین کنیم، بنابراین:

$$W_{i,M} = \int_0^L \frac{M_A M_1}{EI} dx \qquad \text{(ب)}$$

در هر برشی از تیر با فاصله x از انتهای گیردار داریم:

$$M_A = -\frac{w}{2}(L-x)^2 \qquad M_1 = -1(L-x)$$

با جایگزاری M_A و M_1 در معادله(ب) و برابر قرار دادن کار مجازی خارجی ناشی از بار واحد و کار مجازی داخلی خواهیم داشت:

$$1\upsilon_B = \int_0^L \frac{w}{2EI}(L-x)^3 dx$$

که می دهد:

$$\upsilon_B = \frac{w}{2EI}\left[\frac{1}{4}(L-x)^4\right]_0^L$$

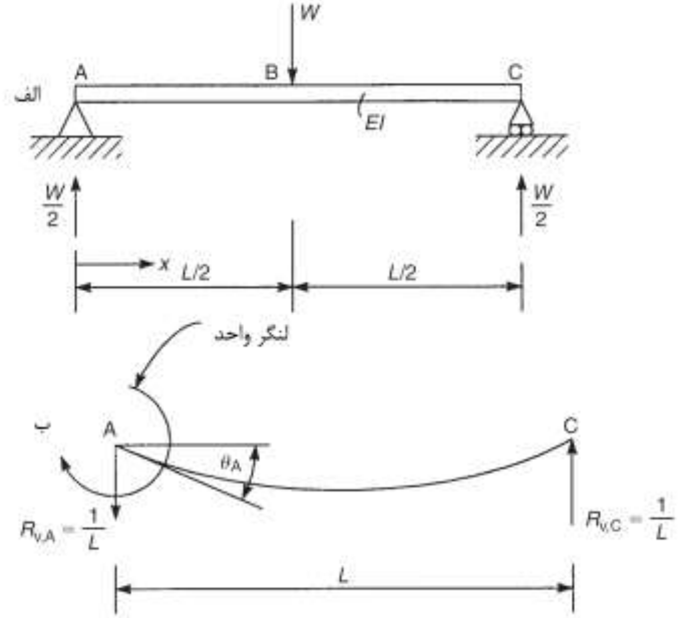
بدین ترتیب:

$$\upsilon_B = \frac{wL^4}{8EI}$$

توجه داشته باشید که υ_B در واقع منفی است اما علامت مثبت در اینجا نشان می‌دهد که این خیز هم سو با بار واحد است .

مثال۱۵-۵) دوران را تعیین کنید. یعنی شیب تیر ABC نشان داده شده در شکل۱۵-۱۱الف را در نقطه A تعیین کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۵-۱۱ تعیین دوران یک تیر دو سر ساده با استفاده از روش بار واحد

دوران حقیقی تیر در A ناشی از بار متمرکز حقیقی W برابر θ_A است. اجازه بدهید فرض کنیم که یک لنگر مجازی واحد مانند شکل۱۵-۱۱ب، قبل از رخداد دوران حقیقی درA اعمال شده است. لنگر واحد مجازی باعث عکس العمل‌های مجازی تکیه گاه‌ها می‌شود، $R_{v,A}=1/L$ به سمت پایین و $R_{v,C}=1/L$ به سمت بالا . لنگر های خمشی داخلی حقیقی برابرند با:

$$M_A=\frac{W}{2}x \qquad 0\le x\le L/2$$

$$M_A=\frac{W}{2}(L-x) \qquad L/2\le x\le L$$

لنگر خمشی مجازی داخلی برابر است با:

$$M_v=1-\frac{1}{L}x \qquad 0\le x\le L$$

کار مجازی خارجی ناشی از $1\theta_A$(عکس العمل های مجازی تکیه گاه ها از آنجایی که هیچگونه جابجایی عمودی در تکیه گاه های تیر نیست ، کاری انجام نمی دهند .) و کار مجازی داخلی از رابطه۱۵-۲۱ به دست می آید ، بنابراین :

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$1\theta_A = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{L/2}\frac{W}{2}x\left(1-\frac{x}{2}\right)dx+\int_{L/2}^{L}\frac{W}{2}(L-x)\left(1-\frac{x}{L}\right)dx\right] \qquad \text{الف}$$

با ساده سازی معادله (الف) خواهیم داشت :

$$\theta_A = \frac{W}{2EIL}\left[\int_0^{L/2}\left(Lx-x^2\right)dx+\int_{L/2}^{L}(L-x)^2\,dx\right] \qquad \text{ب}$$

بنابراین :

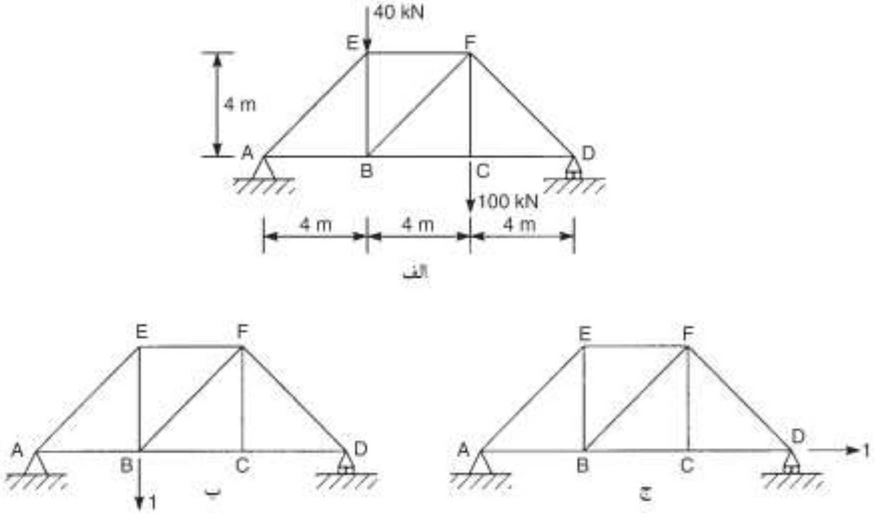
$$\theta_A = \frac{W}{2EIL}\left\{\left[L\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{L}{2}}-\frac{1}{3}\left[(L-x)^3\right]_{\frac{L}{2}}^{L}\right\} \qquad \text{الف}$$

که خواهیم داشت :

$$\theta_A = \frac{WL^2}{16EI}$$

که نتیجه ای است که می توان از معادله ۳ در مثال۱۳-۵ به دست آورد .

مثال۱۵-٦) خیز عمودی اتصال B و حرکت افقی تکیه گاه D در خرپای شکل۱۵-۲الف نشان داده شده‌اند. مساحت سطح مقطع هر عضو ۱۸۰۰ میلی متر مربع است و مدول یانگ E برای مصالح اعضا برابر ۲۰۰۰۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع است.



شکل۱۲-۵ خیز خرپا با استفاده از روش بار واحد

برای تعیین خیز عمودی B و خیز افقی D نشان داده شده (به ترتیب) در شکل۱۵-۱۲ب و ج ، سیستم نیروی مجازی ، یعنی بارهای واحد لازم است . بنابراین ، اگر خیز عمودی

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حقیقی در B برابر $\delta_{B,v}$ باشد . و خیز افقی در D برابر $\delta_{D,h}$ باشد کار مجازی خارجی ناشی از بارهای واحد به ترتیب برابر خواهد بود با $1\delta_{B,v}$ و $1\delta_{D,h}$.

سیستم نیروهای حقیقی و مجازی داخلی شامل نیروهای محوری در تمام عضوهاست . این نیروهای محوری در طول هر عضو ثابت هستند به گونه ای که برای یک خرپای شامل n عضو معادله ۱۵,۱۲ به صورت زیر کاهش می یابد :

$$W_{i,N}=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_{A,j}F_{v,j}L_j}{E_jA_j}$$ الف

که $F_{A,j}$ و $F_{v,j}$ به ترتیب از سمت راست نیروهای حقیقی و مجازی در عضو jام هستند که دارای طول L_j ، مساحت سطح مقطع A_j و مدول یانگ E_j است .

از آنجایی که $F_{v,j}$ ناشی از بار واحد است ، ما می توانیم معادله (الف) را به صورت زیر بنویسیم :

$$W_{i,N}=\sum_{j=1}^{n}\frac{F_{A,j}F_{1,j}L_j}{E_jA_j}$$ ب

همچنین، در این مثال خاص . مساحت سطح مقطع A و مدول یانگE برای تمام اعضا یکسان هستند به همین دلیل بهتر است که ابتدا مقدار زیر را محاسبه کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n}F_{A,j}F_{1,j}L_j$$

و سپس آن را بر EA تقسیم کنیم تا $W_{i,N}$را به دست آوریم .

نیروهای داخلی اعضا ، مجازی یا حقیقی را می توان از روش گره ها (جوینت ها) در فصل ٤,٦ به دست آورد .توجه داشته باشید که عکس العمل های تکیه گاه ها به سه دسته بارهای اعمالی (یک بار حقیقی و دو بار مجازی) مربوط است و باید قبل از تعیین سیستم نیروهای داخلی محاسبه شود . با این وجود در شکل۱۵-۱۲ج ، واضح است که $F_{1,AB}=F_{1,BC}=F_{1,CD}=+1$ و نیروها در بقیه اعضا برابر صفر است . محاسبات در جدول۱۵-۱ ارائه شده‌اند . توجه داشته باشید که علامت های مثبت نشان دهنده کشش و علامت های منفی نشان دهنده فشار است .

بنابراین با برابر قرار دادن کار مجازی خارجی و داخلی انجام شده (معادله۱۵-۲۳) خواهیم داشت :

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$1\delta_{B,v} = \frac{1263.6\times10^6}{200000\times1800} = 3.51mm$$

عضو	L (m)	F_A (kN)	$F_{1,B}$	$F_{1,D}$	$F_AF_{1,B}L$ (kNm)	$F_AF_{1,D}L$ (kNm)
AE	5.7	−84.9	−0.94	0	+451.4	0
AB	4.0	+60.0	+0.67	+1.0	+160.8	+240.0
EF	4.0	−60.0	−0.67	0	+160.8	0
EB	4.0	+20.0	+0.67	0	+53.6	0
BF	5.7	−28.3	+0.47	0	−75.2	0
BC	4.0	+80.0	+0.33	+1.0	+105.6	+320.0
CD	4.0	+80.0	+0.33	+1.0	+105.6	+320.0
CF	4.0	+100.0	0	0	0	0
DF	5.7	−113.1	−0.47	0	+301.0	0
					$\sum=+1263.6$	$\sum=+880.0$

جدول۱۵-۱

و

$$1\delta_{D,h} = \frac{880\times10^6}{200000\times1800} = 2.44mm$$

هر دو خیز مثبت هستند که نشان می دهد خیزها در جهت بارهای واحد اعمالی هستند . توجه داشته باشید که در بالا لازم نیست که واحدی به بار واحد اختصاص دهیم زیرا در دو طرف معادله کار مجازی ، بار واحد ظاهر می شود . (نیروهای داخلی F_1 به صورت مستقیم با بار واحد متناسب هستند .)

مثال های۱۵-۲ تا۱۵-٦ کاربرد اصل کار مجازی را در حل مسائل مربوط به سازه های الاستیک خطی دارای معینی استاتیکی شرح داد . ما پیش از این کاربرد این اصل را در خمش پلاستیک تیرها (شکل۹-٤۳) دیده ایم ، در نتیجه این امر اثبات می شود که این روش به سیستم های الاستیک محدود نمی‌شود . حال ما باید گزینه دیگر خودمان یعنی روش های انرژی را بیازماییم اما در فصل ١٦ ، هنگامی که سازه های استاتیکی نامعین را مورد بررسی قرار می دهیم دوباره به کاربرد کار مجازی باز خواهیم گشت .

۱۵-۳ روش های انرژی

هر چند به صورت کلی پذیرفته شده است که روش های انرژی به خاطر محدودیت در تحلیل الاستیک ، به قدرتمندی اصل کار مجازی نیستند اما بیشترین کاربرد روش های

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

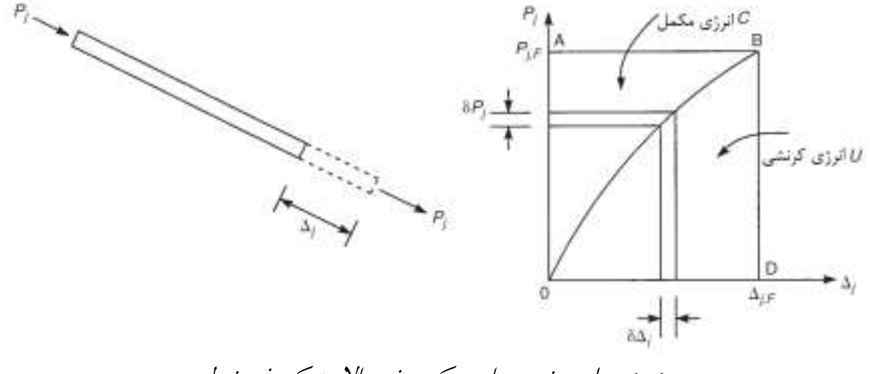
انرژی برای داشتن یک راه حل تقریبی سریع در مسائلی است که جواب های دقیق وجود ندارند . همچنین بسیاری از سازه های استاتیکی نامعین را می توان به صورتی مناسب با استفاده از روش های انرژی تحلیل کرد . علاوه بر این روش های انرژی می توانند برای مسائل خیزی که با روش های ابتدایی تر به سادگی حل نمی شوند ، جوابهایی نسبتا ساده فراهم کنند .

روش های انرژی با *انرژی مکمل نهایی* یا *انرژی پتانسیل نهایی* (TPE) یک سیستم سازه ای سر و کار دارند . هر دو روش را می توان برای حل یک مسئله خاص مورد استفاده قرار داد . هر چند به صورت عمومی ، با استفاده از روش انرژی مکمل جابجایی ها راحت تر به دست می آیند و با استفاده از روش انرژی پتانسیل نیروها راحت تر به دست می آیند.

انرژی کرنش و انرژی مکمل

در بخش۱۰-۷ ما انرژی کرنش را در یک عضو الاستیک خطی تحت یک بار محوری مورد بررسی قرار دادیم . متعاقبا در بخش های۹-٤ ،۱۰-۳ و۱۱-۲ ما به ترتیب عباراتی را برای انرژی کرنش در یک عضو سازه ای تحت بارهای خمشی ، برشی و پیچشی به دست آوردیم . حال ما موارد عمومی تری از اعضا که الاستیک خطی نیستند را می آزماییم .

شکل۱۵-۱۳الف نشان می دهد که عضو jام سازه شامل n عضو است . عضو تحت بار به تدریج افزاینده P_j است که باعث جابجایی به تدریج افزاینده Δ_j می شود . اگر عضو دارای ویژگی های الاستیک غیر خطی باشد منحنی بار – خیز شکل ۱۵,۱۳ ب را خواهد داشت . اجازه بدهید فرض کنیم که مقادیر نهایی P_j و Δ_j برابر $P_{j,F}$ و $\Delta_{j,F}$ هستند .



منحنی بار– خیز برای یک عضو الاستیک غیرخطی

وقتی عضو افزایش طول می یابد (یا اگر بار P_j فشاری باشد کاهش طول می یابد) P_j کاری انجام می دهد که طبق آنچه در بخش ۷,۱۰ دیدیم به صورت انرژی کرنش در عضو ذخیره می شود . کار انجام شده توسط P_j هنگامی که عضو به مقدار کوچک $\delta\Delta_j$ افزایش طول می یابد برابر است با:

$$\delta W_j = P_j \delta\Delta_j$$

بنابراین کار نهایی انجام شده توسط P_j و انرژی کرنش ذخیره شده در عضو وقتی P_j از صفر تا $P_{j,F}$ افزایش می یابد از رابطه زیر به دست می آید

$$u_j = \int_0^{\Delta_{j,\mathrm{F}}} P_j \, \mathrm{d}\Delta_j$$

که این مقدار برابر مساحت OBD زیر منحنی بار–خیز در شکل ۱۵,۱۳ ب است . به طریق مشابه مساحت OAB بالای منحنی بار–خیز که ما آن را با c_j نشان می دهیم برابر است با : (۱۵,۲۷)

$$c_j = \int_0^{P_{j,\mathrm{F}}} \Delta_j \, \mathrm{d}P_j$$

می توان از شکل ۱۵,۱۳ ب مشاهده کرد که مساحت $OABD$ نمایش دهنده کار انجام شده توسط نیروی ثابت $P_{j,F}$ جابجا شونده در طول جابجایی $\Delta_{j,F}$ است . بنابراین از معادله های ۱۵,۲٦ و ۱۵,۲۷ داریم : (۱۵,۲۸)

$$u_j + c_j = P_{j,\mathrm{F}} \, \Delta_{j,\mathrm{F}}$$

در ادامه از آنجایی که u_j دارای ابعاد کار است ، c_j نیز دارای ابعاد کار است اما c_j دارای تعبیر فیزیکی نیست . با این وجود می توان آن را به عنوان مکمل کار انجام شده توسط P_j در تولید جابجایی Δ_j در نظر گرفت و به همین دلیل است که *انرژی مکمل* نامیده می شود . انرژی کرنش نهایی سازه ، U ، برابر جمع تمام انرژی های کرنش جزیی اعضا است ، بنابراین :

$$U = \sum_{j=1}^{n} u_j$$

که با جایگزاری u_j از معادله ۱۵,۲٦ به صورت زیر می شود : (۱۵,۲۹)

$$U = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\Delta_{j,\mathrm{F}}} P_j \, \mathrm{d}\Delta_j$$

به صورت مشابه ، انرژی مکمل نهایی C سازه برابر است با :

$$C = \sum_{j=1}^{n} c_j$$

که از معادله ۱۵,۲۷ داریم : (۱۵,۳۰)

$$C = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{P_{j,\mathrm{F}}} \Delta_j \, \mathrm{d}P_j$$

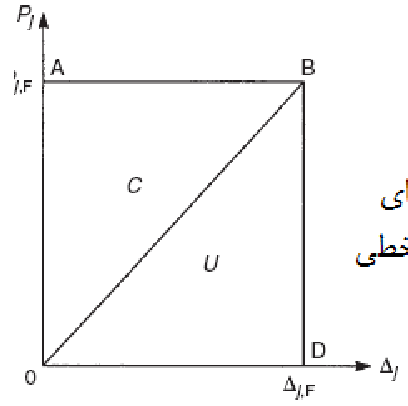
اگر معادله ۱۵,۲۹ را بسط دهیم خواهیم داشت : (۱۵,۳۱)

$$U = \int_0^{\Delta_{1,\mathrm{F}}} P_1 \, \mathrm{d}\Delta_1 + \int_0^{\Delta_{2,\mathrm{F}}} P_2 \, \mathrm{d}\Delta_2 + \cdots + \int_0^{\Delta_{j,\mathrm{F}}} P_j \, \mathrm{d}\Delta_j + \cdots + \int_0^{\Delta_{n,\mathrm{F}}} P_n \, \mathrm{d}\Delta_n$$

با مشتق گیری جزیی از معادله ۱۵,۳۱ نسبت به یک جابجایی خاص Δ_j می دهد : (۱۵,۳۲)

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_j} = P_j$$

معادله ۱۵,۳۲ بیان می کند که مشتق جزیی انرژی کرنش در یک سازه الاستیک نسبت به جابجایی Δ_j ، برابر نیروی مربوط P_j می باشد . بدیهی است که U باید به عنوان تابعی از جابجایی ها بیان شود . این معادله به خاطر مهندس ایتالیایی که در سال ۱۸۷۹ این قاعده را به دست آورد و منتشر کرد به عنوان *قاعده اول کاستی گیلیانو* (بخش ۱) شناخته می شود . یکی از ابتدایی ترین کاربردهای این قاعده ، تحلیل سازه های الاستیک غیر خطی است که خارج از حیطه بررسی این کتاب است .



شکل ۱۵,۱۴
منحنی بار-خیز برای یک عضو الاستیک خطی

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

حال با نوشتن معادله ۱۵٫۳۰ و بسط آن خواهیم داشت : (۱۵٫۳۳)

$$C = \int_0^{P_{1,F}} \Delta_1 \, dP_1 + \int_0^{P_{2,F}} \Delta_2 \, dP_2 + \cdots + \int_0^{P_{j,F}} \Delta_j \, dP_j + \cdots + \int_0^{P_{n,F}} \Delta_n \, dP_n$$

مشتق جزیی معادله ۱۵٫۳۳ نسبت به یکی از بارها ، P_j ، برابر است با : (۱۵٫۳٤)

$$\frac{\partial C}{\partial P_j} = \Delta_j$$

معادله ۱۵٫۳٤ بیان می کند که مشتق جزیی انرژی مکمل یک سازه الاستیک نسبت به بار اعمالی P_j جابجایی آن بار در خط اثرش را می دهد . در این مورد C به عنوان تابعی از بارها بیان می شود . معادله ۱۵٫۳٤ بعد از اینکه دو مهندس (یکی ایتالیایی و دیگری آلمانی) کروتی در ۱۸۷۹ و انگسر در ۱۸۸۹ به صورت جداگانه ، رابطه ها را به دست آوردند قاعده کروتی – انگسر نامیده می شود .

حال ، حالتی را بررسی کنیم که وقتی منحنی بار–خیز ، خطی است ، رخ می دهد . مانند آنچه در شکل ۱۵٫۱٤ نشان داده شده است در این حالت مساحت های OBD و OAB برابر هستند ، بدین ترتیب انرژی های مکمل و کرنش با هم برابر هستند . بنابراین می توانیم انرژی مکمل C در معادله ۱۵٫۳٤ را با U یعنی انرژی کرنش جایگزین کنیم . خواهیم داشت :

(۱۵٫۳۵)

$$\frac{\partial U}{\partial P_j} = \Delta_j$$

معادله ۱۵٫۳۵ بیان می کند که برای یک سازه الاستیک خطی ، مشتق جزیی انرژی کرنش سازه نسبت به بار ، جابجایی بار در خط اثرش را به ما می دهد . این رابطه به عنوان بخش دوم قاعده اول کاستی گیلیانو شناخته می شود . کاربرد مستقیم این رابطه محدود است زیرا رابطه ، جابجایی در یک نقطه خاص از یک سازه را *فقط* هنگامی تعیین می کند که بار در آن نقطه اعمال شده باشد و این تعیین را *فقط* در جهت بار انجام می دهد . بنابراین این روش برای تعیین جابجایی های نقاط B و D در خرپای مثال ۱۵٫٦ کاربرد ندارد.

اصل مقدار ثابت انرژی مکمل نهایی

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

فرض کنید که یک سازه الاستیک دارای n عضو ، در تعادلی است تحت اثـر تعـدادی نیـرو $P_1, P_2, ..., P_k, ..., P_r$ که جابجـایی هـای حقیقـی متعاقـب $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_k, ..., \Delta_r$ و نیروهـای داخلی حقیقی $F_1, F_2, ..., F_k, ..., F_r$ را تولید می کنند . حال اجازه بدهید فـرض کنـیم کـه سیستمی از نیروهای مجازی المانی $\delta P_1, \delta P_2, ..., \delta P_k, ..., \delta P_r$ بر سازه تحمیل شـده انـد و در جابجایی های حقیقی اثر می کنند . کار مجازی خـارجی ، δW_e ناشـی از ایـن نیروهـای مجازی المانی از بخش ۱۵,۲ برابر است با :

$$\delta W_e = \delta P_1\, \Delta_1 + \delta P_2\, \Delta_2 + \cdots + \delta P_k\, \Delta_k + \cdots + \delta P_r\, \Delta_r$$

یا : (۱۵,۳٦)

$$\delta W_e = \sum_{k=1}^{r} \Delta_k\, \delta P_k$$

در همان حال ، نیروهای مجازی المانی خارجی با سیستم نیروهای مجـازی المـانی داخلـی $\delta F_1, \delta F_2, ..., \delta F_j, ..., \delta F_n$ کــه در تغییــر شــکل هــای حقیقــی داخلــی $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_j, ..., \delta_n$ حرکت می کنند ، در تعادل هستند . بنابراین کار مجازی المانی داخلـی انجام شده برابر است با : (۱۵,۳۷)

$$\delta W_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, \delta F_j$$

از معادله ۱۵,۲۳ داریم :

$$\sum_{k=1}^{r} \Delta_k\, \delta P_k = \sum_{j=1}^{n} \delta_j\, \delta F_j$$

که : (۱۵,۳۸)

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j\, \delta F_j - \sum_{k=1}^{r} \Delta_k\, \delta P_k = 0$$

معادله ۱۵,۳۸ را می توان به صورت زیر نوشت : (۱۵,۳۹)

$$\delta \left(\sum_{j=1}^{n} \int_0^{F_j} \delta_j\, dF_j - \sum_{k=1}^{r} \Delta_k P_k \right) = 0$$

از معادله ۱۵,۳۰ می توانیم ببینیم که اولین عبارت معادلـه ۱۵,۳۹ انـرژی مکمـل C_i سیسـتم نیروهای داخلی حقیقی را نشان می دهد ، عبارت دوم انـرژی مکمـل C_e سیسـتم نیروهـای

خارجی را نشان می دهد . از آنجایی که C_e مکمل کار انجام شده توسط سیستم نیروهای خارجی است و C_i مکمل کار انجام شده بر روی سازه است . علامت C_e عکس C_i است . با دوباره نوشتن معادله ۱۵,۳۹ خواهیم داشت : (۱۵,٤۰)

$$\delta(C_i + C_e) = 0$$

در معادله ۱۵,۳۹ جابجایی های Δ_k و تغییر شکل های δ_j ، جابجایی ها و تغییر شکل های حقیقی سازه الاستیک هستند . به همین دلیل آنها از شرایط سازگاری جابجایی ها پیروی می کنند . بدین ترتیب معادله های ۱۵,٤۰ و ۱۵,۳۹ معادله های سازگاری هندسی هستند . همچنین معادله ۱۵,٤۰ اصل مقدار ثابت انرژی مکمل نهایی را بنیان می گذارد که می توان به صورت زیر آن را ارائه داد :

" برای یک جسم الاستیک که تحت اثر نیروهای اعمال شده در تعادل است ، مقدار درست نیروها (یا تنش ها) ی داخلی حقیقی و عکس العمل ها ، آن مقداری هستند که انرژی مکمل نهایی دارای مقدار ثابتی باشد . "

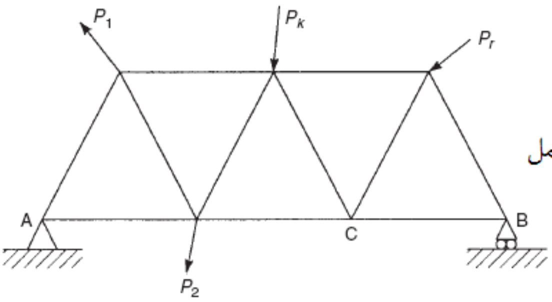
به عبارت دیگر مقدار صحیح نیروها (یا تنش ها) ی داخلی و عکس العمل ها آن مقدارهایی هستند که شرایط سازگاری تغییر مکان ها را ارضا نمایند . این ویژگی انرژی مکمل نهایی سازه الاستیک به خصوص هنگام حل سازه های نامعین استاتیکی ای که تعداد نامحدودی از توزیع تنش ها و نیروهای عکس العمل ممکن است برای ارضای شرایط تعادل وجود داشته باشند ، سودمند است . همانطور که قبلا دیده ایم شرایط تعادل در این حالت برای حل مسئله کافی نیستند .

ما کاربرد این اصل را در حل سازه های نامعین استاتیکی در فصل ۱٦ مورد بررسی قرار می دهیم . ضمنا ما کاربرد این اصل را برای محاسبه جابجایی ها در سازه های معین استاتیکی شرح می دهیم .

مثال ۱۵,۷ محاسبه خیزها در یک خرپا

فرض کنید که می خواهیم خیز Δ_2 را در راستای بار P_2 و در گرهی که P_2 بر آن وارد شده است محاسبه کنیم . در خرپایی شامل n عضو و حامل سیستمی از بارها $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_r$ مانند شکل ۱۵,۱۵ . از معادله ۱۵,۳۹ انرژی مکمل نهایی ، C ، در خرپا برابر است با :

$$C = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{F_j} \delta_j \, dF_j - \sum_{k=1}^{r} \Delta_k P_k \quad (1)$$



شکل ۱۵٫۱۵
خیز یک خرپا
با استفاده از انرژی مکمل

از مشتق جزیی اصل مقدار ثابت انرژی مکمل نهایی نسبت به بار P_2 خواهیم داشت :

$$\frac{\partial C}{\partial P_2} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial F_j}{\partial P_2} - \Delta_2 = 0 \quad (2)$$

که :

$$\Delta_2 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial F_j}{\partial P_2} \quad (3)$$

توجه داشته باشید که در مشتق جزیی نسبت به P_2 ، بارهای ثابت $P_1,P_3,...,P_k,...,P_r$ حذف می شوند .

برای تکمیل راه حل ما به خواص بار – جابجایی سازه نیاز داریم . برای یک سیستم غیر خطی داریم :

$$F_j = b(\delta_j)^c$$

که اگر b و c مشخص باشند معادله ۳ به صورت زیر می شود :

$$\Delta_2 = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{F_j}{b}\right)^{1/c} \frac{\partial F_j}{\partial P_2} \quad (4)$$

در معادله ٤ ، F_j را می توان از شرایط تعادل اصلی به دست آورد ، یعنی روش گره ها که بر حسب P_2 بیان شده است . بدین طریق مقدار زیر محاسبه می شود :

$$\partial F_j / \partial P_2$$

پس از آن مقدار حقیقی P_2 به جای F_j در عبارت جایگذاری می شود و حاصلضرب زیر برای هر عضو محاسبه می شود :

$$(F_j/b)^{1/c}\partial F_j/\partial P_2$$

حاصل جمع ، مقدار Δ_2 را به ما خواهد داد . در مورد سازه های الاستیک خطی ، مقدار δ_j از بخش های ۷,٤ و ۷,۷ به صورت زیر محاسبه می شود :

$$\delta_j = \frac{F_j}{E_jA_j}L_j$$

که مقادیر E_j ، A_j و L_j به ترتیب مدول یانگ ، مساحت سطح مقطع و طول عضو J ام هستند . با جایگذاری δ_j در معادله ۳ به دست خواهیم آورد :

$$\Delta_2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_jL_j}{E_jA_j}\frac{\partial F_j}{\partial P_2} \quad (۵)$$

معادله ۵ را می توان به صورت مستقیم از قضیه اول کاستی گیلیانو (بخش ۲) که در معادله ۱۵,۳۵ بیان شد به دست آورد . برای یک سیستم الاستیک خطی ، انرژی کرنش و انرژی مکمل یکسانند . در این مورد ، انرژی کرنش عضو J ام از معادله ۷,۲۹ برابر مقدار زیر خواهد بود :

$$F_j^2L_j/2A_jE_j$$

جنبه های دیگر راه حل ، ارزش بررسی دارند . توجه داریم که عکس العمل های تکیه گاهی A و B در معادله ۱ ظاهر نمی شوند . این عدم حضور عکس العمل ها از آنجا ناشی می شود که جابجایی های $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k, \ldots, \Delta_r$ جابجایی های حقیقی خرپا هستند و شرایط سازگاری هندسی و گیرداری انتهایی را برآورده می کنند . بنابراین انرژی مکمل عکس العمل ها در A و B برابر صفر است ، به همین دلیل هر دو جابجایی مربوط به آنها برابر صفر است . در معادله ۵ عبارت زیر نسبت تغییر نیروهای حقیقی در اعضا را نسبت به P_2 نشان می دهد :

$$\partial F_j/\partial P_2$$

مانند آنچه در بحث غیر خطی گفته شد با محاسبه نیروهای F_j بر حسب P_2 در اعضا و سپس با دیفرانسیل گیری این عبارت ها نسبت به P_2 و در پی آن با جایگزینی مقدار حقیقی P_2 در عبارت ها به جای F_j با استفاده از معادله ۵ ، Δ_2 به دست خواهد آمد . این راهکار کمی زمخت و ناآزموده است . راهکاری ساده تر این است که ابتدا نیروهای F_j

ناشی از بارهای اعمالی شامل P_2 را در اعضا حساب کنیم ، سپس تمام بارها را حذف کنیم و P_2 را به عنوان نیروی ناشناخته ای اعمال کنیم و نیروهـای F_j را بـه عنـوان تـوابعی از P_2 دوباره محاسبه کنیم . مقدار زیر با دیفرانسیل گرفتن از این توابع به دست خواهد آمد :

$$\partial F_j/\partial P_2$$

این روال ، روشی را برای محاسبه تغییر مکان یک نقطه از خرپا در جهتی نا منطبق بر خـط اعمال بار مشخص می کند . به عبارت دیگر روشی برای محاسبه تغییر مکان نقطه ای مانند C کـه هیچگونـه بـاری را حمـل نمـی کنـد . در ابتـدا نیروهـای F_j در اعضـا ، ناشـی از $P_1,P_2,...,P_k,...,P_r$ محاسبه می شوند . سـپس ایـن بارهـا حـذف مـی شـوند و یـک بـار ساختگی یا مصنوعی P_f در نقطه مورد نظر در راستای تغییر مکان مورد نیاز اعمال می شـود . دسته جدیدی از نیروهای F_j بر حسب بار مصنوعی محاسبه می شود و بدین ترتیب مقدار زیر به دست می آید :

$$\partial F_j/\partial P_{\text{f}}$$

تغییر مکان خواسته شده که Δ_C در نقطه C نامیده می شود از رابطه زیر به دست می آید:

$$\Delta_C = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j L_j}{E_j A_j} \frac{\partial F_j}{\partial P_{\text{f}}} \quad (٦)$$

ساده سازی را می توان یک مرحله جلوتر نیز پیش برد . از آنجایی که سیستم ، الاستیک خطی است ، نیروی F_j در یک عضو ، ناشی از بار ساختگی را می توان بر حسب بار ساختگی بیان کرد ، به صورت زیر :

$$F_j = \frac{\partial F_j}{\partial P_{\text{f}}} P_{\text{f}} \quad (٧)$$

حال فرض کنید که بار ساختگی برابر واحد باشد (بار واحد) بدین ترتیب معادله ۷ به صورت زیر تبدیل می شود :

$$F_j = \frac{\partial F_j}{\partial P_{\text{f}}} 1$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$\partial F_j/\partial P_{\text{f}} = F_{1,j}$$

که بار در عضو jام ، ناشی از بار واحد اعمال شده در نقطه و در جهت جابجایی مورد نظر و خواسته شده است . بنابراین معادله ٦ را می توان به صورت زیر نوشت :

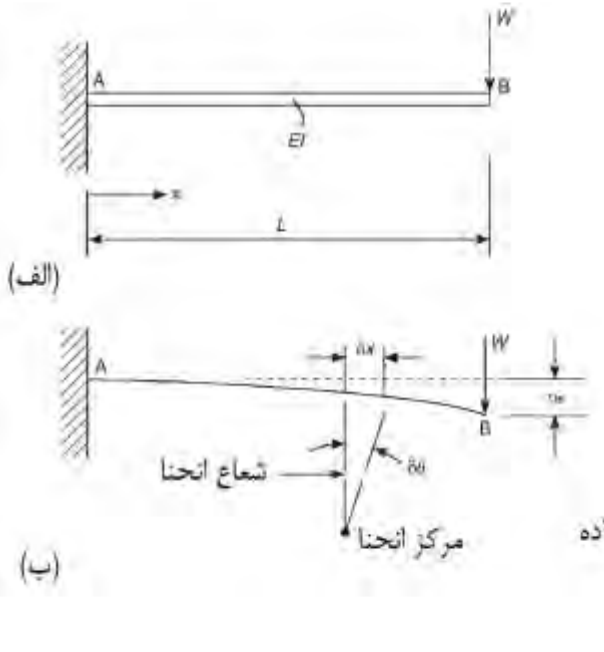
$$\Delta_C = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j F_{1,j} L_j}{E_j A_j} \quad (٨)$$

که یک بار واحد در نقطه C در جهت تغییر مکان خواسته شده اعمال شده است . توجه داشته باشید که معادله ٨ از نظر فرم همسان با معادله ٢ مثال ١٥،٦ است .

در بالا ، ما بر روی اعضای در معرض بارگذاری محوری تمرکز کردیم . این استدلال ها در مواردی که اعضای سازه ای ، لنگر های خمشی تولید کننده دوران ها ، بارهای برشی تولید کننده خیزهای برشی و لنگرهای تولید کننده زاویه های پیچش را تحمل می کنند نیز کاربرد دارد . حال ما کاربرد این روش در سازه های در معرض بارهایی بیش از بارهای محوری را نمایش می دهیم .

مثال ١٥،٨

خیز v_B را در انتهای آزاد تیر طره نشان داده شده در شکل ١٥،١٦ الف را محاسبه کنید .



شکل ۱۵،۱۶
خیز یک تیر طره با استفاده از انرژی مکمل

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

ما در نظر می گیریم که خیزهای ناشی از برش قابل چشم پوشی هستند ، بنابراین υ_B تماما دارای اثر خمشی در تیر است . در این مورد انرژی مکمل نهایی تیر از معادله ١٥,٣٩ برابر است با :

$$C = \int_0^L \int_0^M \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}M - W \upsilon_{\mathrm{B}} \qquad (1)$$

که M ، لنگر خمشی اثر کننده بر المان δx از تیر است . δx شامل زاویه کوچک $\delta\theta$ در مرکز انحنای تیر است . شعاع انحنای تیر در مقطع برابر با R است ، مانند آنچه در شکل ١٥,١٦ ب نشان داده شده است . (که ما برای وضوح ، تیر را با صفحه خنثی آن نمایش می دهیم .) . از اصل مقدار ثابت (ایستایی) مقدار نهایی انرژی مکمل در تیر خواهیم داشت :

$$\frac{\partial C}{\partial W} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial W} \, \mathrm{d}\theta - \upsilon_{\mathrm{B}} = 0$$

که از آنجا :

$$\upsilon_{\mathrm{B}} = \int_0^L \frac{\partial M}{\partial W} \, \mathrm{d}\theta \qquad (2)$$

در معادله ٢ :

$$\delta\theta = \frac{\delta x}{R}$$

و از معادله ٩,١١ :

$$-\frac{1}{R} = \frac{M}{EI}$$

(در اینجا انحنا منفی است زیرا مرکز انحنا در پایین تیر قرار دارد) بنابراین :

$$\delta\theta = -\frac{M}{EI} \, \delta x$$

با جایگزاری مقدار $\delta\theta$ در معادله ٢ خواهیم داشت :

$$\upsilon_{\mathrm{B}} = -\int_0^L \frac{M}{EI} \frac{\partial M}{\partial W} \, \mathrm{d}x \qquad (3)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

از شکل ١٥,١٦ الف می بینیم که :

$$M = -W(L - x)$$

بنابراین :

$$\frac{\partial M}{\partial W} = -(L - x)$$

توجه :

معادله ٣ را می توان به صورت مستقیم از معادله ٩,٢١ با استفاده از قضیه اول کاستی گیلیانو (بخش ٢) به دست آورد .

سپس معادله ٣ به صورت زیر می شود :

$$\upsilon_{\mathrm{B}} = -\int_0^L \frac{W}{EI}(L - x)^2 \mathrm{d}x$$

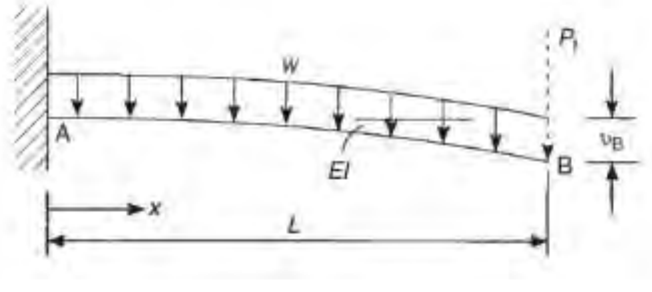
که از آنجا :

$$\upsilon_{\mathrm{B}} = -\frac{WL^3}{3EI} \quad \text{(مانند مثال ١٣,١)}$$

(توجه داشته باشید که υ_B به سمت پایین است و طبق قرارداد علامت ما منفی است .)

مثال ١٥,٩

خیز υ_B را در انتهای آزاد یک تیر طره حمل کننده بار گسترده با پخش یکسان و شدت w ، تعیین کنید . تیر در شکل ١٥,١٧ در صفحه خنثی خود نشان داده شده است . صلبیت خمشی تیر برابر EI است .



شکل ١٥,١٧
خیز یک تیر طره با استفاده از روش بار ساختگی

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

برای این مسئله ما از روش بار ساختگی برای تعیین υ_B استفاده می کنیم ، زیرا ما خیز را در نقطه ای می خواهیم که بر مکان بار متمرکز منطبق نیست . بنابراین ما یک بار ساختگی P_f را در نقطه B همانطور که نشان داده شده است اعمال می کنیم . انرژی مکمل نهایی C در تیر ناشی از بار گسترده یکنواخت نیز هست . بنابراین :

$$C = \int_0^L \int_0^M \mathrm{d}\theta \ \mathrm{d}M - P_\mathrm{f}\upsilon_\mathrm{B} - \int_0^L \upsilon w \, \mathrm{d}x \qquad (١)$$

که υ تغییر مکان طول المانی δx از تیر در هر فاصله x از انتهای گیردار است . سپس :

$$\frac{\partial C}{\partial P_\mathrm{f}} = \int_0^L \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial M}{\partial P_\mathrm{f}} - \upsilon_\mathrm{B} = 0$$

بنابراین :

$$\upsilon_\mathrm{B} = \int_0^L \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial M}{\partial P_\mathrm{f}} \qquad (٢)$$

توجه داشته باشید که در معادله ١ ، υ یک تغییر مکان حقیقی است و w یک بار حقیقی است ، بنابراین عبارت آخر هنگامی که از C نسبت به P_f مشتق جزیی گرفته شود ناپدید می شود . مانند مثال ١٥,٨ .

$$\delta\theta = -\frac{M}{EI}\,\delta x$$

همینطور :

$$M = -P_\mathrm{f}(L-x) - \frac{w}{2}(L-x)^2$$

که P_f غیر حقیقی است و بنابراین هنگامی که M را در معادله ٢ جایگزاری می کنیم P_f ناپدید می شود . بنابراین :

$$\frac{\partial M}{\partial P_\mathrm{f}} = -(L-x)$$

بدین ترتیب :

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\upsilon_B = -\int_0^L \frac{w}{2EI}(L-x)^3 dx$$

که از آنجا :

$$\upsilon_B = -\frac{wL^4}{8EI}$$ (مثال ۱۳٫۲ را ببینید)

برای یک سیستم الاستیک خطی ، لنگر خمشی M_f ناشی از بار ساختگی P_f را می توان به این صورت نوشت :

$$M_f = \frac{\partial M}{\partial P_f} P_f$$

اگر مقدار بار ساختگی را برابر بار واحد فرض کنیم :

$$M_f = \frac{\partial M}{\partial P_f} 1$$

بدین ترتیب :

$$\partial M / \partial P_f = M_1$$

لنگر خمشی ناشی از بار واحد اعمال شده در نقطه و در جهت خیز خواسته شده است . بنابراین ما می توانیم معادله ای برای خیز ، همانند معادله ۲ به صورت زیر بنویسیم :

$$\upsilon = \int_0^L \frac{M_A M_1}{EI} dx$$ (معادله ۲ مثال ۱۵٫۴ را ببینید) (۳)

که M_A لنگر خمشی حقیقی در هر مقطع تیر و M_1 لنگر خمشی در هر مقطعی از تیر ناشی از بار واحد اعمال شده در نقطه و در جهت خیز خواسته شده است . بنابراین در این مثال :

$$M_A = -\frac{w}{2}(L-x)^2 \qquad M_1 = -1(L-x)$$

بنابراین :

$$\upsilon_B = \int_0^L \frac{w}{2EI}(L-x)^3 dx$$

مانند قبل ، υ_B مثبت است ، که نشان می دهد هم جهت با بار واحد است .

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

آثار دما

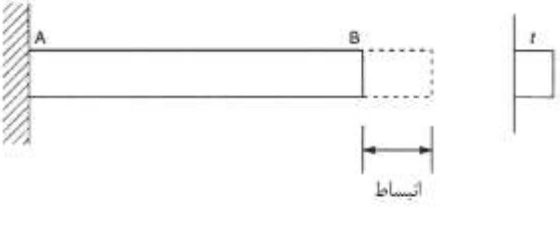
اصل مقدار ثابت (ایستایی) مقدار انرژی مکمل نهایی در عطف با روش بار واحد می تواند برای تعیین اثر گرادیان دما در ارتفاع تیر مورد استفاده قرار گیرد .

به صورت معمول ، اگر یک عضو سازه ای در معرض یک خیز دمایی یکنواخت t قرار گیرد مانند آنچه در شکل ۱۵,۱۸ نشان داده شده است منبسط می شود . با این وجود ، اختلافی در دما در ارتفاع عضو ، مانند اختلاف خطی نشان داده شده در شکل ۱۵,۱۹ ب ، باعث می شود بافت های بالایی بیشتر از بافت هایی پایینی منبسط شوند . بدین ترتیب کرنش های خمشی بدون تنش های خمشی ، مانند آنچه در شکل ۱۵,۱۹ الف نشان داده شده اند متمایل می شوند . توجه داشته باشید که زیرسطح عضو بدون کرنش است زیرا تغییرات دما در این ناحیه صفر است .

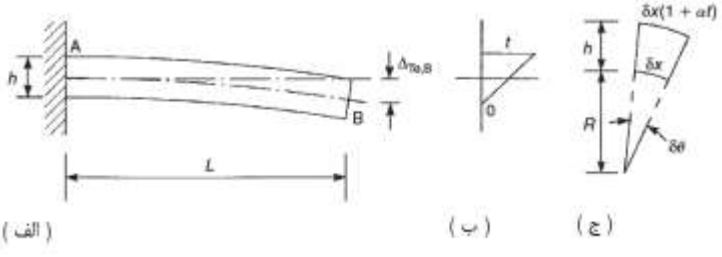
المان δx عضو را در نظر بگیرید . سطح بالایی در طول خود به $\delta x(1+\alpha t)$ افزایش خواهد یافت . در حالی که سطح پایینی برابر مقدار δx مانند آنچه در شکل ۱۵,۱۹ ج نشان داده شده است باقی خواهد ماند . α ضریب انبساط خطی مصالح عضو است . بنابراین از شکل ۱۵,۱۹ ج داریم :

$$\frac{R}{\delta x} = \frac{R+h}{\delta x(1+\alpha t)}$$

شکل ۱۵,۱۸
انبساط یک عضو ناشی از یک خیز حرارتی یکنواخت



شکل ۱۵,۱۹
خمش یک تیر ، ناشی از گرادیان دمای خطی



بنابراین :

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$R = \frac{h}{\alpha t}$$

همینطور :

$$\delta\theta = \frac{\delta x}{R}$$

که از آنجا :

$$\delta\theta = \frac{\alpha t\, \delta x}{h} \qquad (۱۵.۴۱)$$

اگر ما خیز $\Delta_{Te,B}$ را در انتهای آزاد عضو ، ناشی از خیز حرارتی بخواهیم . می توانیم روش بار واحد را مانند مثال ۱۵,۹ به کار ببریم . بنابراین از مقایسه با معادله ۲ در مثال ۱۵,۹ داریم :

$$\Delta_{\mathrm{Te,B}} = \int_0^L \mathrm{d}\theta \, \frac{\partial M}{\partial P_{\mathrm{f}}} \qquad (۱۵.۴۲)$$

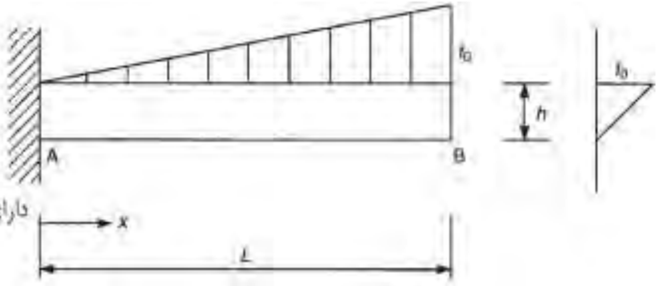
که ، همانطور که دیدیم ، لنگر خمشی M_1 در هر مقطعی از عضو ناشی از بار واحد اثر کننده در جهت عمودی و به سمت پایین در نقطه B است . حال با جایگزاری $\delta\theta$ در معادله ۱۵,۴۲ از معادله ۱۵,۴۱ داریم : (۱۵,۴۳)

$$\Delta_{\mathrm{Te,B}} = -\int_0^L M_1 \frac{\alpha t}{h} \, \mathrm{d}x$$

از اصل جمع آثار قوا (بخش ۳,۷) ، برای تیر حمل کننده بارهای حقیقی خارجی ، خیز نهایی برابر جمع خمش ، برش ، (مگر آنکه صرف نظر شود) و خیزهای دمایی (حرارتی) است . توجه داشته باشید که در معادله ۱۵,۴۳ ، t می تواند به صورت دلخواه در طول تیر تغییر کند اما در ارتفاع تیر فقط به صورت خطی می تواند تغییر کند . همچنین توجه داشته باشید که گرادیان دمای نشان داده شده در شکل ۱۵,۱۹ ب برای عضو شکلی خم تولید می کند . بنابراین شعاع انحنا ، R ، در معادله ۱۵,۴۱ منفی است . (با شکل ۹,٤ مقایسه کنید) . بنابراین ما باید یک علامت منفی در معادله ۱۵,۴۳ وارد کنیم ، مانند آنچه نشان داده شده است .

مثال ۱۵,۱۰

خیز را در انتهای آزاد تیر طره شکل ۱۵,۲۰ ، هنگامی که در معرض گرادیان های دمای نشان داده شده قرار دارد ، تعیین کنید .



شکل ۱۵,۲۰
خیز یک تیر طره
دارای گرادیان های دما در طول
و ارتفاع تیر

دمای t ، در هر مقطع x از تیر برابر است با :

$$t = \frac{x}{L} t_0$$

بنابراین ، با جایگزاری t در معادله ۱۵,۴۳ ، از آنجایی که اختلاف دما در ارتفاع تیر برابر است با آنچه در شکل ۱۵,۱۹ ب می بینید و با توجه به اینکه :

$$M_1 = -1(L - x)$$

داریم :

$$\Delta_{\mathrm{Te,B}} = -\int_0^L [-1(L - x)] \frac{\alpha}{h} \frac{x}{L} t_0 \, \mathrm{d}x$$

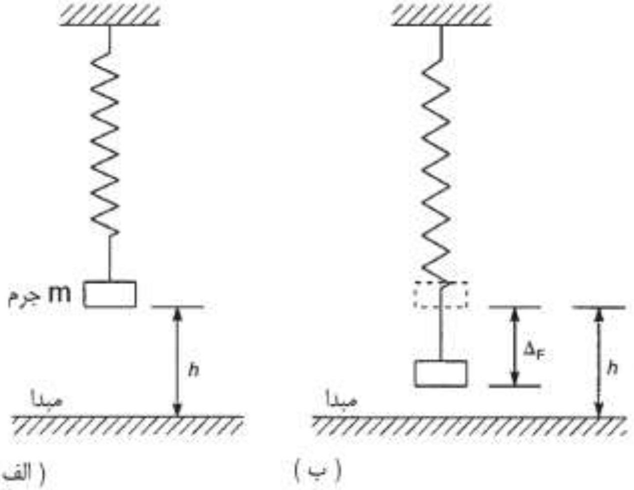
که از آنجا :

$$\Delta_{\mathrm{Te,B}} = \frac{\alpha t_0 L^2}{6h}$$

انرژی پتانسیل

در سیستم فنر – جرم ، در موقعیت کرنش نیافته ، نشان داده شده در شکل ۱۵,۲۱ الف ، انرژی پتانسیل جرم m ، محصولی از وزن و ارتفاع آن h است . ارتفاع h بر فرار نقطه مبدا اختیاری ثابت .

به عبارت دیگر ، انرژی را به خاطر موقعیتش کسب می کند . اگر به جرم اجازه داده شود تا به موقعیت تعادل نشان داده در شکل ۱۵٫۲۱ ب حرکت کند ، مقداری انرژی پتانسیل برابر با $mg\Delta_F$ را از دست خواهد داد . بنابراین خیز با از دست دادن مقداری انرژی پتانسیل همراه است یا به بیان دیگر ما می توانیم بگوییم که از دست دادن انرژی پتانسیل در جرم ، یک **کسب منفی** در انرژی پتانسیل را نشان می دهد . بنابراین اگر ما انرژی پتانسیل جرم را در موقعیت تغییر شکل نیافته (شکل ۱۵٫۲۱ الف) برابر با صفر بگیریم که مانند آن است که موقعیت نقطه مبدا را به گونه ای بگیریم که $h=o$ شود ، خواهیم داشت که انرژی پتانسیل حقیقی در موقعیت تغییر شکل یافته (شکل ۱۵٫۲۱ ب) برابر $-mgh$ است . در موقعیت تغییر شکل یافته ، انرژی نهایی سیستم جرم – فنر برابر با جمع انرژی پتانسیل جرم ($-mgh$) و انرژی کرنش فنر است .



شکل ۱۵٫۲۱
انرژی پتانسیل سیستم
فنر - جرم

با استفاده از استدلال بالا بر روی عضو الاستیک شکل ۱۵٫۱۳ الف و تعریف انرژی پتانسیل نهایی عضو TPE به عنوان مجموع انرژی کرنشی عضو ، U و انرژی پتانسیل بار،V ، ما داریم : (۱۵٫۴۴)

$$\mathrm{TPE} = U + V = \int_0^{\Delta_{j,\mathrm{F}}} P_j \, \mathrm{d}\Delta_j - P_{j,\mathrm{F}} \, \Delta_{j,\mathrm{F}}$$ (معادله ۱۵٫۲۴ را ببینید)

بنابراین برای سازه شامل n عضو ، تحت اثر سیستمی از بارهای $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_r$ ، مقدار TPE برابر است با : (۱۵٫۴۵)

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

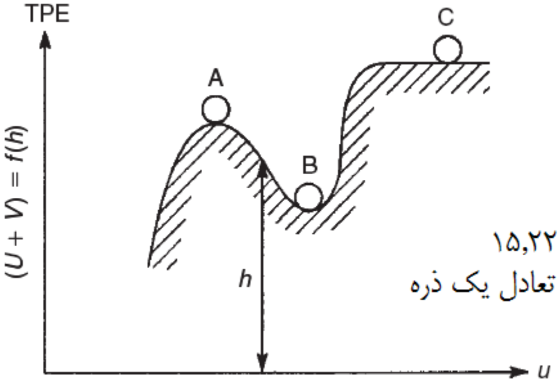
$$\mathrm{TPE} = U + V = \sum_{j=1}^{n} \int_{0}^{\Delta_{j,\mathrm{F}}} P_j \, \mathrm{d}\Delta_j - \sum_{k=1}^{r} P_k \, \Delta_k$$

که P_j نیروی داخلی در عضو jام است . $\Delta_{j,F}$ مقدار انبساط یا انقباض آن است و Δ_k تغییر مکان بار P_k در خط اثرش است .

اصل ایستایی (مقدار ثابت) مقدار نهایی انرژی پتانسیل

اجازه بدهید یک جسم الاستیک را در تعادل تحت دسته هایی از بارهای $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_r$ مورد بررسی قرار دهیم و همینطور اجازه بدهید فرض کنیم که ما تغییر مکان های مجازی بی نهایت کوچک $\delta\Delta_1, \delta\Delta_2, \ldots, \delta\Delta_k, \ldots, \delta\Delta_r$ را در نقاط اعمال بارها و در جهت بارها تحمیل می کنیم . کار مجازی انجام شده توسط بارها برابر است با : (۱۵,۴۶)

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \sum_{k=1}^{r} P_k \, \delta\Delta_k$$



شکل ۱۵,۲۲
موقعیت های تعادل یک ذره

این کار مجازی با یک افزایش انرژی کرنشی مجازی ، δU یا کار مجازی داخلی همراه است . با تحمیل تغییر مکان های مجازی در نقاط اعمال بارها ، ما کرنش های مجازی همراه و ضمیمه را در جسم ، القا می کنیم و به وجود می آوریم . بنابراین ، از اصل کار مجازی (معادله ۱۵,۲۳) داریم :

$$\delta W_{\mathrm{e}} = \delta U$$

یا :

$$\delta U - \delta W_{\mathrm{e}} = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

با جایگزاری δWe از معادله ۱۵,٤٦ به دست خواهیم آورد : (۱۵,٤۷)

$$\delta U - \sum_{k=1}^{r} P_k \, \delta \Delta_k = 0$$

که می توان آن را به شکل زیر نوشت :

$$\delta \left(U - \sum_{k=1}^{r} P_k \, \Delta_k \right) = 0$$

همانطور که می بینیم عبارت دوم انرژی پتانسیل V بارهای اعمالی است . از اینرو معادله به ان صورت می شود : (۱۵,٤۸)

$$\delta(U + V) = 0$$

و می بینیم که اگر سیستم در تعادل باشد ، *TPE* یک سیستم الاستیک دارای مقدار ثابتی برای تمام تغییر مکان های کوچک است. همچنین می توان نشان داد که اگر این مقدار ثابت ، یک کمینه باشد ، این تعادل ، پایدار است . می توان این امر را با آزمودن موقعیت های تعادل ذره در موقعیت های A ، B و C در شکل ۱۵,۲۲ نشان داد . *TPE* (انرژی پتانسیل نهایی) ذره ، متناسب با ارتفاع آن h ، بر فراز مبدا دلخواه u است . توجه داشته باشید که یک ذره منفرد انرژی کرنشی را کسب نمی کند . بنابراین در این مورد خاص ، $TPE=V$.
واضح است که در هر موقعیت ذره ، مقدار زیر برابر صفر است که تعادل را نشان می دهد :

$$\partial(U + V)/\partial u$$

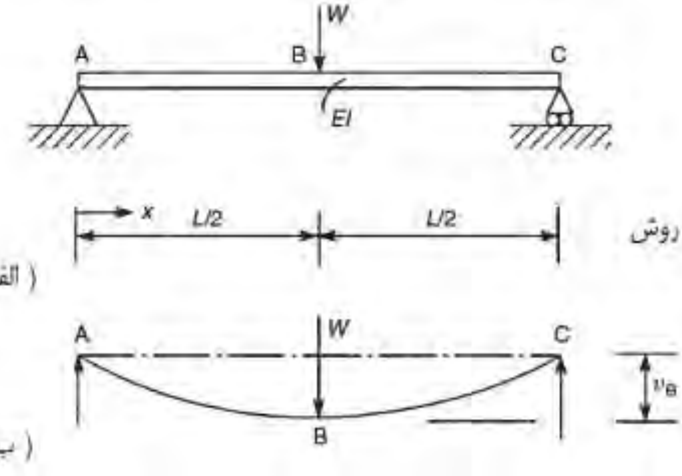
اما تنها در نقطه B که *TPE* کمینه است ، تعادل پایدار است . در حالی که تعادل در نقطه A ناپایدار است و در نقطه C تعادل خنثی است .
بنابراین اصل مقدار ثابت (ایستایی) انرژی پتانسیل نهایی (*TPE*) را می توان اینگونه بیان کرد :

انرژی پتانسیل نهایی TPE یک سیستم الاستیک برای همه تغییرمکان های کوچک ، هنگامی که سیستم در تعادل است ، دارای مقدار ثابتی است . علاوه بر این ، تعادل هنگامی پایدار است که مقدار ثابت ، کمینه باشد .

اغلب می توان انرژی پتانسیل را در تحلیل تقریبی سازه ها در مواردی که یک تحلیل دقیق در دسترس نیست به کار برد . ما چنین کاربردی را برای یک تیر ساده در مثال ۱۵،۱۱ نشان داده شده در زیر و همینطور در تیر کمانش کرده فصل ۲۱ نشان می دهیم . در هر دو مورد فرض می کنیم که شکل تغییر شکل یافته ناشناخته است و باید در ابتدا ، فرض شود . (این راهکار ، روش ریلی ریتز *Rayleigh-Ritz* نامیده می شود .) برای یک سیستم الاستیک خطی روش های مکمل انرژی و انرژی پتانسیل یکی هستند .

مثال ۱۵،۱۱

خیز تیر با اتکای ساده و الاستیک خطی *ABC* نشان داده شده در شکل ۱۵،۲۳ الف ، را در نقطه میان دهانه اش تعیین کنید .



شکل ۱۵،۲۳
مقدار تقریبی خیز تیر با استفاده از روش انرژی پتانسیل نهایی
TPE

فرض می کنیم که شکل تغییر شکل یافته تیر ، در ابتدا ناشناخته است . بنابراین شکل تغییر شکل یافته ای را در نظر می گیریم که شرایط مرزی تیر را ارضا کند . در حالت کلی ، توابع مثلثاتی و چند جمله ای شرایط مناسب تری را فراهم می کنند ، در حالی که توابع ساده تر راه حل هایی با دقت کمتر را ارائه می دهند . اجازه بدهید فرض کنیم که شکل تغییر شکل یافته تیر از رابطه زیر پیروی می کند :

$$v = v_B \sin \frac{\pi x}{L} \qquad (1)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

که υ_B مقدار خیز در نقطه میانه دهانه است . از معادله ۱ در می یابیم که هنگامی که $x=0$ و $x=L$ ، $\upsilon=o$ و هنگامی که $x=L/2$ مقدار $\upsilon=\upsilon_B$ است . علاوه براین :

$$d\upsilon/dx = (\pi/L)\upsilon_B \cos(\pi x/L)$$

که هنگامی که $x=L/2$ مقدار آن برابر صفر است . بنابراین تابع تغییر مکان شرایط مرزی تیر را ارضا می کند .

انرژی کرنشی ناشی از خمش تیر از معادله ۹,۲۱ برابر است با :

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI}\, dx \qquad (۲)$$

همینطور از معادله ۱۳,۳ :

$$M = EI\,\frac{d^2\upsilon}{dx^2} \qquad (۳)$$

با جایگزاری υ از معادله ۱ در معادله ۳ و M از معادله ۳ در معادله ۲ خواهیم داشت :

$$U = \frac{EI}{2}\int_0^L \frac{\upsilon_B^2\pi^4}{L^4}\sin^2\ \frac{\pi x}{L}\, dx$$

که می دهد :

$$U = \frac{\pi^4 EI\upsilon_B^2}{4L^3}$$

مقدار TPE تیر از رابطه زیر به دست می آید :

$$\mathrm{TPE} = U + V = \frac{\pi^4 EI\upsilon_B^2}{4L^3} - W\upsilon_B$$

بنابراین ، از اصل مقدار ثابت TPE :

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial\upsilon_B} = \frac{\pi^4 EI\upsilon_B}{2L^3} - W = 0$$

که خواهیم داشت :

$$\upsilon_B = \frac{2WL^3}{\pi^4 EI} = 0.02053\frac{WL^3}{EI} \qquad (۴)$$

عبارت دقیق خیز در نقطه میانه تیر در مثال ۱۳,۵ پیدا شد و برابر است با :

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$v_B = \frac{WL^3}{48EI} = 0.02083\frac{WL^3}{EI} \qquad (5)$$

با مقایسه نتایج دقیق و تقریبی در می یابیم که تفاوت کمتر از ۲ درصد است . علاوه براین خیز تقریبی کمتر از خیز دقیق است ، زیرا با فرض یک شکل خیزیافته ، در حقیقت ما در آن شکل به تیر قیدهایی را تحمیل کرده ایم ، بنابراین تیر سخت تر است .

۱۵,٤ قضیه های اثرات متقابل

دو قضیه اثرات متقابل وجود دارد . قضیه اول که به نام مکس ول است و قضیه جابجایی های متقابل (اغلب با نام قضیه اثرات متقابل مکس ول به آن ارجاع می شود .) است و دیگری توسط بتی و ریلی به دست آمده است و قضیه کار متقابل نام دارد . در واقع می توانیم ببینیم که قضیه اولی حالت خاص دومی است . همچنین می توانیم ببینیم که اثبات آنها بر مبنای اصل جمع آثار قوا (فصل ۳,۷) است و کاربرد آنها محدود به سازه های الاستیک خطی است .

قضیه جابجایی های متقابل

در یک جسم الاستیک خطی ، یک بار P_1 در نقطه ۱ وارد می شود و تولید تغییر مکان Δ_1 در آن نقطه و در راستای خط اثرش می کند .

$$\Delta_1 = a_{11}P_1$$

که a_{11} ضریب نرمی (انعطاف پذیری) است که به صورت تغییر مکان در نقطه ۱ در جهت P_1 ناشی از یک بار واحد در نقطه ۱ در راستای P_1 تعریف می شود . بدین ترتیب اگر جسم الاستیک در معرض دسته ای از بارها مثل $P_1, P_2, \ldots, P_k, \ldots, P_r$ قرار گیرد ، هر یک از بارها در تغییر مکان نقطه ۱ شرکت خواهند داشت . بنابراین جابجایی ذکر شده Δ_1 در نقطه ۱

(یعنی تغییر مکان نهایی ناشی از تمام بارها در راستای P_1) برابر است با :

$$\Delta_1 = a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \cdots + a_{1k}P_k + \cdots + a_{1r}P_r$$

که a_{12} جابجایی در نقطه ۱ در راستای P_1 ناشی از بار واحد در ۲ در راستای P_2 است و به همین منوال ، جابجایی های مرتبط در نقاط اعمال بارها برابر خواهد بود با : (۱۵,۴۹)

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_{11}P_1 + a_{12}P_2 + \cdots + a_{1k}P_k + \cdots + a_{1r}P_r\\
\Delta_2 &= a_{21}P_1 + a_{22}P_2 + \cdots + a_{2k}P_k + \cdots + a_{2r}P_r\\
&\vdots\\
\Delta_k &= a_{k1}P_1 + a_{k2}P_2 + \cdots + a_{kk}P_k + \cdots + a_{kr}P_r\\
&\vdots\\
\Delta_r &= a_{r1}P_1 + a_{r2}P_2 + \cdots + a_{rk}P_k + \cdots + a_{rr}P_r
\end{aligned}\right\}$$

یا در فرم ماتریسی : (١٥,٥٠)

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_k \\ \vdots \\ \Delta_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2r} \\ & & & \vdots & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kr} \\ & & & \vdots & & \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rk} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_r \end{Bmatrix}$$

یا می توان آن را با استفاده از زبان ماتریسی به صورت زیر نوشت :

$$\{\Delta\} = [A]\{P\}$$

حال فرض کنید که یک جسم الاستیک خطی در معرض یک بار که به صورت تدریجی اعمال می شود قرار دارد . بار P_1 در نقطه ١ اعمال می شود و سپس هنگامی که بار P_1 در موقعیت باقی می ماند بار P_2 نیز به تدریج در نقطه ای دیگر (نقطه ٢) اعمال می شود . انرژی کرنش نهایی ، U_1 جسم برابر است با کار خارجی انجام شده توسط نیروها ، بنابراین : (١٥,٥١)

$$U_1 = \frac{P_1}{2}(a_{11}P_1) + \frac{P_2}{2}(a_{22}P_2) + P_1(a_{12}P_2)$$

عبارت سوم در سمت راست معادله ١٥,٥١ ناشی از کار اضافی انجام شده توسط P_1 است ، زیرا در تغییر مکان بیشتری تحت اثر P_2 (به اندازه $a_{12}P_2$) قرار دارد . حال اگر ما بارها را حذف کنیم و سپس P_2 و متعاقب آن P_1 را اعمال کنیم . انرژی کرنش ، U_2 برابر خواهد

بود با :

(١٥,٥٢)

$$U_2 = \frac{P_2}{2}(a_{22}P_2) + \frac{P_1}{2}(a_{11}P_1) + P_2(a_{21}P_1)$$

طبق اصل جمع آثار قوا ، انرژی کرنشی جسم مستقل از روش و چینش اعمال بارها است . از اینرو :

$$U_1=U_2$$

بنابراین : (١٥,٥٣)

$$a_{12}=a_{21}$$

به همین دلیل در ساده ترین شکل ، قضیه جابجایی های متقابل به صورت زیر بیان می شود :

جابجایی در نقطه ١ در یک جهت معین ناشی از بار واحد در یک نقطه دوم ٢ و در یک جهت دوم برابر است با جابجایی در نقطه دوم ٢ در جهت دوم ناشی از بار واحد در نقطه ١ و در جهت معین .

قضیه جابجایی های متقابل را می توان در مورد لنگر ها و دوران ها نیز بیان کرد :

دوران در یک نقطه ١ ناشی از لنگر واحد در یک نقطه دوم ، برابر است با دوران در نقطه دوم ناشی از لنگر واحد در نقطه اول ١ .

در نهایت داریم :

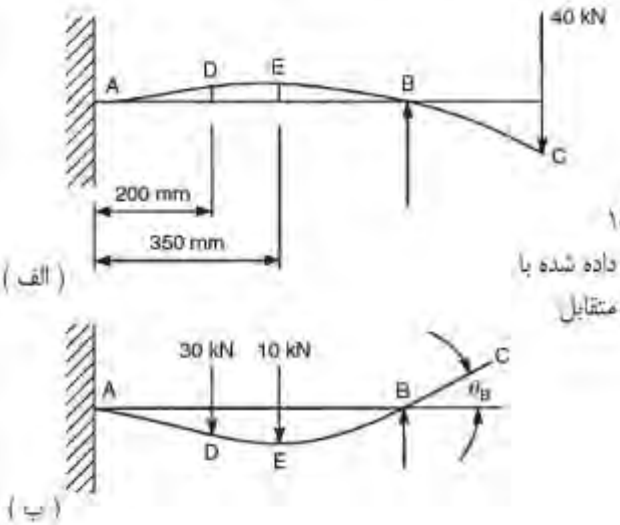
دوران بر حسب رادیان در یک نقطه (١) ناشی از بار واحد در نقطه ٢ ، از نظر عددی با جابجایی در نقطه ٢ در جهت بار واحد ، ناشی از یک لنگر واحد در نقطه ١ برابر است

مثال ١٥,١٢

یک طره با ٨٠٠ میلی متر طول و یک تکیه گاه در فاصله ٥٠٠ میلی متری از انتهای گیردارش ، هنگامی که تحت اثر بار متمرکز ٤٠ کیلونیوتنی در انتهای آزادش قرار می گیرد طبق مشاهدات زیر دچار تغییر شکل می شود.

فاصله از انتهای ثابت (mm)	0	100	200	300	400	500	600	700	800
خیز (mm)	0	0.3	1.4	2.5	1.9	0	−2.3	−4.8	−10.6

دوران زاویه ای تیر در تکیه گاه (غیر گیردار) تحت اثر بار ۳۰ کیلونیوتن در ۲۰۰ میلی متری انتهای گیردار همراه با یک بار ۱۰ کیلونیوتنی اعمال شده در ۳۵۰ میلی متری انتهای گیردار چقدر است ؟



شکل ۱۵،۲۴
خیز یک تیر طره تکیه داده شده با استفاده از قضیه اثر متقابل

شکل تغییر شکل یافته ابتدایی تیر طره در مقیاسی مناسب با توجه به اطلاعات و مشاهدات بالا رسم شده است و در شکل ۱۵،۲٤ الف نشان داده شده است . بنابراین از شکل ۱۵،۲٤ الف مشاهده می کنیم که خیز در نقطه D ناشی از یک بار ٤۰ کیلونیوتنی در C برابر ۱،٤ میلی متر است . از اینرو خیز در C ناشی از یک بار ٤۰ نیوتنی در D ، طبق قضیه اثرات متقابل برابر ۱،٤ میلی متر است . به همین طریق خیز در نقطه C ناشی از یک بار ۳۰ کیلونیوتنی در D برابر است با : *(3/4)*(1.4)=1.05mm* و دوباره از شکل ۱۵،۲٤ الف ، خیز در نقطه E ناشی از بار ٤۰ کیلونیوتن در C برابر ۲،٤ میلی متر است . بنابراین خیز در C ناشی از بار ۱۰ کیلونیوتن در E برابر است با : *(¼) * (2.4)=0.6mm*

بنابراین خیز نهایی در C ناشی از بار ۳۰ کیلونیوتن در D و بار ۱۰ کیلونیوتن در E برابر است با ۱،۰۵ + ۰،٦ = ۱،٦٥ میلی متر .

از شکل ۱۵,۲٤ ب ما مشاهده می کنیم که دوران تیر حول B از رابطه زیر به دست می آید :

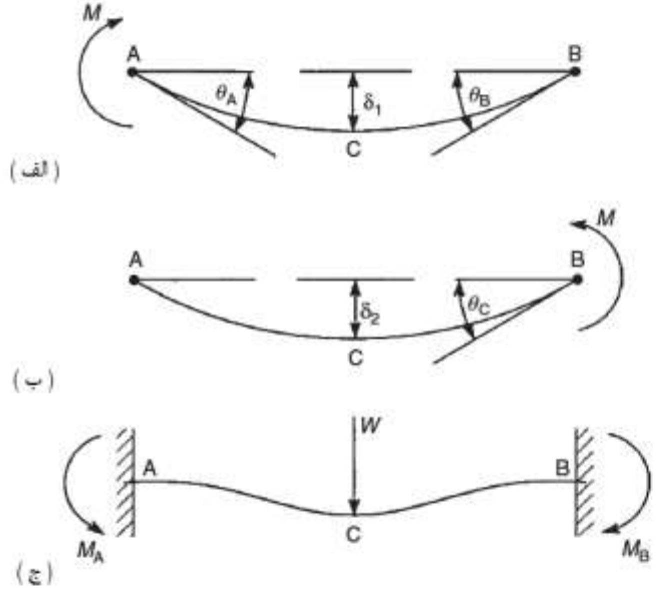
$$\theta_B = \tan^{-1}\left(\frac{1.65}{300}\right) = \tan^{-1}(0.0055)$$

$$\theta_B = 0°19'$$

مثال ۱۵,۱۳

عضو الاستیکی در دو انتهای خود A و B به میز نقشه کشی ای به صورت مفصل متصل شده است . هنگامی که لنگر M در A اعمال شود A به اندازه θ_A دوران می کند ، B به اندازه θ_B دوران می کند و مرکز به اندازه δ_1 خیز می کند . لنگر یکسانی در B وارد می شود و B به اندازه θ_C دوران می کند و مرکز به اندازه δ_2 خیز برمی دارد . هنگامی که بار W بر مرکز ، در جهت خیزهای اندازه گیری شده وارد می شود و A و B در برابر دوران گیردار هستند ، لنگر القا شده در A را بیابید .

سه حالت بارگذاری مختلف و جابجایی های مربوط ، در شکل ۱۵,۲۵ نشان داده شده است . بنابراین از شکل ۱۵,۲۵ الف و ب ، دوران در نقطه A ناشی از M در B ، طبق قضیه اثرات متقابل ، برابر است با دوران در B ناشی از M در A .



شکل ۱۵,۲۵
تحلیل مدل تیر دو سر گیردار

بنابراین :

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\theta_{A(b)} = \theta_B$$

در ادامه دوران در A ناشی از M_B در B برابر است با :

$$\theta_{A(c),1} = \frac{M_B}{M}\,\theta_B \qquad (۱)$$

که b و c مربوط به b و c در شکل ۱۵,۲۵ است .

همچنین ، دوران در A ناشی از بار واحد در C برابر است با خیز در C ناشی از لنگر واحد در A ، بنابراین :

$$\frac{\theta_{A(c),2}}{W} = \frac{\delta_1}{M}$$

یا :

$$\theta_{A(c),2} = \frac{W}{M}\,\delta_1 \qquad (۲)$$

که $\theta_{A(c),2}$ دوران A ناشی از W در C است . نهایتا دوران A ناشی از M_A در A از شکل ۱۵,۲۵ الف و ج برابر است با :

$$\theta_{A(c),3} = \frac{M_A}{M}\,\theta_A \qquad (۳)$$

دوران نهایی در A ، تولید شده توسط M_A در A ، W در C و M_B در B با توجه به معادله های ۱ و ۲ و ۳ برابر است با :

$$\theta_{A(c),1} + \theta_{A(c),2} + \theta_{A(c),3} = \frac{M_B}{M}\,\theta_B + \frac{W}{M}\,\delta_1 + \frac{M_A}{M}\,\theta_A = 0 \qquad (۴)$$

از آنجایی که انتهای A در برابر دوران گیردار شده است . به روشی مشابه ، دوران در B از رابطه زیر به دست می آید :

$$\frac{M_B}{M}\,\theta_C + \frac{W}{M}\,\delta_2 + \frac{M_A}{M}\,\theta_B = 0 \qquad (۵)$$

با حل معادله ٤ و ۵ مقدار M_A اینگونه به دست می آید :

$$M_A = W\left(\frac{\delta_2\theta_B - \delta_1\theta_C}{\theta_A\theta_C - \theta_B^2}\right)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

این حقیقت که لنگر اختیاری M در عبارت لنگر گیرداری در نقطه A ظاهر نمی شود . (همینطور برای M_B نیز ظاهر نمی شود .) از آنجا ناشی می شود که بار W کاربرد **بسیار مفیدی** از قضیه اثرات متقابل را به ما نشان می دهد که به ((تحلیل مدل)) سازه های نامعین استاتیکی معروف است . به عنوان مثال تیر دو سر گیردار شکل ۱۵,۲۵ ج ممکن است یک شاهتیر پل در مقیاس واقعی باشد ، اگر اینگونه باشد لازم است تا یک مدل ساخته شود ، مدلی از پرسپکس (*Perspex* مارکی تجاری که از پلاستیک آکریلیک پلیمری ساخته شده است .) دارای صلبیت خمشی EI مشابه تیر در مقیاس واقعی و دوران ها و تغییر مکان های آن ناشی از لنگر دلخواه ، M ، اندازه گیری شود تا لنگر های انتهاهای گیردارش در مقیاس واقعی تیر (حمل کننده بارهای واقعی) به دست آید .

قضیه کار متقابل

اجازه بدهید فرض کنیم که جسم الاستیک خطی تحت دو سیستم بار قرار دارد . سیستم اول

$P_1,P_2,...,P_k,...,P_r$ و سیستم دوم $Q_1, Q_2,..., Q_k,..., Q_r$ که ممکن است به صورت همزمان یا جداگانه اعمال شوند . همینطور اجازه بدهید فرض کنیم که جابجایی های مربوط به سیستم بارگذاری P برابر $\Delta_{P,1} , \Delta_{P,2} ,..., \Delta_{P,k} ,..., \Delta_{P,r}$ است و جابجایی های مربوط به سیستم بارگذاری Q برابر است با $\Delta_{Q,1} , \Delta_{Q,2} ,..., \Delta_{Q,i} ,..., \Delta_{Q,m}$.

و در نهایت اجازه بدهید فرض کنیم که بارهای P در نقطه های اعمال و در جهت بارهای Qجابجایی های $\Delta`_{Q,1} , \Delta`_{Q,2} ,..., \Delta`_{Q,i} ,..., \Delta`_{Q,m}$ را تولید می کنند و بارهای Q در نقطه های اعمال ودرجهت بارهایP جابجایی های $\Delta`_{P,1} , \Delta`_{P,2} ,..., \Delta`_{P,k} ,..., \Delta`_{P,r}$ را تولید می کنند .

حال فرض کنید که بارهای P و Q به جسم الاستیک به تدریج و به صورت همزمان اعمال شده اند . کار نهایی انجام شده است و از اینرو انرژی کرنش ذخیره می شود . که از رابطه زیر به دست می آید : (۱۵,۵٤)

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$U_1 = \tfrac{1}{2}P_1(\Delta_{P,1} + \Delta'_{P,1}) + \tfrac{1}{2}P_2(\Delta_{P,2} + \Delta'_{P,2}) + \cdots + \tfrac{1}{2}P_k(\Delta_{P,k} + \Delta'_{P,k}) + \cdots + \tfrac{1}{2}P_r(\Delta_{P,r} + \Delta'_{P,r}) + \tfrac{1}{2}Q_1(\Delta_{Q,1} + \Delta'_{Q,1}) + \tfrac{1}{2}Q_2(\Delta_{Q,2} + \Delta'_{Q,2}) + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_i(\Delta_{Q,i} + \Delta'_{Q,i}) + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_m(\Delta_{Q,m} + \Delta'_{Q,m})$$

حال اگر ما سیستم بارگذاری P و متعاقب آن سیستم بارگذاری Q را اعمال کنیم ، انرژی کرنشی نهایی ذخیره شده برابر است با : (١٥,٥٥)

$$U_2 = \tfrac{1}{2}P_1\Delta_{P,1} + \tfrac{1}{2}P_2\Delta_{P,2} + \cdots + \tfrac{1}{2}P_k\Delta_{P,k} + \cdots + \tfrac{1}{2}P_r\Delta_{P,r} + \tfrac{1}{2}Q_1\Delta_{Q,1} + \tfrac{1}{2}Q_2\Delta_{Q,2} + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_i\Delta_{Q,i} + \cdots + \tfrac{1}{2}Q_m\Delta_{Q,m} + P_1\Delta'_{P,1} + P_2\Delta'_{P,2} + P_k\Delta'_{P,k} + \cdots + P_r\Delta'_{P,r}$$

با استفاده از اصل جمع آثار قوا ، انرژی های کرنش نهایی U_1 و U_2 باید برابر باشند ، از معادله های ١٥,٥٥ و ١٥,٥٤ خواهیم داشت :

$$-\tfrac{1}{2}P_1\Delta'_{P,1} - \tfrac{1}{2}P_2\Delta'_{P,2} - \cdots - \tfrac{1}{2}P_k\Delta'_{P,k} - \cdots - \tfrac{1}{2}P_r\Delta'_{P,r} = -\tfrac{1}{2}Q_1\Delta'_{Q,1} - \tfrac{1}{2}Q_2\Delta'_{Q,2} - \cdots - \tfrac{1}{2}Q_i\Delta'_{Q,i} - \cdots - \tfrac{1}{2}Q_m\Delta'_{Q,m}$$

به عبارت دیگر : (١٥,٥٦)

$$\sum_{k=1}^{r} P_k\Delta'_{P,k} = \sum_{i=1}^{m} Q_m\Delta'_{Q,m}$$

عبارت سمت چپ معادله ١٥,٥٦ برابر است با جمع حاصلضرب بارهای P در جابجایی های مربوطه شان که ناشی از بارهای Q است . عبارت سمت راست معادله ١٥,٥٦ برابر است با جمع حاصلضرب بارهای Q در جابجایی های مربوطه شان که ناشی از بارهای P است . بنابراین می توان قضیه کار متقابل را اینگونه بیان کرد :

کاری که توسط سیستم بارگذاری اول در طی جابجایی ناشی از سیستم بارگذاری دوم انجام می شود برابر است با کاری که توسط سیستم بارگذاری دوم در طی جابجایی ناشی از سیستم بارگذاری اول انجام می شود .

دوباره ، مانند قضیه جابجایی های متقابل ، سیستم های بارگذاری ممکن است نیرو یا لنگر باشند و تغییر مکان ها می توانند خیز یا دوران باشند .

اگر در عبارت های بالا ، سیستم های بارگذاری P و Q شامل فقط دو بار باشند ، P_1 و Q_2 ، در این حالت از معادله ١٥,٥٦ داریم :

$$P_1(a_{12}Q_2) = Q_2(a_{21}P_1)$$

بدین ترتیب :

$$a_{12} = a_{21}$$

مانند آنچه در ابتدا بیان شد می بینیم که قضیه جابجایی های متقابل یک حالت خاص از قضیه کار متقابل است . علاوه بر استفاده قضیه اثرات متقابل در تحلیل مدل سازه ها مانند مثال ۱۵,۱۳ ، این قضیه ها برای برقرار کردن تقارن در ماتریس سختی در روش تحلیل ماتریسی برخی سیستم های سازه ای به کار می روند . ما این روند را در بخش ۱۶ مورد بررسی قرار خواهیم داد .

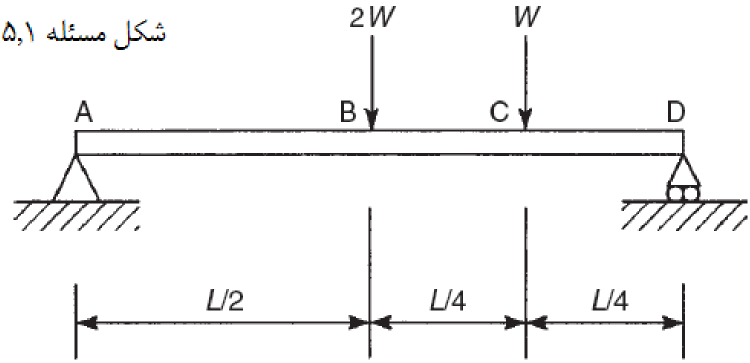
مسائل

مسئله ۱۵,۱

با استفاده از اصل کار مجازی عکس العمل های تکیه گاهی تیر *ABCD* نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۱ را تعیین کنید .

پاسخ . $R_A = 1.25W \quad R_D = 1.75W$.

شکل مسئله ۱۵,۱

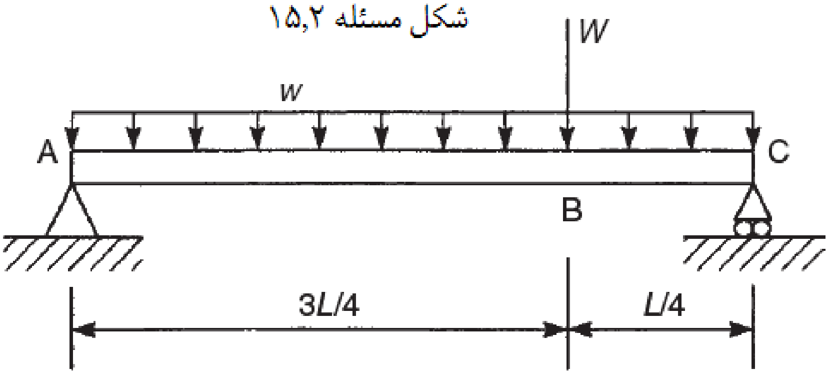


مسئله ۱۵,۲

عکس العمل های تکیه گاهی تیر *ABC* نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۲ را با استفاده از اصل کار مجازی بیابید .

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

شکل مسئله ۱۵,۲

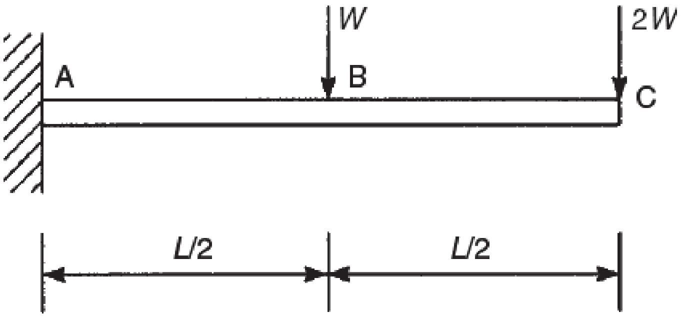


پاسخ . $R_A = (W + 2wL)/4 \quad R_c = (3W + 2wL)/4$

مسئله ۱۵,۳

عکس العمل ها را در انتهای گیردار تیر طره ABC نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۳ را با استفاده از اصل کار مجازی بیابید .

شکل مسئله ۱۵,۳



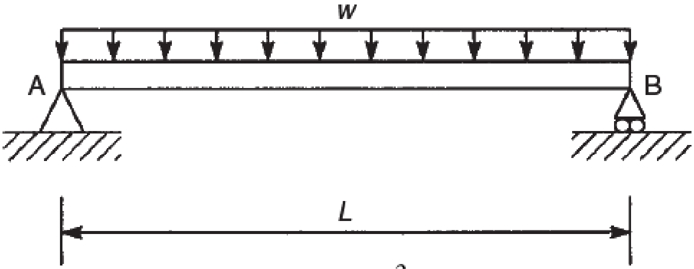
پاسخ . $R_A = 3W \quad M_A = 2.5WL.$

مسئله ۱۵,۴

با استفاده از اصل کار مجازی لنگر خمشی را در سه چهارم دهانه تیر نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۴ را تعیین کنید .

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

شکل مسئله ۱۵,۴

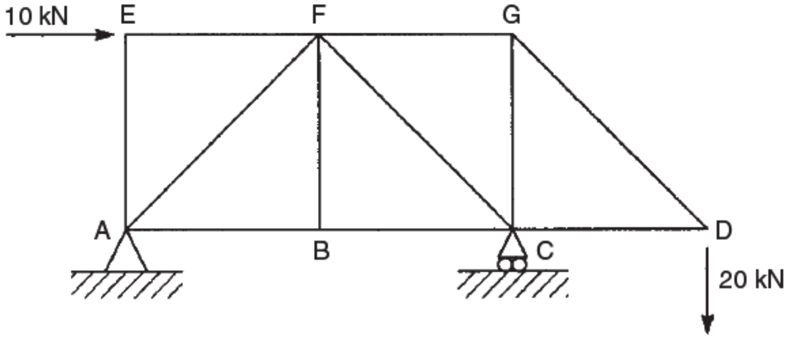


پاسخ . $3wL^2/32.$

مسئله ۱۵,۵

نیروهای اعضای FG,GD و CD خرپای نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۵ را با استفاده از اصل کار مجازی محاسبه کنید . تمام اعضای افقی و عمودی دارای طول ۱ متر هستند .

شکل مسئله ۱۵,۵

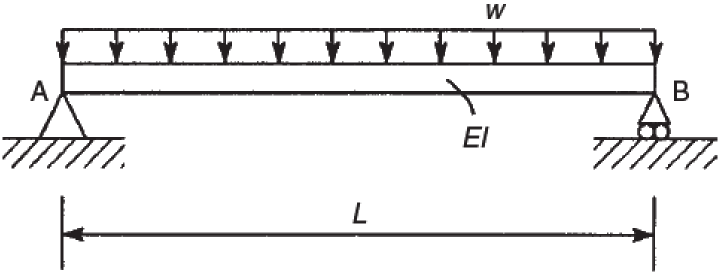


پاسخ. $FG = +20\,kN \quad GD = +28.3\,kN \quad CD = -20\,kN.$

مسئله ۱۵,٦

با استفاده از روش بار واحد جابجایی های قایم را در میانه و یک چهارم دهانه تیر نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,٦ محاسبه کنید .

شکل مسئله ۱۵٫۶

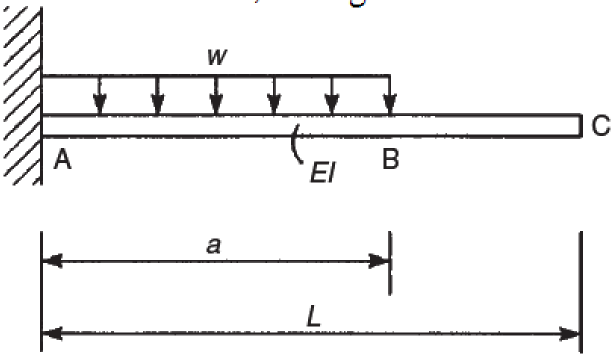


پاسخ . $57wL^4/6144EI$ $5wL^4/384EI$. (هر دو به سمت پایین)

مسئله ۱۵٫۷

با استفاده از روش بار واحد خیز انتهای آزاد C تیر طره ABC نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵٫۷ را محاسبه کنید .

شکل مسئله ۱۵٫۷

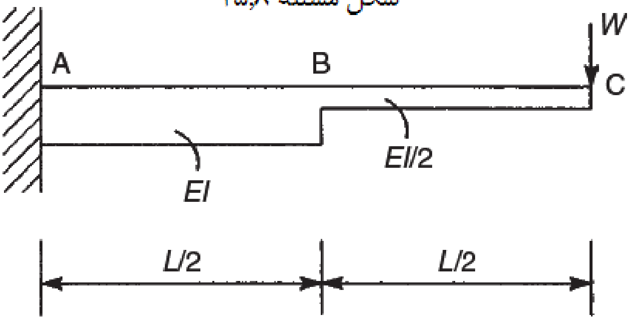


پاسخ. $wa^3(4L-a)/24EI$. (به سمت پایین)

مسئله ۱۵٫۸

با استفاده از روش بار واحد خیز انتهای آزاد تیر طره ABC نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵٫۸ را محاسبه کنید .

شکل مسئله ۱۵,۸

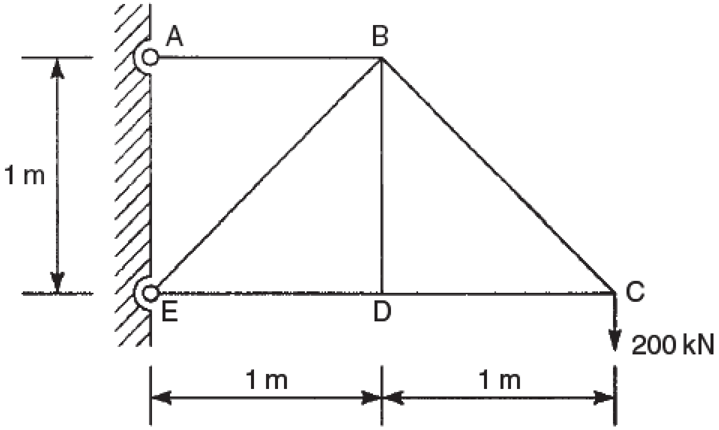


پاسخ . $3WL^3/8EI$. (به سمت پایین)

مسئله ۱۵,۹

با استفاده از روش بار واحد ، بزرگی و جهت خیز در گره C در خرپای نشان داده شده در شکل ۱۵,۹ را بیابید . تمامی اعضا دارای سطح مقطع ۵۰۰ میلی متر مربع و مدول یانگ ۲۰۰ هزار نیوتن بر میلی متر مربع می باشند .

شکل مسئله ۱۵,۹



پاسخ . 23.4 mm, 9.8° در سمت چپ خط عمودی

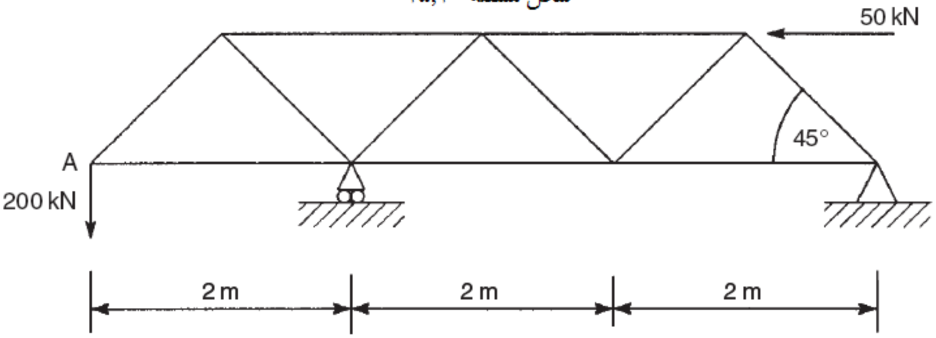
مسئله ۱۵,۱۰

بزرگی و جهت خیز درگره A درخرپای نشان داده شده در شکل ۱۵,۱۰را محاسبه کنید .اعضای فشاری دارای سطح مقطع ۱۰۰۰ میلی متر مربع و اعضای کششی دارای سطح مقطع ۷۵۰ میلی متر مربع هستند . مدول یانگ ۲۰۰ هزار نیوتن بر میلی متر مربع می باشند

.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

شکل مسئله ۱۵,۱۰



در سمت راست خط عمودی 30.3 mm, 10.5° .پاسخ

مسئله ۱۵,۱۱

پلیت مثلثی صلبی از صفحه ای افقی به وسیله سه سیم متصل به گوشه هایش آویزان شده است . هر یک از سیم ها دارای قطر ۱ میلی متر ، ۱۴۴۰ میلی متر طول و مدول الاستیسیته ۱۹۶ هزار نیوتن بر میلی متر مربع است . نسبت طول های اضلاع پلیت برابر است با ۳:٤:۵ .

خیز را در نقطه اعمال بار ۱۰۰ نیوتنی که آن نقطه (نقطه اعمال بار) ، فاصله اش از سه ضلع پلیت یکسان است محاسبه کنید .

پاسخ : ۰,۳۳ میلی متر

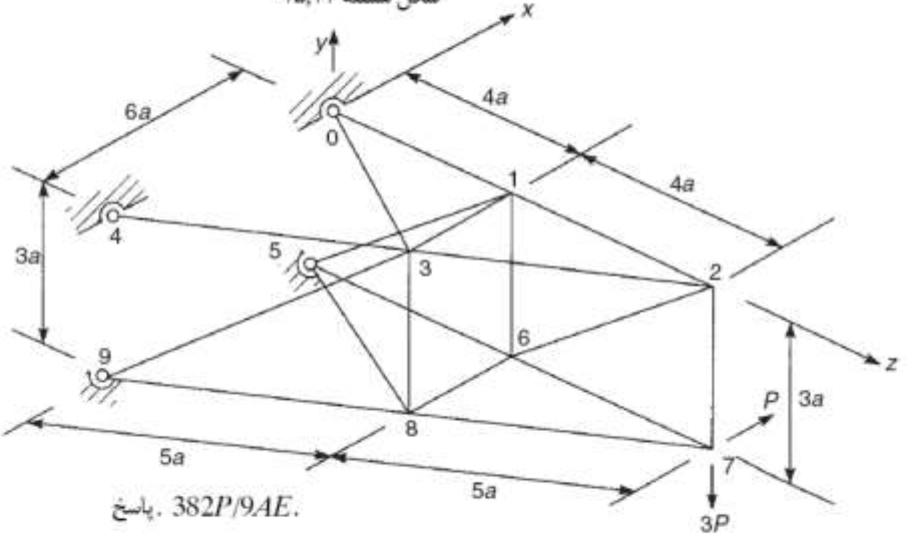
مسئله ۱۵,۱۲

خرپای فضایی با گره های مفصلی نشان داده شده در شکل مسئله ۱۵,۱۲ در ۰ ، ٤ ، ۵ و ۹ به تکیه گاه ها مفصل شده است و توسط نیروی P در راستای X و نیروی $3P$ در راستای منفی Y در نقطه ۷ بارگذاری شده است . دوران عضو ۲–۷ ناشی از این بارگذاری را حول محور z بیابید . تمامی اعضا دارای سطح مقطع یکسان A ، مدول یانگ یکسان E هستند .

(راهنمایی ، خیز در جهت x گره های ۲ و ۷ را محاسبه کنید .)

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

شکل مسئله ۱۵,۱۲

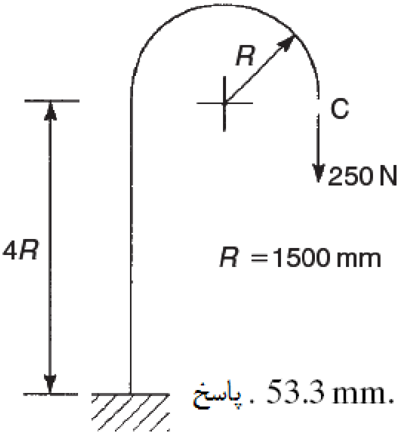


پاسخ. $382P/9AE$.

مسئله ۱۵,۱۳

دیرک لوله ای فولادی نشان داده شده در شکل ۱۵,۱۳ باری ۲۵۰ نیوتنی را در انتهای آزاد C حمل می کند . قطر خارجی لوله ۱۰۰ میلی متر و ضخامت دیواره آن ۳ میلی متر است .اگر مدول الاستیسیته فولاد ۲۰٦ هزار نیوتن بر میلی متر مربع باشد حرکت افقی C را محاسبه کنید.

شکل مسئله ۱۵,۱۳



پاسخ . 53.3 mm.

مسئله ۱۵٫۱۴

تیر طره ای با طول L و ارتفاع h تحت خیز حرارتی یکنواختی در طولش قرار گرفته است . دما به صورت خطی از t_1 در زیر سطح تیر تا t_2 در سطح بالایی تیر افزایش می یابد . اگر ضریب انبساط خطی مصالح تیر برابرα باشد خیز را در انتهای آزاد محاسبه کنید .

پاسخ : $\alpha(t_2-t_1)L^2/2h$

مسئله ۱۵٫۱۵

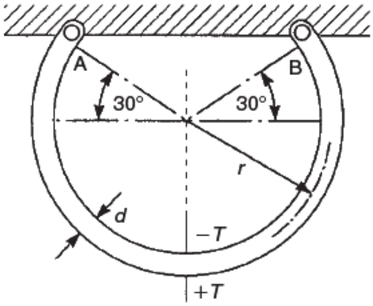
تیری با تکیه گاه ساده با دهانه L تحت گرادیان حرارتی ای که به صورت خطی از صفر در تکیه گاه سمت چپ تا t_o در تکیه گاه سمت راست افزایش می یابد ، قرار دارد . اگر گرادیان دما به صورت خطی در ارتفاع تیر h نیز تغییر کند و در زیر سطح آن نیز صفر باشد . خیز تیر را در میانه دهانه آن محاسبه کنید . ضریب انبساط خطی مصالح تیر برابر α است .

پاسخ : $-\alpha t_o L^2/48h$

مسئله ۱۵٫۱۶

شکل مسئله ۱۵٫۱۶ قابی را نمایش می دهد که به تکیه گاه های A و B به صورت مفصلی وصل شده است . محور قاب یک کمان دایروی است و مقطع یکسانی دارد و دارای سختی خمشی EI و عمق (مفهوم هم ارز ارتفاع در تیر) d است . تنش بیشینه در قاب ، ناشی از یک گرادیان حرارتی یکنواخت در عمق را بیابید . دما در سطوح خارجی و داخلی به مقدار T بالا و پایین می رود . ضریب انبساط خطی مصالح قاب برابر α است . (راهنمایی : نیمی از قاب را به عنوان یک تیر طره خم شده ، گیر دار در محور تقارنش در نظر بگیرید و عکس العمل افقی را در تکیه گاه ، با مساوی قرار دادن خیز افقی ناشی از گرادیان حرارتی و خیز افقی ناشی از عکس العمل به دست آورید .)

شکل مسئله ۱۵,۱۶



پاسخ . $1.29ET\alpha$.

مسئله ۱۵,۱۷

خیز را در میان دهانه تیر مثال ۱۵,۱۱ با فرض اینکه شکل تغییر شکل یافته تیر از تابع زیر پیروی می کند محاسبه کنید :

$$v = v_1 \sin\frac{\pi x}{L} + v_3 \sin\frac{3\pi x}{L}$$

که v_1 و v_3 پارامترهای تغییر مکان های ناشناخته هستند ، توجه داشته باشید که :

$$\int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2} \qquad \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = 0$$

پاسخ . $0.02078WL^3/EI$.

مسئله ۱۵,۱۸

تیری در هر دو انتهایش دارای اتکاست و در نیمی از دهانه اش واقع در وسط تیر (دو یک چهارم با EI در دو طرف) به گونه ای تقویت شده است که صلبیت خمشی اش $2EI$ است . تیر دارای دهانه به طول L است و بار متمرکز عمودی و به سمت پایین W را در نقطه میانه دهانه حمل می کند . با فرض تابع تغییر شکل به صورت زیر :

$$v = \frac{4v_m x^2}{L^3}(3L - 4x) \qquad (0 \le x \le L/2)$$

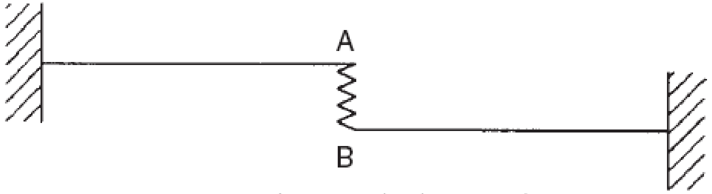
که v_m خیز در نقطه میان دهانه است ، مقدار v_m را تعیین کنید .

پاسخ. $0.00347WL^3/EI$.

مسئله ١٥,١٩

شکل مسئله ١٥,١٩ دو تیر طره را نشان می دهد ، انتهای یکی از آنها به صورت عمودی در بالای انتهای دیگری قرار دارد و به وسیله فنر AB به آن متصل شده است . در ابتدا سیستم کرنش نیافته است . وزن W که در A قرار داده می شود باعث خیز عمودی در A با نام δ_1 و خیز عمودی در B با نام δ_2 می شود . هنگامی که فنر از سیستم برداشته می شود بار W در A تولید خیزی در A به اندازه δ_3 می کند . هنگامی که مکان فنر جابجا می شود و وزن W به نقطه B جابجا می شود میزان باز شدن فنر را بیابید .

شکل مسئله ١٥,١٩



پاسخ . $\delta_2(\delta_1 - \delta_2)/(\delta_3 - \delta_1)$

مسئله ١٥,٢٠

تیری با طول ٢,٤ متر در دو نقطه A,B که از هم ١,٤٤ متر فاصله دارند اتکای ساده دارد . نقطه A در فاصله ٠,٣٦ متری از انتهای چپ تیر قرار دارد و نقطه B در ٠,٦ متری از انتهای سمت راست تیر قرار دارد . مقدار EI تیر برابر ^{8}١٠*٢٤٠ نیوتن بر میلی متر مربع است . شیب تکیه گاه ها را هنگامی که بار ٢ کیلونیوتنی به نقطه میانه AB اعمال می شود بیابید . از قضیه اثرات متقابل و نتایج بالا برای محاسبه خیز در نقطه میانه AB ، ناشی از بار ٣ کیلونیوتن اعمال شده در هر یک از انتهاهای تیر ، استفاده کنید .

پاسخ . 0.011, 15.8 mm.

فصل شانزدهم
تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی

مقدمه

در عمل، سازه‌های نامعین استاتیکی بیش از سازه‌های معین استاتیکی وجود دارند و به خاطر اینکه سخت‌تر و قوی‌تر هستند اقتصادی‌تر هستند. به عنوان مثال یک تیر دو سر گیردار که یک بار متمرکز را در میان دهانه خود حمل می‌کند دارای تغییرمکان در میان دهانه برابر با یک چهارم تیری است که دارای اتکای ساده است و همان بار متمرکز را در میان همان دهانه حمل می‌کند. این در حالی است که گشتاور خمشی به نصف کاهش می‌یابد. این بدان معناست که مقطع تیر کوچک‌تری برای تیر دو سرگیردار نیاز است و بدین ترتیب در مصالح صرفه جویی می‌شود.

با این وجود اشکالاتی نیز در استفاده از این نوع تیر وجود دارد. همانطور که در بخش۱۳-۶ دیدیم نشست تکیه‌گاه در تیر دو سر گیردار باعث ایجاد گشتاور خمشی‌ای علاوه بر گشتاورهایی می‌شود که توسط بارها ایجاد می‌شوند. این امر در نواحی مستعد فروکش، مشکلی اساسی است. عیب دیگر سازه‌های نامعین استاتیکی این است که تحلیل آنها نیازمند محاسبه تغییرمکان‌هاست به گونه‌ای که ابعاد سطح مقطع آنها در ابتدای کار نیاز است. بدین ترتیب طراحی چنین سازه‌هایی به موضوعی سعی و خطایی تبدیل می‌شود، در حالیکه نیروهای اعضای سازه‌های معین استاتیکی مستقل از اندازه عضو هستند. به عبارت دیگر شکست عضو در قاب نامعین استاتیکی، لزوماً فاجعه آمیز نخواهد بود زیرا روش‌های بارگذاری دیگری نیز ممکن است مقدور باشند، حداقل به صورت موقتی. در حالیکه در یک سازه معین استاتیکی شکست یک عضو خرپا تقریباً در اغلب اوقات منجر به ویرانی آنی می‌شود.

انتخاب بین سازه‌های معین استاتیکی و سازه‌های نامعین استاتیکی تا حدود زیادی وابسته به منظور و هدفی است که یک سازه خاص مورد نیاز است. همانطور که دیدیم تیرهای دو سرگیردار و تیرهای سراسری به صورت غیر مفیدی درگیر و تحت اثر نشست تکیه‌گاه‌ها

هستند. اضافه کردن لولا در نقاط عطف می‌تواند سازه را معین کند و مشکل را مرتفع سازد. این روند و روال برای ساخت سازه‌های بلند میسر نمی‌باشد و این سازه‌ها نامعین باقی می‌مانند. بدین ترتیب هر دو نوع سازه عملاً وجود دارند، به همین دلیل روش‌های تحلیلی برای هر دو نوع سازه معین و نامعین استاتیکی نیاز است.

در این فصل ما روش‌هایی را برای تحلیل شکل‌های مختلفی از سازه‌های نامعین استاتیکی مورد بررسی قرار می‌دهیم. به عنوان پیش زمینه ما اساس روش‌های مختلف را مورد بررسی قرار می‌دهیم و روش‌های تعیین درجه نامعینی استاتیکی و کینماتیکی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. تعیین درجه نامعینی بخشی اساسی از روند تحلیل است.

۱۶-۱ روش‌های نرمی و سختی

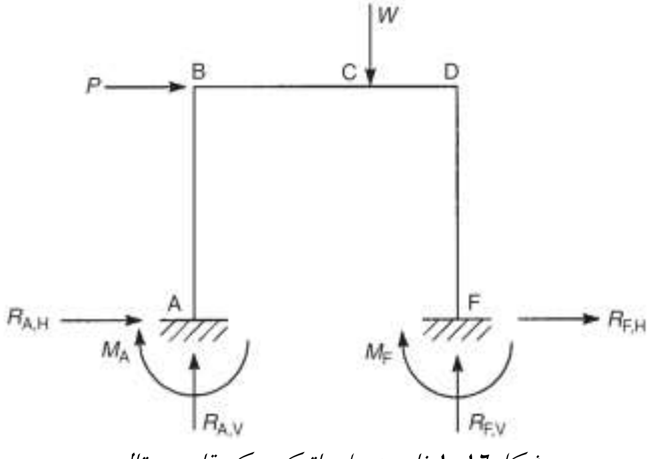
در بخش ۴-۴ به صورت مختصر در مورد نامعینی استاتیکی خرپاها بحث کردیم و شرایط خاصی را برای پایداری و معینی استاتیکی خرپاها به دست آوردیم که همواره کاربرد نداشت. این شرایط خاص به تعداد اعضا و گره‌ها مربوط بود و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را که به صورت جداگانه می‌توانند معین یا نامعین استاتیکی باشند را در مسئله دخالت نداده بود. بدین ترتیب این شرایط یکی از شرایط معینی استاتیکی داخلی بوده است. با این تفسیر، وضعیت عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی مربوط به معینی استاتیکی خارجی است.

قاب پرتال (درگاه) نشان داده شده در شکل ۱۶-۱ را در نظر بگیرید. قاب، بارهای P و W را در صفحه خود حمل می‌کند و بدین ترتیب، سیستم دوبعدی است. از آنجایی که اعضای عمودی AB و FD قاب در انتهاهای A و F گیردار شده‌اند، بارهای اعمال شده تولید ۶ عکس‌العمل نیرو و گشتاور مانند آنچه در شکل نشان داده شده است می‌کنند. برای یک سیستم دو بعدی سه معادله تعادل استاتیکی وجود دارد. (معادله ۲-۱۰) بدین ترتیب این قاب از نظر استاتیکی نامعین خارجی است و دارای درجه نامعینی ۳ است. این موقعیت با برش زدن در یکی از اعضا بهبود نمی‌یابد زیرا با وجود حذف یکی از مجموعه عکس‌العمل‌ها، سه برآیند تنش داخلی را ایجاد می‌کند. اگر سه عکس‌العمل تکیه‌گاهی مشخص باشند یا سه برآیند تنش مشخص باشند با استفاده از معادله‌های تعادل استاتیکی سه مجهول به دست می‌آیند و مسئله حل می‌شود.

موقعیت متفاوتی در خرپای ساده نشان داده شده در شکل ٤–٧ ب رخ می‌دهد، که همانطور که می‌بینیم برآیند اضافی قطری در خرپا سازه را دچار یک درجه نامعینی استاتیکی داخلی می‌کند. توجه داشته باشید که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها معین استاتیکی هستند.

در تحلیل سازه‌های نامعین استاتیکی دو روش به کار می‌رود. در یک روش، سازه با آزاد کردن به یک سازه معین استاتیکی کاهش می‌یابد، یعنی با حذف تعداد مناسبی از مجهولات با استفاده از بررسی شرایط تعادل استاتیکی شرایطی فراهم شود که عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی یا (و) برآیند تنش‌های داخلی به دست بیایند.

به عنوان مثال در قاب شکل ١٦–١ اگر یکی از تکیه‌گاه‌ها غلتکی و دیگری مفصل شود تعداد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به سه کاهش می‌یابد. نتیجه مشابهی به دست می‌آید اگر یک تکیه‌گاه گیردار باقی بماند و دیگری کاملاً حذف شود. همینطور در خرپای شکل ٤–٧ب با حذف یک عضو قطری، عمودی یا افقی خرپا معین استاتیکی می‌شود. آزاد کردن یک سازه با این روش باعث ایجاد جابجایی‌هایی می‌شود که در غیر این حالت وجود نخواهند داشت. این جابجایی‌ها را می‌توان با تحلیل سازه آزاد شده معین استاتیکی محاسبه کرد. سپس سیستم نیروی مورد نیاز برای حذف آنها به دست خواهد آمد. یعنی با استفاده از شرایط سازگاری جابجایی.



شکل١٦–١ نامعینی استاتیکی یک قاب پرتال

این روش اصطلاحاً روش نرمی یا روش نیرو نامیده می‌شود. این روش در حل طره پایه‌دار شکل ١٣–٢٢ مورد استفاده قرار گرفت.

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

روش دیگری که به عنوان روش سختی یا روش جابجایی شناخته می‌شود مشابه روش نرمی است، تفاوت اصلی این است که در این روش، مجهولات، جابجایی‌ها و تغییرمکان‌ها در نقاط خاصی از سازه هستند. این روش نیازمند آن است که سازه به تعدادی المان تقسیم شود که برای هر کدام از المان‌ها روابط بار–جابجایی مشخص باشند و مجهول نباشند. سپس معادله‌های تعادل در محل تقاطع المان‌ها با هم بر حسب جابجایی‌ها نوشته می‌شود و برای به دست آوردن جابجایی‌های خواسته شده حل می‌شوند.

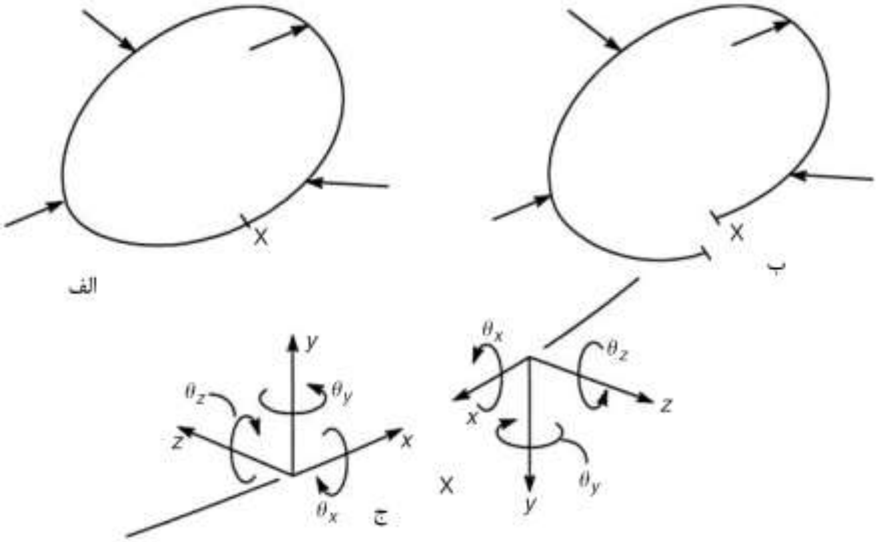
برای سازه‌های واقعی، نتیجه هر دو روش نرمی و سختی، درجات بالایی از نامعینی استاتیکی و تعداد زیادی از معادلات همزمان را به همراه خواهند آورد که به وسیله تکنیک‌های بر مبنای کامپیوتر به راحتی قابل حل هستند. با این وجود، روش نرمی نیازمند این است که سازه با آزاد کردن، به شرایط معین استاتیکی کاهش یابد که این روند، نیازمند قضاوت طراح است. روش سختی به هیچ قضاوتی نیازمند نیست و به صورت خاصی برای محاسبه خودکار مناسب است. هرچند کاربرد عملی روش‌های سختی و نرمی اساساً بر مبنای کامپیوتر است، اما این روش‌های تحلیل همانطور که خواهیم دید دارای مبنای دستی هستند. پیش از بررسی این مبناهای محاسباتی دستی با جزییات بیشتری نامعینی سازه‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم زیرا ما به تعیین درجه نامعینی سازه‌ها نیازمندیم، به این دلیل که در روش نرمی برای تعیین مقدار مناسب آزاد کردن‌ها در سازه باید درجه نامعینی سازه را بدانیم. به صورت همزمان نامعینی کینماتیکی یک سازه برای تعیین تعداد قیدهایی که باید برای معینی کینماتیکی سازه در روش سختی به آن اعمال شود نیازمند است.

۱۶–۲ درجه نامعینی استاتیکی

در برخی موارد درجه نامعینی استاتیکی یک سازه با بررسی به سادگی به دست می‌آید. به عنوان مثال قاب پرتال شکل ۱۶–۱ دارای درجه نامعینی استاتیکی خارجی ۳ است و خرپای شکل ٤–۷ ب دارای درجه نامعینی داخلی ۱ است. با این وجود در بسیاری از موارد، درجه نامعینی به سادگی به دست نمی‌آید و در موارد دیگر نامعینی داخلی و خارجی ممکن است از هم مستقل نباشند و به همین دلیل ما باید تمام سازه از جمله سیستم تکیه‌گاه‌ها را مورد بررسی قرار دهیم. به همین دلیل راهبردی روشمندتر نیاز است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۶-۲ نامعینی استاتیکی یک حلقه

حلقه‌ها

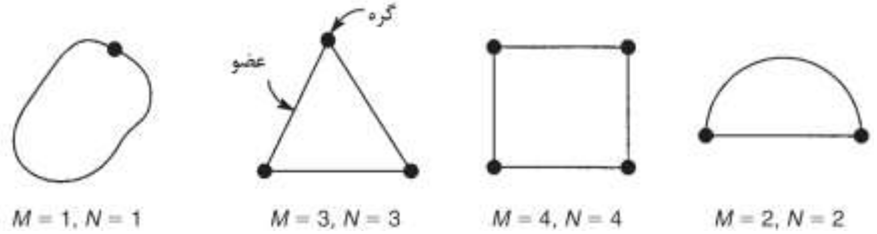
ساده‌ترین راهبرد این است که قیدهایی را به سازه وارد کنیم تا به مجموعه‌ای از حلقه‌های کاملاً سخت تبدیل شود. نامعینی استاتیکی یک حلقه مشخص است و همانطور نامعینی استاتیکی سازه کاملاً سخت. سپس تعدادی آزادی افزوده می‌شود تا سازه کاملاً سخت به حالت اولیه خودش بازگردد. بدین ترتیب درجه نامعینی سازه واقعی یافته می‌شود.

تک حلقه نشان داده شده در شکل ۱۶-۲الف را در نظر بگیرید. حلقه تحت اثر تعدادی از نیروها که هم صفحه نیستند در محیط فضایی در تعادل است. اگر حلقه در نقطه‌ای مانند X بریده شود انتهاهای بریده شده حلقه متناسب با همدیگر مانند آنچه در شکل ۱۶-۲ب نشان داده شده است جابجا خواهند شد زیرا نیروهای داخلی متعادل کننده نیروهای خارجی حذف شده‌اند. انتهاهای بریده شده حلقه تا زمانی که موقعیت تعادل جدیدی یافته شود در ۶ مسیر موجود نسبت به همدیگر حرکت می‌کنند. یعنی، حرکت انتقالی حول x y و z و حرکت دورانی حول x y و z مانند آنچه در شکل ۱۶-۲ج نشان داده شده است. در این حالت، حلقه معین استاتیکی است و سیستم نیروهای داخلی را در هر مقطع می‌توان به سادگی با بررسی تعادل به دست آورد. برای اتصال دوباره انتهاهای حلقه ما به نیروها و گشتاورهایی متناسب با جابجایی‌ها نیازمندیم. یعنی سه نیرو و سه گشتاور.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

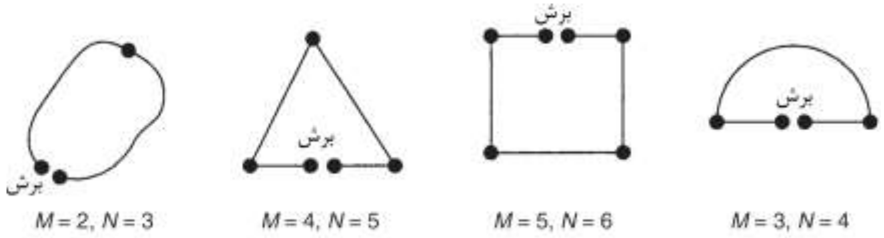
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

بنابراین در هر مقطع و برش از یک حلقه کامل تحت سیستم بارگذاری خارجی دلخواه، سه نیروی داخلی و سه گشتاور داخلی وجود دارد که به دست آوردن هیچ یک از آنها توسط استاتیک میسر نیست. بدین ترتیب یک حلقه ٦ درجه نامعین استاتیکی است. در یک سیستم دو بعدی که نیروها در صفحه حلقه اعمال می‌شوند، سیستم نیروهای داخلی به نیروهای محوری (نیروی برشی و گشتاور) کاهش می‌یابد و بدین ترتیب حلقه دو بعدی سه درجه نامعین استاتیکی است.



شکل۱٦-۳ مثال‌هایی از حلقه‌ها

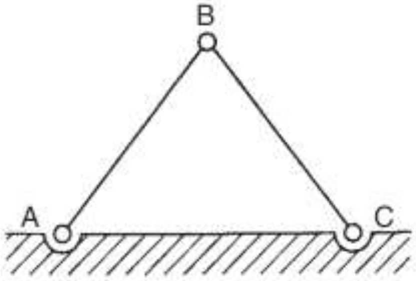
استدلال بالا بر روی هر حلقه بسته قابل کاربرد است و حلقه می‌تواند به هر شکلی باشد. علاوه بر این می‌توان حلقه را شامل هر تعداد عضو که یک حلقه بسته را شکل بدهند و در گره‌ها به هم متصل شده باشند در نظر گرفت.



شکل۱٦-٤ بریدن حلقه بر اعضا و گره‌ها

گره به عنوان نقطه انتهای یک عضو تعریف می‌شود. مثال‌هایی از حلقه‌ها در شکل ۱٦-۳ نشان داده شده است، تعداد اعضا با M و تعداد گره‌ها با N نشان داده شده است. توجه داشته باشید که تعداد گره‌ها و اعضا برابر هستند . در حالتی که حلقه بریده می‌شود عضوی اضافی به همراه دو گره جدید به وجود می‌آید، مانند آنچه در شکل ۱٦-٤ نشان داده شده است.

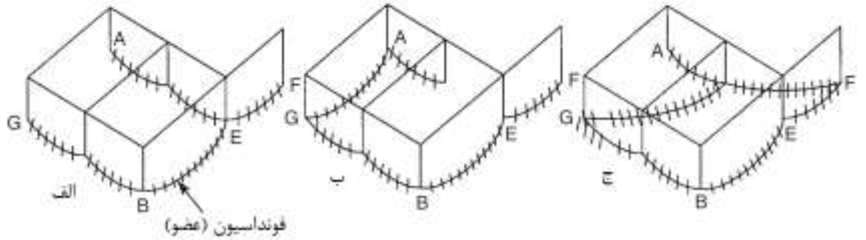
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۶-۵ کارکرد فونداسیون به عنوان یک عضو سازه‌ای

تمام سازه

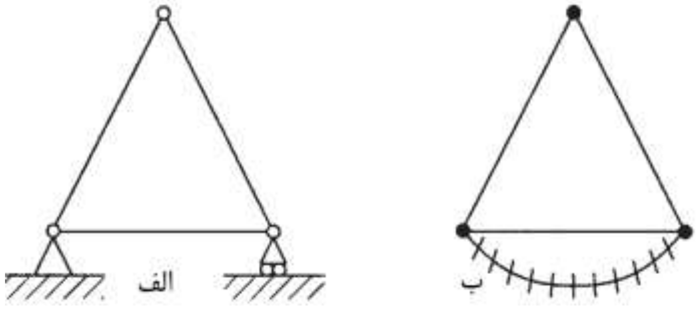
از آنجایی که ما تعداد حلقه‌ها در یک سازه را نیاز داریم و از آنجایی که اساساً نیاز است که سیستم تکیه‌گاه‌ها را هم در نظر بگیریم، باید در مورد چیزی که سازه را تشکیل می‌دهد تصمیم بگیریم. به عنوان مثال در شکل ۱۶-۵ اعضای AB و BC به فونداسیون در نقاط A و C مفصل شده‌اند. فونداسیون به عنوان عضوی با سختی بسیار بالا عمل می‌کند. در این شمایل ساده کاملاً مشهود است که اگر گره‌های مفصلی با گره‌های صلب جایگزین شوند اعضای AB و BC همراه با فونداسیون تشکیل یک حلقه را می‌دهند. در سازه‌های پیچیده‌تر باید مطمئن شویم که بخش مناسبی از فونداسیون را وارد بحث کردیم، بدین ترتیب نامعینی‌های اضافی و غیرلازم عرضه نمی‌شود. پس از این حالت سازه را تمام سازه می‌نامیم. این شرایط نیازمند آن است که نقاط تکیه‌گاه به صورت منفرد به هم متصل باشند به گونه‌ای که برای هر دو نقطه A و B در سیستم فونداسیون تنها یک مسیر از A به B وجود دارد و هیچ مسیر دیگری وجود ندارد.



شکل۱۶-۶ تعیین تمام سازه

به عنوان مثال در شکل ۱۶-۶الف و ب فقط یک مسیر بین A و B وجود دارد که مسیر دیگری برای ردپا گرفتن وجود ندارد. در شکل ۱۶-۶ج دو مسیر از A به B وجود دارد،

یکی از G و دیگری از F و E. بنابراین نقاط تکیه‌گاه در شکل ۱۶–۶الف و ب به صورت منحصر به فرد به هم متصل شده‌اند در حالی که در شکل ۱۶–۶ج اتصال چندگانه است. ما توجه داریم که در شکل‌های بالا ممکن است که تعدادی راه وجود داشته باشند که نقاط تکیه‌گاهی در یک سیستم فونداسیونی را به صورت منحصر به فرد به هم متصل کنند و همینطور توجه داریم که هر نقطه تکیه‌گاه در تمام سازه به حداقل یک (عضو) فونداسیون وصل شده است. با به حساب آوردن اعضای فونداسیون تعداد اعضا افزایش می‌یابد اما تعداد گره‌ها ثابت است.



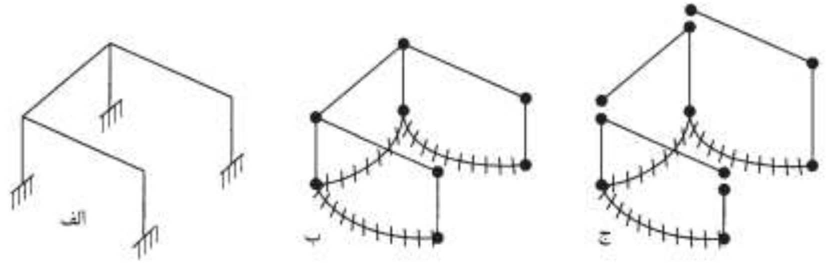
شکل۱۶–۷ یک سازه بسیار سخت

سازه‌های کاملاً سخت

با بنا نهادن اساس مفهوم *تمام سازه*، حال ما به *سازه کاملاً سخت* نیازمندیم که در این سازه‌ها هیچ عضو یا نقطه‌ای وجود ندارد که هر برآیند تنشی در آن عضوها یا نقاط، برای هر سیستم بارگذاری ممکن همواره صفر باشد. بر این مبنا، سازه کاملاً سخت (شکل ۱۶–۷ب) مربوط به خرپای شکل ۱۶–۷الف دارای گره‌های صلب است و دارای اعضایی است که دارای قابلیت مقاومت در برابر بارهای برشی علاوه بر بارهای محوری هستند و دارای یک تک عضو فونداسیون است. توجه داشته باشید که سازه کاملاً سخت شامل دو حلقه، دو بعدی است و بنابراین ۶ درجه نامعین استاتیکی است. همچنین ما اینکه چگونه یک سازه باید آزاد شود تا به وضعیت اصلی و اولیه خود بازگردد (شکل ۱۶–۷الف) را پس از بررسی درجه نامعینی یک سیستم سه بعدی مورد بررسی قرار خواهیم داد.

درجه نامعینی استاتیکی

سازه قاب نشان داده شده در شکل ۱۶–۸الف را بررسی می‌کنیم. سازه سه بعدی است و شامل سه قاب پرتال (درگاه) است که به فونداسیون به صورت صلب گیردار شده‌اند. هم ارز کاملاً سخت آن در شکل ۱۶–۸ ب نشان داده شده است. با بررسی مشاهده می‌کنیم که شامل سه حلقه است که هر یک از حلقه‌ها ٦ درجه نامعین استاتیکی است، بدین ترتیب سازه کاملاً سخت، ۳ ضربدر ٦ یعنی ۱۸ درجه نامعین استاتیکی است. هر چند تعداد حلقه‌ها در موارد ساده‌ای مثل این سازه به راحتی با بررسی به دست می‌آید، موارد پیچیده‌تر نیازمند راهکاری روشمندتر هستند.



شکل۱٦–۸ تعیین درجه نامعینی استاتیکی یک سازه

فرض کنید که اعضا تا هنگامی که سازه مانند شکل ۱٦–۸ج به صورت متصل منفرد در بیاید اتصالشان حذف شود. (یک سازه دارای اتصال منفرد مانند فونداسیون دارای اتصال منحصر به فرد و منفرد تعریف می‌شود.) هر دفعه که یک عضو فصل اتصال می‌شود یکی به تعداد گره‌ها افزوده می‌شود و یکی از تعداد حلقه‌ها کم می‌شود و تعداد اعضا ثابت می‌ماند. بدین ترتیب تعداد نهایی گره‌ها N' در سازه با اتصال منفرد و منحصر به فرد برابر است با:

$N' = M + 1$ (M=تعداد اعضا)

حال فرض کنید که اعضا دوباره به گونه‌ای متصل شوند که سازه اصلی کاملاً سخت را دوباره شکل بدهند. هر اتصال دوباره یک حلقه را شکل می‌دهد. یعنی هر بار، یک گره ناپدید می‌شود و یک حلقه شکل می‌گیرد بنابراین تعداد حلقه‌ها R برابر تعداد گره‌های حذف شده در طی اتصال دوباره است. بنابراین:

$R = N' - N$

که N تعداد گره‌های سازه کاملاً سخت است. با جانشانی N' از معادله بالا داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$R = M - N + 1$$

در شکل ١٦-٨ب، $M=10$ و $N=8$ و بدین ترتیب طبق استنباط بالا $R=3$ است. بنابراین از آنجایی که هر حلقه ٦ درجه نامعین استاتیکی است. درجه نامعینی استاتیکی n'_s در یک سازه کاملاً سخت از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n'_s = 6(M - N + 1) \quad (١٦-١)$$

برای یک تمام سازه واقعی، آزاد کردن‌ها باید صورت بگیرند تا سازه کاملاً سخت را به حالت اصلی‌اش بازگردانند. هر آزاد کردن یک درجه، نامعینی استاتیکی را کاهش می‌دهد، بنابراین اگر r تعداد نهایی آزاد کردن‌های مورد نیاز باشد، درجه نامعینی استاتیکی n_s سازه حقیقی برابر است با:

$$n_s = n'_s - r$$

یا با جایگذاری n'_s از معادله ١٦-١ خواهیم داشت:

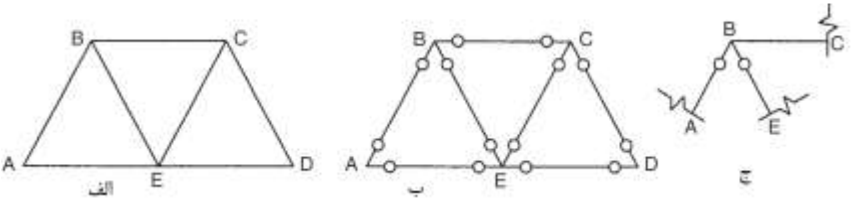
$$n'_s = 6(M - N + 1) - r \quad (١٦-٢)$$

توجه داشته باشید که در شکل ١٦-٨الف برای بازگشت سازه کاملاً سخت شکل ١٦-٨ب به وضعیت اصلی‌اش در شکل ١٦-٨الف، نیازی به آزاد کردن نیست. بنابراین درجه نامعینی آن ١٨ است. در مورد سازه‌های دو بعدی که یک حلقه، سه درجه نامعین استاتیکی است. معادله ١٦-٢ به صورت زیر می‌شود:

$$n_s = 3(M - N + 1) - r \quad (١٦-٣)$$

خرپاها

در تعیین تعداد آزاد کردن‌های مورد نیاز برای بازگرداندن هم ارز کاملاً سخت یک خرپا به وضعیت اصلی‌اش مشکلی پیش می‌آید.



شکل١٦-٩ تعداد آزاد کردن‌ها برای یک خرپای مسطح

هم ارز کاملاً سخت خرپای مسطح شکل ١٦-٩الف را در نظر بگیرید. در این مورد برای ما نامعینی مسئله مورد اهمیت نیست و همینطور سیستم تکیه‌گاه‌ها مورد نظر نیست که به

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

همین دلیل از آن صرف نظر می‌شود. در خرپای حقیقی، فرض می‌شود که هر عضو قادر است تنها بارهای محوری را تحمل کند به همین دلیل برای هر عضو دو آزاد کردن وجود دارد، یکی برای گشتاور و دیگری برای برش، آزاد کردن‌هایی به اندازه $2M$. بنابراین اگر مانند شکل ۱۶-۹ب، ما یک لولا به انتهای هر عضو وارد کنیم، ما به تعداد مورد نظر آزاد کردن‌ها یعنی مقدار $2M$ رسیده‌ایم. با این وجود در این وضعیت، هر گره آزاد است تا در زاویه‌ای بسیار بسیار کوچک دوران کند، به صورتی مستقل از اعضا. در این حالت، خرپا به صورتی بیش از حد لولایی تبدیل می‌شود. برای جلوگیری از این حالت می‌توان یک لولا را در هر گره حذف کرد، به عنوان مثال مانند آنچه در گره B شکل ۱۶-۹ج نشان داده شده است. عضو BC با حذف لولاها از دوران گره در B جلوگیری می‌کند. علاوه بر این، حضور لولا در B در BA و B درBE تضمین می‌کند که گشتاوری در B در BC وجود ندارد. بدین ترتیب شرایط لازم برای یک خرپا تامین می‌شود.

با توجه به مطالب گفته شده، می‌بینیم که تعداد نهایی آزاد شدن‌ها که برابر $2M$ بود بدین ترتیب به مقدار ۱ برای هر گره کاهش می‌یابد. بنابراین تعداد مورد نیاز آزاد شدن‌ها در یک خرپای مسطح برابر است با:

$$r = 2M - N \qquad (۱۶-۴)$$

بنابراین معادله ۱۶-۳ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$n_s = 3(M - N + 1) - (2M - N)$$

یا:

$$n_s = M - 2N + 3 \qquad (۱۶-۵)$$

معادله ۱۶-۵ فقط به نامعینی داخلی یک خرپا مربوط است و بدین ترتیب درجه نامعینی سیستم تکیه‌گاه‌ها بخشی اضافی است. همینطور، با نگریستن به خرپای ساده شکل ۱۶-۷الف می‌بینیم که درجه نامعینی داخلی آن از معادله ۱۶-۵ برابر است با:

$$n_s = 3 - 2 \times 3 + 3 = 0$$

وضعیت مشابهی در یک خرپای فضایی رخ می‌دهد، دوباره، لازم است تا هر عضو فقط در برابر بار محوری مقاومت کند، بدین ترتیب برای تمام خرپا لازم است تا تعداد $5M$ آزاد کردن وجود داشته باشد. این امر با وارد کردن اتصال های توپی (ساچمه‌ای) در انتهای هر

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

عضو محقق می‌شود. در این حالت نیز دچار وضعیتی می‌شویم که در خرپای مسطح شکل ۱۶-۹ب دچار آن شدیم، در این حالت نیز هر اتصال و گره آزاد است تا در زوایایی بسیار کوچک حول هر یک از سه محور دوران کند. (اعضا در خرپای مسطح فقط می‌توانند حول یک محور دوران کنند.) به همین دلیل در هر گره سه قید نیاز است و در نهایت تعداد $3N$ قید لازم است. بنابراین تعداد آزاد کردن‌ها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$r = 5M - 3N$$

بنابراین رابطه ۱۶-۲ به صورت زیر می‌شود:

$$n_s = 6(M - N + 1) - (5M - 3N)$$

یا:

$$n_s = M - 3N + 6 \qquad (۱۶-۶)$$

برای خرپاهای معین استاتیکی مسطح و فضایی، یعنی $n_s=0$، معادله‌های ۱۶-۵ و ۱۶-۶ به ترتیب به صورت زیر می‌شوند:

$$M = 2N - 3 \qquad M = 3N - 6 \qquad (۱۶-۷)$$

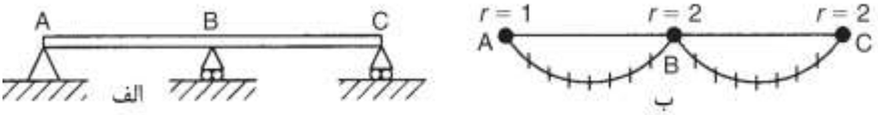
که همان نتایجی هستند که در بخش ۴-۴ استنتاج شده‌اند. (روابط ۴-۳ و ۴-۲)

۱۶-۳ نامعینی کینماتیکی

دیدیم که درجه نامعینی استاتیکی یک سازه در حقیقت تعداد نیروها یا برآیند تنش‌هایی است که نمی‌توان آنها را با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی تعیین کرد. نوع دیگری از نامعینی یک سازه بر حسب درجه آزادی آن بیان می‌شود و به نامعینی کینماتیکی معروف است. n_k یک سازه، و به صورت ویژه به روش سختی (روش تحلیل) که در آن جابجایی‌ها مجهول بودند مرتبط است. یک راهکار ساده برای محاسبه نامعینی کینماتیکی یک سازه این است که مجموع درجات آزادی گره‌ها را به دست آوریم و سپس قسمتی از درجات آزادی که توسط قیدهایی مانند تکیه‌گاه‌ها از آنها جلوگیری می‌شود را از مجموع قبلی منها کنیم. نکته مهم در این میان، این است که به یاد داشته باشیم در یک سازه سه بعدی هر گره صاحب ۶ درجه آزادی و در سازه‌های مسطح هر گره دارای ۳ درجه آزادی است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

مثال ۱۶–۱) درجه نامعینی استاتیکی و کینماتیکی تیر ABC نشان داده شده در شکل ۱۶–۱۰الف را تعیین کنید.



شکل۱۶–۱۰ تعیین نامعینی استاتیکی و کینماتیکی تیر مثال۱۶–۱

سازه کاملاً سخت در شکل ۱۶–۱۰ب نشان داده شده است، همانطور که می‌بینیم $M=4$ و $N=3$، تعداد آزاد کردن‌های مورد نیاز برای بازگرداندن سازه کاملاً سخت به وضعیت اولیه و اصلیش برابر ۵ است و $r=5$، همانطور که در شکل ۱۶–۱۰ ب نشان داده شده است. این آزاد کردن‌ها شامل یک آزاد کردن گشتاور در هر سه تکیه‌گاه و یک آزاد کردن انتقالی در هر یک از تکیه‌گاه‌های B و C است. بنابراین از معادله ۱۶–۳ داریم:

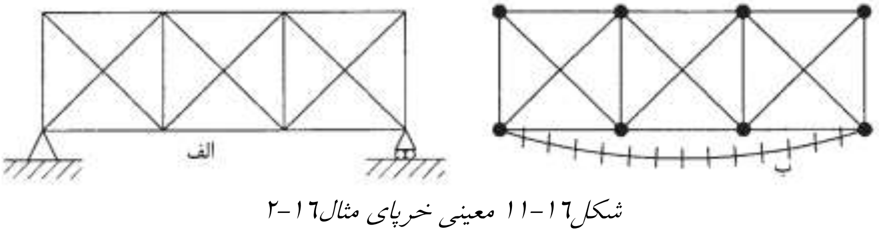
$$n_s = 3(4-3+1)$$

بنابراین درجه نامعینی استاتیکی تیر برابر است با ۱.

هر یک از سه گره دارای سه درجه آزادی است و در مجموع ۹ درجه آزادی. ٤ قید وجود دارد، بنابراین درجه نامعینی کینماتیکی برابر است با:

$$n_k = 9-4=5$$

مثال ۱۶–۲) درجه نامعینی استاتیکی وکینماتیکی خرپای نشان داده شده در شکل ۱۶–۱۱الف را تعیین کنید.



شکل۱۶–۱۱ معینی خرپای مثال۱۶–۲

سازه کاملاً سخت در شکل ۱۶–۱۱ب نشان داده شده است. همانطور که می‌بینیم $M=17$ و $N=8$ است. با این وجود از آنجایی که خرپا دارای اتصال لولایی است. ما می‌توانیم به صورت مستقیم نامعینی استاتیکی داخلی را از معادله ۱۶–۵ به دست بیاوریم که در آن $M=16$است، در اینجا M برابر تعداد واقعی اعضای خرپاست. بنابراین:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$n_s = 16 - 16 + 3 = 3$$

و همانطور که با بررسی سازه می‌بینیم، سیستم تکیه‌گاهی از نظر استاتیکی معین است و بدین ترتیب در نهایت، کل سازه سه درجه نامعین استاتیکی است. در سمتی دیگر، با توجه به سازه کاملاً سخت شکل ۱۶-۱۱ ب که در آن $M=17$ و $N=8$ است ما می‌توانیم از معادله ۱۶-۳ استفاده کنیم. تعداد آزاد کردن‌های داخلی از معادله ۱۶-٤ به دست می‌آید و مقدار r برابر است با:

$$r = 2\times16 - 8 = 24$$

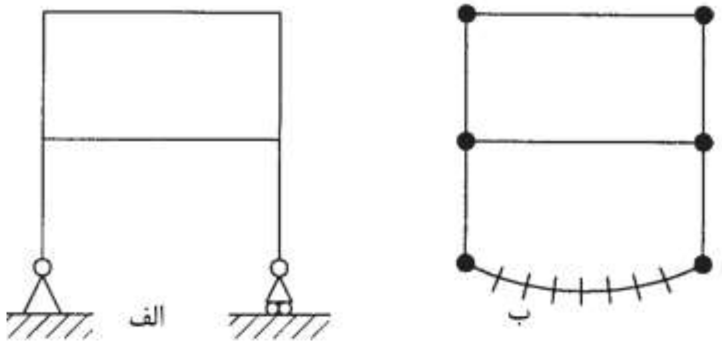
سه آزاد کردن اضافی از سیستم تکیه‌گاه‌ها وجود دارد که به ما مقدار نهایی ۲۷ آزاد کردن را می‌دهد. بنابراین طبق معادله ۱۶-۳ داریم:

$$n_s = 3(17 - 8 + 1) - 27 = 3$$

نامعینی کینماتیکی مانند قبل از طریق آزمودن درجات آزادی نهایی گره‌ها و قیدها به دست می‌آید. در این مورد خاص، فقط از سیستم تکیه‌گاه‌ها تامین می‌شود. ۸ گره وجود دارد که هر کدام دو درجه آزادی انتقالی دارند. دوران در یک گره منجر به برآیند تنشی نمی‌شود و بنابراین نامربوط است. بدین ترتیب دو درجه آزادی در یگ گره در یک خرپای مسطح و سه درجه آزادی در یک گره در یک خرپای فضایی وجود دارد. بنابراین در این مثال ۸ ضربدر ۲ یعنی ۱٦ درجه آزادی و سه قید انتقالی از سیستم تکیه‌گاه‌ها وجود دارد. بنابراین:

$$n_k = 16 - 3 = 13$$

مثال ۱٦-۳) درجه نامعینی استاتیکی وکینماتیکی قاب نشان داده شده در شکل ۱٦-۱۲الف را محاسبه کنید.



نامعینی استاتیکی و کینماتیکی قاب مثال۱٦-۳

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

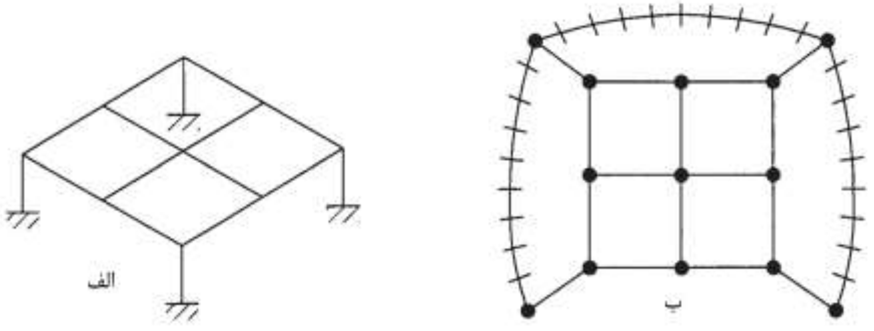
در سازه کاملاً سخت نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۲ب، $M=7$ و $N=6$ است. تعداد آزاد کردن‌های r برابر با ۳ لازم است تا سازه کاملاً سخت را به حالت اصلی و اولیه‌اش بازگرداند. بنابراین از معادله ۱۶-۳ داریم:

$$n_s = 3(7-6+1)-3 = 3$$

تعداد گره‌ها برابر ٦ است، هر کدام از گره‌ها سه درجه آزادی دارد و مجموع برابر ۱۸ است. تعداد قیدها برابر ۳ است و بدین ترتیب نامعینی کینماتیکی قاب برابر است با:

$$n_k = 18-3 = 15$$

مثال ۱۶-٤) درجه نامعینی استاتیکی وکینماتیکی قاب فضایی نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۳الف را تعیین کنید.



شکل۱۶-۱۳ قاب فضایی مثال ۱۶-٤

در سازه کاملاً سخت نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۳ ب، $M=19$ و $N=13$ و $r=0$ است. بنابراین از معادله ۱۶-۲ داریم:

$$n_s = 6(19-13+1)-0 = 42$$

۱۳ گره وجود دارد که هر کدام دارای ٦ درجه آزادی هستند. یعنی در نهایت ۷۸ درجه. ٦ قید در هر یک از ٤ تکیه‌گاه وجود دارد که در نهایت می‌شود ۲٤ عدد. بنابراین:

$$n_k = 78-24 = 54$$

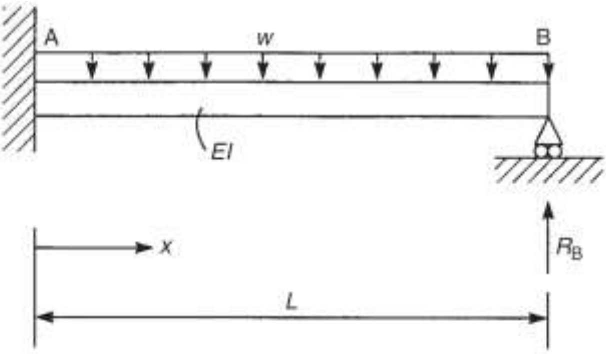
حال ما گونه‌های مختلفی از سازه‌های نامعین و روش‌های تحلیل آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. این روش ها بر اساس روش‌های کار و انرژی بنا شده‌اند که در فصل ۱۵ توضیح داده شد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

۱٦-٤ تیرهای نامعین استاتیکی

تیرها به صورت عمده به دلیل سیستم تکیه‌گاه‌هایشان، نامعین استاتیکی هستند. در این رده بندی تیرهای دو سر گیردار، تیرهای پایه دار و تیرهای سراسری قرار دارند. یک تیر طره یک سر گیردار و چند تیر دو سر گیردار در بخش ۱۳-٦ با استفاده از هر دو روش اصل جمع آثار قوا و روش‌های گشتاور-سطح تحلیل شدند. حال ما روش‌های توضیح داده شده در بخش ۱۵ را در برخی مثال های تیرهای نامعین استاتیکی به کار می‌بریم.

مثال ۱٦-۵) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در B را در طره پایه دار نشان داده شده در شکل ۱٦-۱٤ را محاسبه کنید.



شکل۱٦-۱٤ طره پایه دار مثال۱٦-۵

از آنجایی که در این مثال با بررسی، درجه نامعینی استاتیکی به راحتی به دست می‌آید لازم نیست از روندهایی که در بخش ۱٦-۲ توضیح داده شد برای محاسبه استفاده شود. بنابراین با حذف تکیه‌گاه عمودی در B، تیر طره، معین استاتیکی می‌شود، بنابراین ما به این نتیجه می‌رسیم که تیر دارای نامعینی استاتیکی ۱ است. علاوه بر این، اینکه ما از اصل کار مجازی استفاده کنیم یا از اصل مکمل انرژی، اهمیتی در حل مسئله ندارد، زیرا برای سیستم‌های الاستیک خطی هر دو به معادلات یکسانی منجر می‌شوند. (فصل ۱۵ را ببینید). در ابتدا ما راهکار انرژی مکمل را انتخاب می‌کنیم. انرژی مکمل نهایی، C، تیر طبق معادله ۱ مثال ۱۵٫۸ برابر است با:

$$C=\int_0^L\int_0^M d\theta dM-R_B\upsilon_B \qquad \text{الف}$$

که υ_B جابجایی و تغییرمکان عمودی طره در B است. (در این مورد، υ_B از آنجایی که تیر در B تکیه‌گاه دارد برابر صفر است.)

از اصل مقدار ثابت (ایستایی) انرژی مکمل نهایی داریم:

ب
$$\frac{\partial C}{\partial R_B}=\int_0^L \frac{\partial M}{\partial R_B}d\theta-\upsilon_B$$

که با مقایسه با معادله ۳ مثال ۱۵-۸. به صورت زیر در می‌آید:

پ
$$\upsilon_B=\int_0^L \frac{M}{EI}\frac{\partial M}{\partial R_B}dx=0$$

گشتاور خمشی در هر مقطع و برش از تیر برابر است با:

$$M=R_B(L-x)-\frac{w}{2}(L-x)^2$$

از اینرو:

$$\frac{\partial M}{\partial R_B}=L-x$$

با جایگذاری M و $\frac{\partial M}{\partial R_B}$ در معادله (پ) خواهیم داشت:

ت
$$\int_0^L \left\{R_B(L-x)^2-\frac{w}{2}(L-x)^3\right\}dx=0$$

که:

$$R_B=\frac{3wL}{8}$$

که همان نتیجه‌ای است که در مثال ۱۳-۱۹ به دست آمد.

اگر ما مرکز محور x را در انتهای B تیر فرض می‌کردیم، جبر راه حل بالا اندکی ساده‌تر می‌شد و معادله (ت) به صورت زیر در می‌آمد:

$$\int_0^L \left(R_B x^2-\frac{w}{2}x^3\right)dx=0$$

که دوباره مقدار زیر را به ما می‌دهد:

$$R_B=\frac{3wL}{8}$$

با به دست آوردن R_B عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باقیمانده با استفاده از استاتیک به دست می‌آیند.

راهکار دیگر این است که سازه را به گونه‌ای آزاد نماییم که معین استاتیکی شود، این امر با حذف تکیه‌گاه B (با توجه به اینکه درجه نامعینی استاتیکی ۱ است در این مورد فقط به یک آزاد کردن نیاز است.) و سپس محاسبه جابجایی عمودی در B ناشی از بار اعمالی، یعنی با استفاده از روش بار واحد میسر می‌شود، که همانطور که دیده‌ایم، این روش بر اساس اصل کار مجازی یا انرژی مکمل بنا شده است. سپس ما جابجایی عمودی در B ناشی از فقط R_B را دوباره به وسیله روش بار واحد محاسبه می‌کنیم، جمع دو جابجایی باید برابر صفر باشد زیرا تیر در نقطه B تکیه‌گاه دارد. بنابراین ما معادله‌ای را به دست می‌آوریم که در آن مقدار R_B مجهول است. واجب و ضروری نیست که عکس‌العمل تکیه‌گاهی در B را به عنوان آزاد کردن انتخاب کنیم. در حقیقت ما می‌توانیم گشتاور گیرداری در A که در آن مورد، تیر، یک تیر با اتکای ساده می‌شود که معین استاتیکی نیز هست، را انتخاب کنیم. در این حالت ما باید گشتاور در A که لازم است تا شیب تیر در A را به مقدار صفر بازگرداند بیابیم. در عبارت های ذکر شده، سازه آزاد شده اغلب با اصطلاح *سازه اولیه* خوانده می‌شود.

فرض کنید که در انتهای آزاد طره آزاد شده، جابجایی عمودی ناشی از بار گسترده یکنواخت برابر $\upsilon_{B,O}$ است. سپس، از رابطه (پ) مثال ۱۵-۹. (با توجه به اینکه M_A در آن معادله با M_a در اینجا عوض شده است تا با گشتاور خمشی در A اشتباه گرفته نشود.) خواهیم داشت:

$$\upsilon_{B,O} = \int_0^L \frac{M_a M_1}{EI} dx \qquad \text{(ث)}$$

که:

$$M_a = -\frac{w}{2}(L-x)^2 \qquad\qquad M_1 = -1(L-x)$$

از اینرو با جایگذاری M_a و M_1 در معادله (ث)، خواهیم داشت:

$$\upsilon_{B,O} = \int_0^L \frac{w}{2EI}(L-x)^3 dx$$

که می‌دهد:

$$\upsilon_{B,O} = \frac{wL^4}{8EI} \qquad \text{(ج)}$$

حال ما بار واحد عمودی به سمت پایین را در انتهای B طره اعمال می‌کنیم، از آنجایی که بار گسترده حذف شده است، جابجایی $\upsilon_{B,1}$ ناشی از این بار واحد از معادله (ث) برابر خواهد بود با:

$$\upsilon_{B,1} = \int_0^L \frac{1}{EI}(L-x)^2\,dx$$

که:

$$\upsilon_{B,1} = \frac{L^4}{3EI} \qquad \text{ح}$$

جابجایی ناشی از R_B در B برابر است با $-R_B\upsilon_{B,1}$ (زیرا R_B در جهتی مخالف بار واحد عمل می‌کند.) بنابراین جابجایی نهایی υ_B در B ناشی از بار گسترده یکنواخت و R_B با استفاده از اصل جمع آثار قوا برابر است با:

$$\upsilon_B = \upsilon_{B,O} - R_B\upsilon_{B,1} = 0 \qquad \text{خ}$$

با جایگذاری $\upsilon_{B,O}$ و $\upsilon_{B,1}$ از معادله‌های (ج) و(ح) داریم:

$$\frac{wL^4}{8EI} - R_B\frac{L^3}{3EI} = 0$$

که می‌دهد:

$$R_B = \frac{3wL}{8}$$

مانند قبل، این راهکار، روش نرمی‌است که در بخش ۱۶-۱ توضیح داده شد و در حقیقت، هم ارز با روش مورد استفاده در مثال ۱۳-۱۸ است.

در معادله (خ)، $\upsilon_{B,1}$ جابجایی در B در جهت R_B ناشی از بار واحد در B اعمال شده در جهت R_B است (در هر دو جهت یکسان یا مخالف). برای یک تیر دارای درجه نامعینی استاتیکی بزرگتر از ۱، مجموعه‌ای از معادله‌های دارای شکل همسان با معادله (خ) وجود خواهند داشت اما این معادلات جابجایی‌ها در نقطه‌ای خاص ناشی از نیروهای زاید را نیز شامل می‌شوند. بنابراین ما ضریب نرمی $a_{kj}(k=1,2,\ldots,r; j=1,2,\ldots,r)$ را به کار می‌گیریم. ما این ضریب را در بخش ۱۵-۴ به صورت جابجایی در نقطه k در جهت معین، ناشی از بار واحد در نقطه j در جهت دوم، تعریف کردیم. بنابراین در بالا، $\upsilon_{B,1} = a_{11}$ است و معادله (خ) به صورت زیر درخواهد آمد:

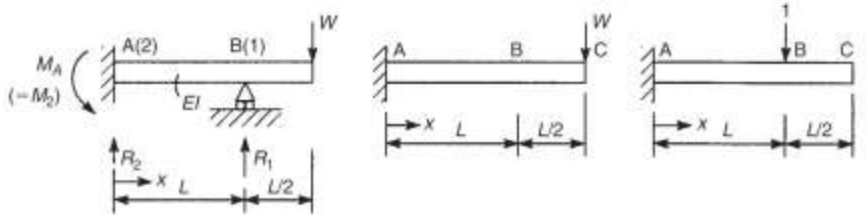
$$\upsilon_{B,O} - a_{11}R_B = 0 \qquad \text{د}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

از آنجایی که ضرایب نرمی را با اندیس‌ای عددی تخصیص دادیم مناسب‌ر است که R_B را با R_1 نمایش بدهیم. بنابراین معادله (خ) صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon_{B,O} - a_{11}R_1 = 0$$ ذ

مثال ١٦-٦) عکس‌العمل تکیه‌گاهی را در نقطه B تیر طره پایه دار نشان داده در شکل ١٦-١٥الف تعیین کنید.



شکل١٦-١٥ تیر طره پایه دار مثال ١٦-٦

مانند مثال ١٦-٥، تیر طره شکل ١٦-١٥الف دارای درجه نامعینی استاتیکی ١ است. دوباره ما عکس‌العمل تکیه‌گاهی در B، R_1 را به عنوان نامعینی انتخاب می‌کنیم. سازه آزاد شده یا سازه اولیه در شکل ١٦-١٥ ب نشان داده شده است. در ابتدا ما جابجایی $\upsilon_{B,O}$ در B ناشی از بار اعمالی W در C را نیاز داریم.این جابجایی را به سرعت می‌توان با استفاده از روش بار واحد به دست آورد. بنابراین از معادله (پ) مثال ١٥-٩ داریم:

$$\upsilon_{B,O} = \int_0^L \left\{ -\frac{W}{EI}\left(\frac{3L}{2} - x\right)\right\}\{-1(L-x)\}dx$$

که می‌دهد:

$$\upsilon_{B,O} = \frac{7WL^3}{12EI}$$ الف

به صورت مشابهی جابجایی در B ناشی از بار واحد در B در جهت R_1 (شکل ١٦-١٥ج) برابر است با:

$$a_{11} = \frac{L^3}{3EI}$$ با استفاده از رابطه (خ) مثال١٦-٥

از اینرو، از آنجایی که:

$$\upsilon_{B,O} - a_{11}R_1 = 0$$ ب

داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\frac{7WL^3}{12EI}-\frac{L^3}{3EI}R_1=0$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$R_1=\frac{7W}{4}$$

همچنین می‌توانیم گشتاور گیردار کننده $M_A(=M_2)$ در نقطه A را به عنوان آزاد کننده انتخاب کنیم. در این صورت سازه اولیه به صورت تیر با اتکای ساده نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۶الف خواهد شد که در آن $R_A=-W/2$ و $R_B=3W/2$ خواهد بود. دوران در A را می‌توان به وسیله هر یک از روش‌هایی که قبلاً توضیح داده شد به دست آورد. این روش‌ها شامل انتگرال مشتق مرتبه دوم معادله خمش (معادله ۱۳-۳)، روش گشتاور- مساحت توضیح داده شده در بخش ۱۳-۳ و روش بار واحد (در این مورد، گشتاور واحد خواهد بود) هستند. بنابراین با استفاده از روش بار واحد و اعمال یک گشتاور واحد در A مانند آنچه در شکل ۱۶-۱۶ ب نشان داده شده است از اصل کار مجازی خواهیم داشت: (مثال ۱۵-۵ را ببینید)

$$1\theta_{A,0}=\int_0^L\frac{M_aM_v}{EI}dx+\int_L^{3L/2}\frac{M_aM_v}{EI}dx \qquad \text{(پ)}$$

در معادله (پ):

$$M_a=-\frac{W}{2}x \qquad M_v=\frac{1}{L}x-1 \qquad (0\le x\le L)$$

$$M_a=Wx-\frac{3WL}{2} \qquad M_v=0 \qquad \left(L\le x\le\frac{3L}{2}\right)$$

با جایگذاری در معادله (پ) خواهیم داشت:

$$\theta_{A,0}=\frac{W}{2EIL}\int_0^L\left(Lx-x^2\right)dx$$

که از آن:

$$\theta_{A,0}=\frac{WL^2}{12EI} \qquad \text{(پاد ساعتگرد)}$$

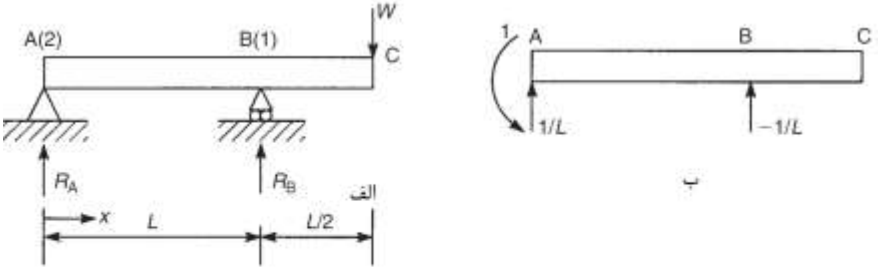
ضریب نرمی θ_{22}، یعنی دوران در نقطه A (نقطه ۲) ناشی از گشتاور واحد در A از شکل ۱۶-۱۶ب به دست می‌آید، بنابراین:

$$\theta_{22}=\int_0^L\frac{1}{EI}\left(\frac{x}{L}-1\right)^2dx$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

که از آن:

$$\theta_{22} = \frac{L}{3EI} \qquad \text{(پاد ساعتگرد)}$$



شکل۱۶–۱۶ راه حل دیگر برای مثال ۱۶–۶

از آنجایی که دوران نقطه A در سازه حقیقی برابر صفر است:

$$\theta_{A,0} + \theta_{22} M_2 = 0$$

یا:

$$\frac{WL^2}{12EI} + \frac{L}{3EI} M_2 = 0$$

که می‌دهد:

$$M_2 = -\frac{WL}{4} \qquad \text{(ساعتگرد)}$$

حال با بررسی تعادل استاتیکی تیر شکل ۱۶–۱۵الف و گرفتن گشتاور حول A داریم:

$$R_1 L - W\frac{3L}{2} - \frac{WL}{4} = 0$$

بنابراین:

$$R_1 = \frac{7WL}{4}$$

که با حالت قبل یکی است.

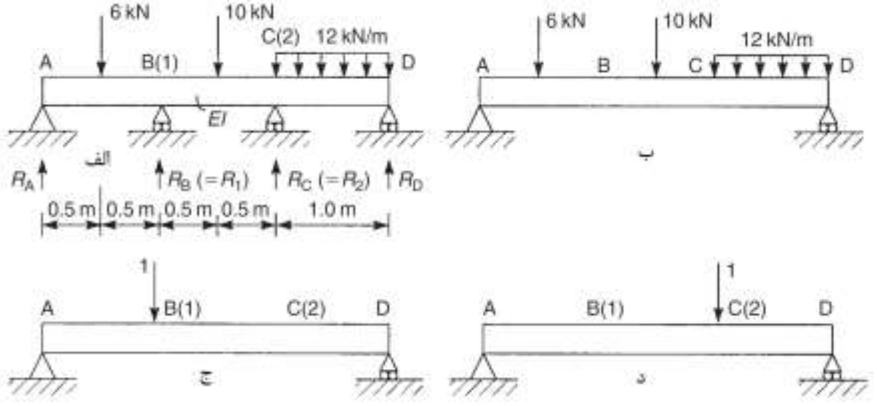
مثال ۱۶–۷) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر سه دهانه سرتاسری $ABCD$ نشان داده شده در شکل ۱۶–۱۷الف بیابید.

با بررسی کاملاً واضح است که درجه نامعینی استاتیکی تیر برابر با ۲ است. بنابراین، اگر ما تکیه‌گاه‌های B و C را برای آزاد کردن انتخاب کنیم، سازه اولیه به صورت شکل ۱۶–۱۷ب درخواهد آمد. در مرحله بعد ما به جابجایی‌های عمودی $\upsilon_{B,O}$ و $\upsilon_{C,O}$ در نقاط B و C

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel :کانال تلگرام

نیازمندیم. می‌توان این مقادیر را به راحتی با هر یک از روش‌های شرح داده شده قبلی به دست آورد. (روش بار واحد، روش گشتاور–سطح، روش ماکاولی (بخش ۱۳–۲))، این مقادیر برابر هستند با:

$$\upsilon_{B,0} = \frac{8.88}{EI} \qquad \upsilon_{C,0} = \frac{9.08}{EI} \qquad \text{(به سمت پایین)}$$



شکل۱۶–۱۷ تحلیل یک تیر سراسری سه دهانه

حال ما به ضرایب نرمی a_{11}، a_{12}، a_{22} و a_{21} نیازمندیم. ضرایب a_{11} و a_{21} را می‌توان با قرار دادن بار واحد در B (نقطه ۱) و تعیین جابجایی‌ها در نقاط B و C (نقطه ۲)، مانند آنچه در شکل ۱۶–۷ ج نشان داده شده است، به دست آورد. به صورت مشابهی می‌توان ضرایب a_{12} و a_{22} را با قرار دادن بار واحد در C و تعیین جابجایی‌ها در نقاط B و C، به دست آورد. برای این کار می‌توان از هر یک از روش‌های ذکر شده در بالا استفاده کرد. از قضیه اثرات متقابل (بخش ۱۵–٤) داریم $a_{21}= a_{12}$ و از تقارن داریم $a_{11}= a_{22}$.

بنابراین فقط لازم است تا از شکل ۱۶–۱۷ج مقدار a_{11} , a_{21} را محاسبه کنیم، این مقادیر برابر هستند با:

$$a_{11} = a_{22} = \frac{0.45}{EI} \qquad a_{21} = a_{12} = \frac{0.39}{EI} \qquad \text{(به سمت پایین)}$$

جابجایی نهایی تکیه‌گاه‌های B و C برابر صفر است بنابراین:

الف $$\upsilon_{B,O} - a_{11}R_1 - a_{12}R_2 = 0$$

ب $$\upsilon_{C,O} - a_{21}R_1 - a_{22}R_2 = 0$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

یا با جایگزین کردن مقادیر محاسبه شده a_{11} و $\upsilon_{B,O}$ و غیره در معادله‌های (الف) و (ب) و ضرب EI خواهیم داشت:

$$8.88 - 0.45R_1 - 0.39R_2 = 0 \qquad \text{پ}$$

$$9.08 - 0.39R_1 - 0.45R_2 = 0 \qquad \text{ت}$$

توجه داشته باشید که علامت های منفی در عبارت های مربوط به R_1 و R_2 در معادله‌های (الف) و (ب) ناشی از آن حقیقت است که بارهای واحد در جهتی مخالف R_1 و R_2 وارد شده‌اند. با حل معادله‌های(پ) و (ت) به دست خواهیم آورد:

$$R_1(= R_B) = 8.7kN \qquad R_2(= R_C) = 12.68kN$$

عکس‌العمل‌های باقیمانده را می‌توان با بررسی تعادل استاتیکی تیر تعیین کرد و مقادیر آنها برابر است با:

$$R_A = 1.97kN \qquad R_B = 4.65kN$$

در مثال‌های ۱۶–۵ تا ۱۶–۷ ما فرض کردیم که تکیه‌گاه‌های تیر به خودی خود تحت تغییرمکان‌های عمودی قرار ندارند. همانطور که قبلاً اشاره شد ممکن است یکی از تکیه‌گاه‌ها فرو روند، بدین ترتیب سمت راست معادله‌های سازگاری، معادله‌های (خ)، (د) و (ذ) در مثال ۱۶–۵، معادله (ب) در مثال ۱۶–۶ و معادله‌های (الف) و (ب) در مثال ۱۶–۷ برابر صفر نخواهند بود، بلکه برابر با مقدار حقیقی تغییرمکان تکیه‌گاه خواهند بود. در چنین وضعیتی یکی از آزاد کردن‌ها باید بر تکیه‌گاه جابجا شده منطبق باشد.

از مثال ۱۶–۷ کاملاً مشخص است که تعداد معادلات همزمان همسان با معادله‌های (الف) و (ب)، لازم برای حل مسئله برابر درجه نامعینی استاتیکی سازه است. برای سازه‌های دارای درجات بالای نامعینی استاتیکی، اگر بخواهیم تعداد زیادی معادله را به صورت همزمان و به صورت دستی حل کنیم، راه حل ما عملی نخواهد بود.در این حالت معادلات به صورت ماتریس بیان خواهند شد و با استفاده از راهکارهای رایانه ای حل خواهند شد. بدین ترتیب برای سازه‌ای با درجه نامعینی استاتیکی n، n معادله سازگاری به صورت زیر وجود خواهد داشت:

$$\upsilon_{1,0} + a_{11}R_1 + a_{12}R_2 + \ldots + a_{1n}R_n = 0$$
$$\vdots$$
$$\upsilon_{n,0} + a_{n1}R_1 + a_{n2}R_2 + \ldots + a_{nn}R_n = 0$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

یا به صورت ماتریسی:

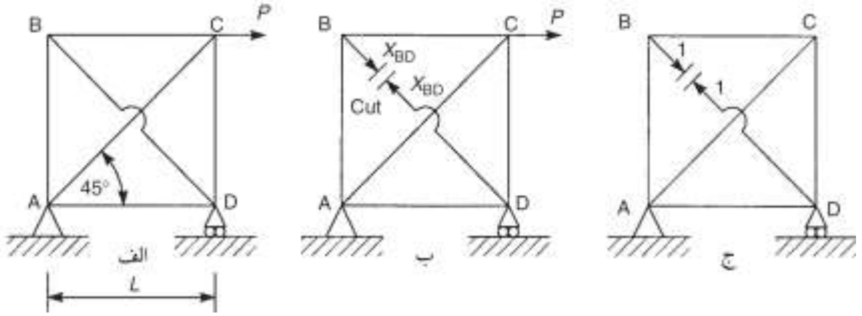
$$\begin{Bmatrix} \upsilon_{1,0} \\ \vdots \\ \upsilon_{n,0} \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

توجه داشته باشید که در اینجا n برابر n_s، درجه نامعینی استاتیکی است. اندیس s برای راحتی بیشتر نادیده گرفته شده است. روش‌های دیگر حل تیرهای سراسری، روش شیب افت است که در بخش ۱۶-۹ توضیح داده شده است و همینطور روش پخش لنگر متوالی که در بخش ۱۶-۱۰ توضیح داده شده است. روش دوم دارای راه حل‌هایی نسبتاً سریع برای تیرهای چنددهانه است.

۱۶-۵ خرپاهای نامعین استاتیکی

یک خرپا ممکن است نامعین استاتیکی داخلی یا خارجی باشد. برای خرپایی که نامعین استاتیکی خارجی است، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را می‌توان با استفاده از روش‌هایی که در بخش ۱۶-۴ توضیح داده شد به دست آورد. برای خرپایی که نامعین استاتیکی داخلی است روش نرمی را می‌توان به صورتی که در مثال های زیر نشان داده شده است به کار برد.

مثال ۱۶-۸) نیروهای اعضای خرپای نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۸الف را تعیین کنید. مساحت سطح مقطع A و مدول یانگ E برای تمام اعضا یکسان است.



شکل۱۶-۱۸ تحلیل یک خرپای نامعین استاتیکی

کاملاً واضح است که خرپای شکل ۱۶-۱۸الف، از نظر خارجی معین استاتیکی است، اما از معادله۱۶-۵ دارای درجه نامعینی داخلی برابر با ۱ است. *(M=6,N=4)* بدین ترتیب با بریدن یکی از اعضا (عضو BD) خرپا را به گونه‌ای آزاد می‌کنیم که معین استاتیکی شود،

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مانند آنچه در شکل ۱٦–۱۸ب نشان داده شده است. بسته به اینکه پیش از بریدن عضو BD، نیروهای درون عضو کششی یا فشاری بوده اند، بر اثر بارها (در این مورد، P) انتهاهای بریده شده عضو BD از هم جدا می‌شوند یا به هم نزدیک می‌شوند. ما فرض می‌کنیم که کششی بوده است. فرض می‌کنیم که خرپا الاستیک خطی است، بدین ترتیب جابجایی‌های نسبی انتهاهای بریده شده عضو BD (در حقیقت حرکت B و D نسبت به هم در راستای قطر BD) را می‌توان مانند مثال های ۱۵–٦ و ۱۵–۷ با استفاده از روش بار واحد به دست آورد. بنابراین ما نیروهای $F_{a,j}$ ناشی از بارهای واقعی را در اعضا تعیین می‌کنیم. سپس بارهای واحد مساوی و مختلف الجهت را به انتهاهای بریده شده عضو BD مانند آنچه در شکل ۱٦–۱۸ج نشان داده شده است وارد می‌کنیم و نیروهای $F_{1,j}$ را در اعضا محاسبه می‌کنیم. جابجایی B نسبت به D، Δ_{BD} از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Delta_{BD} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{a,j} F_{1,j} L_j}{AE}$$

نیروهای $F_{a,j}$ نیروهایی هستند که در اعضای خرپای آزاد شده بر اثر بارهای حقیقی به وجود می‌آیند و بدین ترتیب نیروهای حقیقی اعضای خرپای حقیقی و کامل نیستند. به این دلیل ما نیروهای اعضای خرپای آزاد شده را به صورت $F_{o,j}$ نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب Δ_{BD} برابر خواهد بود با:

$$\Delta_{BD} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{0,j} F_{1,j} L_j}{AE} \qquad \text{(الف)}$$

در سازه حقیقی، از این جابجایی در عضو افزونه BD، به وسیله نیروی X_{BD} جلوگیری می‌شود. بدین ترتیب اگر ما جابجایی a_{BD} را در جهت BD ناشی از مقدار واحد X_{BD} محاسبه کنیم، جابجایی ناشی از X_{BD} برابر خواهد بود با $X_{BD}\,a_{BD}$. از سازگاری داریم:

$$\Delta_{BD} + X_{BD} a_{BD} = 0 \qquad \text{(ب)}$$

که از آن X_{BD} به دست می‌آید. دوباره مانند مورد تیرهای نامعین استاتیکی a_{BD} ضریب نرمی است. با تعیین X_{BD} نیروهای حقیقی در اعضا خرپای حقیقی و کامل را می‌توان با استفاده از روش گره به گره یا برش به دست آورد.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

عضو	L_j (m)	$F_{0,j}$	$F_{1,j}$	$F_{0,j}F_{1,j}L_j$	$F^2_{1,j}L_j$	$F_{a,j}$
AB	L	0	−0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
BC	L	0	−0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
CD	L	$-P$	−0.71	$0.71PL$	$0.5L$	$-0.60P$
BD	$1.41L$	–	1.0	–	$1.41L$	$-0.56P$
AC	$1.41L$	$1.41P$	1.0	$2.0PL$	$1.41L$	$+0.85P$
AD	L	0	−0.71	0	$0.5L$	$+0.40P$
				$\sum = 2.71PL$	$\sum = +4.82L$	

جدول۱۶-۱

در معادله (ب)، a_{BD}، جابجایی خرپای آزاد شده در جهت BD ناشی از بار واحد است. بنابراین در استفاده از روش بار واحد برای محاسبه جابجایی، نیروهای حقیقی اعضا $(F_{1,j})$ و نیروهای اعضا ناشی از بار واحد $(F_{1,j})$ یکسان هستند. بنابراین از معادله (الف) داریم:

$$a_{BD} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F^2_{1,j} L_j}{AE} \qquad \text{پ}$$

راه حل با جدول ۱۶-۱ کامل می‌شود. از جدول ۱۶-۱ داریم:

$$\Delta_{BD} = \frac{2.71PL}{AE} \qquad a_{BD} = \frac{4.82L}{AE}$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله (الف) داریم:

$$\frac{2.71PL}{AE} + X_{BD}\frac{4.82L}{AE} = 0$$

که در نهایت خواهیم داشت:

$$X_{BD} = -0.56P \qquad \text{(فشاری)}$$

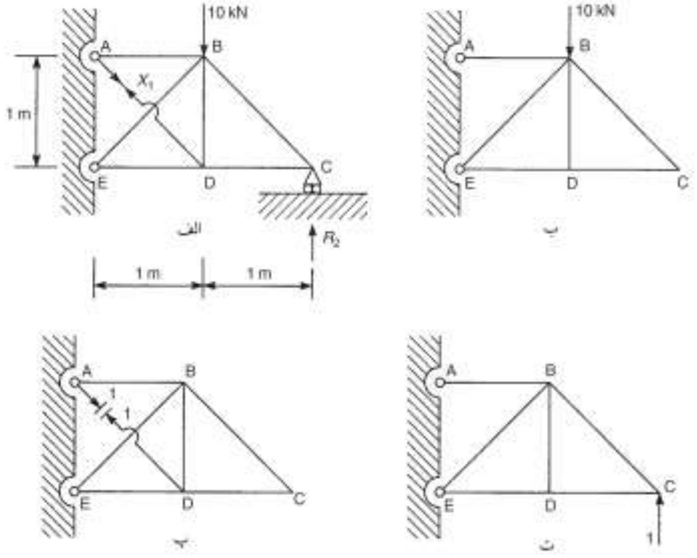
حال نیروهای حقیقی $F_{a,j}$ در اعضای خرپای حقیقی و کامل شکل ۱۶-۱۸الف با استفاده از روش گره‌ها محاسبه می‌شوند و در ستون آخر جدول ۱۶-۱ نوشته می‌شوند.

توجه داریم که در بالا، Δ_{BD} مثبت است، این امر بدان معناست که Δ_{BD} در جهت بارهای واحد است. یعنی B به D نزدیک می‌شود و عضو قطری BD در سازه آزاد شده کاهش طول می‌یابد. بنابراین در سازه واقعی، عضو BD که قرار است از کوتاه شدن جلوگیری نماید، همانطور که نشان داده شده است باید در فشار باشد. همینطور از آنجایی که a_{BD} شامل عبارت $F^2_{1,j}$ است همواره دارای علامت مثبت است. در نهایت، توجه داریم که عضو بریده شده BD در محاسبات مربوط به جابجایی‌ها در سازه آزاد شده در نظر گرفته می‌شود، زیرا تغییر شکل عضو تحت بار واحد در a_{BD} شرکت می‌کند.

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

مثال ۱۶-۹) نیروهای اعضای خرپای نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۹الف را محاسبه کنید. تمام اعضا دارای مساحت سطح مقطع A و مدول یانگ E هستند.

حل) با بررسی به این نتیجه می‌رسیم که سازه، نامعین استاتیکی خارجی و داخلی است. از آنجایی که اگر یکی از قطرهای AD یا BD و تکیه‌گاه C حذف شوند، سازه پایدار و در تعادل باقی خواهد ماند، درجه نامعینی برابر با ۲ خواهد بود.



شکل۱۶-۱۹ خرپای نامعین استاتیکی

بر خلاف خرپای مثال ۱۶-۱۸ ما نمی‌توانیم هر عضوی را حذف کنیم زیرا اگر BC یا CD حذف بشوند نیمه بیرونی خرپا مکانیسمی می‌شود که قطعه $ABDE$ نامعین استاتیکی باقی می‌ماند. بنابراین ما عضو AD و تکیه‌گاه C را برای آزاد کردن انتخاب می‌کنیم که به ما خرپای معین استاتیکی نشان داده شده در شکل ۱۶-۱۹ ب را می‌دهد. ما نیروی عضو AD را با X_1 و عکس‌العمل عمودی C را با R_2 نمایش می‌دهیم. در این مورد، ما دو شرایط سازگاری داریم. یکی برای قطر AD و دیگری برای تکیه‌گاه C. بنابراین ما به بررسی سه مورد بارگذاری نیاز داریم. اولین مورد، در حالتی است که بارهای حقیقی به خرپای معین استاتیکی آزاد شده شکل ۱۶-۱۹ ب وارد می‌شوند. مورد دوم، در حالتی است که بارهای واحد به عضو بریده شده AD (شکل ۱۶-۱۹ج) وارد می‌شوند و مورد سوم حالتی است که

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

بار واحد به نقطه C در راستای R_2 وارد می‌شود. (شکل ١٦–١٩ د). در مقایسه با مثال قبل، شرایط سازگاری برابرند با:

الف
$$\Delta_{AD} + a_{11}X_1 + a_{12}R_2 = 0$$

ب
$$\upsilon_C + a_{21}X_1 + a_{22}R_2 = 0$$

که Δ_{AD} و υ_C به ترتیب تغییر در طول قطر AD و جابجایی عمودی نقطه C ناشی از بارهای حقیقی وارد بر خرپای آزاد شده هستند. a_{11}, a_{12} و غیره، ضرایب نرمی هستند که پیش از این توضیح داده شده‌اند. (مثال ١٦–٧ را ببینید.) محاسبات مشابه همان است که در مثال ١٦–٨ انجام شده و در جدول ١٦–٢ نشان داده شده است.

عضو	L_j	$F_{0,j}$	$F_{1,j}(X_1)$	$F_{1,j}(R_2)$	$F_{0,j}F_{1,j}(X_1)L_j$	$F_{0,j}F_{1,j}(R_2)L_j$	$F^2_{1,j}(X_1)L_j$	$F^2_{1,j}(R_2)L_j$	$F_{1,j}(X_1)F_{1,j}(R_2)L_j$	$F_{a,j}$
AB	1	10.0	−0.71	−2.0	−7.1	−20.0	0.5	4.0	1.41	0.67
BC	1.41	0	0	−1.41	0	0	0	2.81	0	−4.45
CD	1	0	0	1.0	0	0	0	1.0	0	3.15
DE	1	0	−0.71	1.0	0	0	0.5	1.0	−0.71	0.12
AD	1.41	0	1.0	0	0	0	1.41	0	0	4.28
BE	1.41	−14.14	1.0	1.41	−20.0	−28.11	1.41	2.81	2.0	−5.4
BD	1	0	−0.71	0	0	0	0.5	0	0	−3.03
					$\Sigma = -27.1$	$\Sigma = -48.11$	$\Sigma = 4.32$	$\Sigma = 11.62$	$\Sigma = 2.7$	

جدول١٦–٢

از جدول ١٦–٢ داریم:

$$\Delta_{AD} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{0,j}F_{1,j}(X_1)L_j}{AE} = -\frac{27.1}{AE}$$ (یعنی AD در طول افزایش می‌یابد)

$$\upsilon_C = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{0,j}F_{1,j}(R_2)L_j}{AE} = \frac{-48.11}{AE}$$ (یعنی C به سمت پایین جابجا می‌شود)

$$a_{11} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{1,j}^2(X_1)L_j}{AE} = \frac{4.32}{AE}$$

$$a_{22} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{1,j}^2(R_2)L_j}{AE} = \frac{11.62}{AE}$$

$$a_{12} = a_{21} \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{1,j}(X_1)F_{1,j}(R_2)L_j}{AE} = \frac{2.7}{AE}$$

با جایگذاری در معادله‌های (الف) و (ب) و ضرب در AE داریم:

پ
$$-27.1 + 4.32X_1 + 2.7R_2 = 0$$

ت
$$-48.11 + 2.7X_1 + 11.62R_2 = 0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

با حل معادله‌های (پ) و (ت) به دست خواهیم آورد:

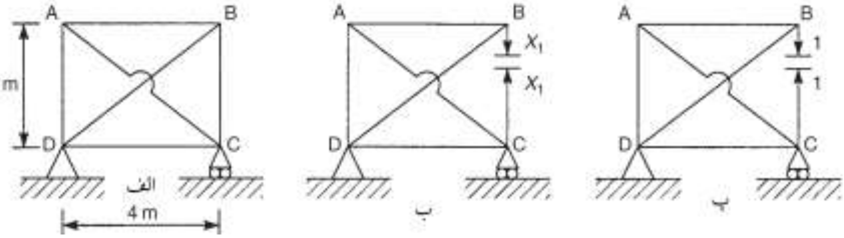
$X_1 = 4.28kN \qquad R_2 = 3.15kN$

حال، نیروهای حقیقی $F_{a,j}$ در اعضای خرپای حقیقی را با روش گره به گره محاسبه می‌کنیم و در ستون آخر جدول ١٦-٢ قرار می‌دهیم.

خرپاهای خود کرنش‌گر

خرپاهای نامعین استاتیکی بر خلاف نوع معین استاتیکی، ممکن است تحت خود کرنشگری واقع شوند، بدین ترتیب که پیش از اعمال بارهای خارجی، نیروهای داخلی وجود دارند. چنین شرایطی ممکن است بر اثر تغییر دمای موضعی یا عدم انطباق ابتدایی یک عضو به وجود بیاید. در مواردی این چنین، عبارت سمت راست معادلات سازگاری، معادله (ب) مثال ١٦-٨ و معادله‌های (الف) و (ب) مثال ١٦-٩ صفر نخواهد بود.

مثال ١٦-١٠) خرپای نشان داده شده در شکل ١٦-٢٠الف، هنگامی که دمای تمام اعضا یکسان است تحت تنش نیست، اما به خاطر شرایط موضعی، دمای عضو BC به اندازه ٣٠ درجه سلسیوس افزایش می‌یابد. اگر مساحت سطح مقطع همه اعضا برابر با ٢٠٠ میلی متر مربع باشد و ضریب انبساط خطی اعضا برابر $7*10^{-6}/^{o}C$ باشد نیروهای ناشی از این تغییر را در اعضا محاسبه کنید. مدول یانگ برابر ٢٠٠ هزار نیوتن بر میلی متر مربع است.



شکل ١٦-٢٠خود کرنش یافتگی ناشی از تغییر دما

بر اثر خیز حرارتی، افزایش طول در عضو BC برابر است با:

$3\times10^3\times30\times7\times10^{-6} = 0.63mm$

خرپا دارای درجه نامعینی استاتیکی داخلی ١ است. (با بررسی مشخص می‌شود.) بنابراین ما خرپا را با بریدن BC آزاد می‌کنیم. عضوی که خیز حرارتی را تجربه کرده است. در شکل ١٦-٢٠ ب این امر نشان داده شده است. نیروی عضو BC را X_1 فرض می‌کنیم. از آنجایی

که هیچ بار خارجی ای روی سازه نیست، Δ_{BC} برابر صفر است و شرط سازگاری به صورت زیر می‌شود:

الف
$$a_{11}X_1 = -0.63mm$$

که همانند قبل، در آن:

$$a_{11} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{1,j}^2 L_j}{AE}$$

توجه داشته باشیم که کشیدگی عضو BC منفی است و این امر از آنجا ناشی می‌شود که بر خلاف جهت X_1 است. راه حل در جدول ۱۶-۳ کامل می‌شود. از اینرو:

$$a_{11} = \frac{48000}{200 \times 200000} = 1.2 \times 10^{-3}$$

بنابراین از معادله (الف) داریم:

$$X_1 = -525\,N$$

عضو	L_j (mm)	$F_{1,j}$	$F_{1,j}^2 L_j$	$F_{a,j}$ (N)
AB	4000	1.33	7111.1	−700
BC	3000	1.0	3000.0	−525
CD	4000	1.33	7111.1	−700
DA	3000	1.0	3000.0	−525
AC	5000	−1.67	13 888.9	875
DB	5000	−1.67	13 888.9	875
			$\sum = +48\,000.0$	

جدول۱۶-۳

نیروهای حقیقی $F_{a,j}$ در اعضای خرپای کامل در ستون آخر جدول ۱۶-۳ نوشته شده‌اند.

راهکار دیگر حل خرپاهای نامعین استاتیکی، چه خود کرنش گر و چه غیر آن، استفاده از اصل مقدار ثابت (ایستایی) انرژی مکمل نهایی است. بنابراین، برای خرپای مثال ۱۶-۸، انرژی مکمل نهایی C از معادله ۱۵-۳۹ برابر است با:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{F_j} \delta_j dF_j - P\Delta_C$$

که در آن Δ_c، جابجایی گره C در جهت P است. اجازه بدهید فرض کنیم که عضو BD به اندازه λ_{BD} کوتاه است. (یعنی عدم انطباق در BD)، در این حالت:

$$C = \sum_{j=1}^{n} \int_0^{F_j} \delta_j dF_j - P\Delta_C - X_1\lambda_{BD}$$

از اصل مقدار ثابت (ایستایی) انرژی مکمل نهایی داریم:

$$\frac{\partial C}{\partial X_1} = \sum_{j=1}^{n} \delta_j \frac{\partial F_j}{\partial X_1} - \lambda_{BD} = 0 \qquad (\text{٨–١٦})$$

با فرض اینکه خرپا، الاستیک خطی است. معادله ١٦–٨ را می‌توان به صورت زیر دوباره نوشت:

$$\frac{\partial C}{\partial X_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j L_j}{A_j E_j} \frac{\partial F_j}{\partial X_1} - \lambda_{BD} = 0 \qquad (\text{٩–١٦})$$

یا از آنجاییکه برای سیستم‌های الاستیک خطی، انرژی مکمل نهایی C و انرژی کرنش U قابل تعویض هستند:

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{F_j L_j}{A_j E_j} \frac{\partial F_j}{\partial X_1} = \lambda_{BD} \qquad (\text{١٠–١٦})$$

معادله ١٦–١٠ آن چیزی را که در قضیه دوم کاستی گیلیانو ارائه شده است به صورت ریاضی بیان می‌کند، که بیان می‌کند:

برای یک سازه الاستیک خطی، ضریب مشتق جزیی انرژی کرنشی نهایی سازه با توجه به نیرو در یک عضو افزونه، برابر است با عدم انطباق ابتدایی در آن عضو.

عضو	L_j	$F_{a,j}$	$\partial F_{a,j}/\partial X_1$	$F_{a,j}L_j(\partial F_{a,j}/\partial X_1)$
AB	L	$-0.71X_1$	-0.71	$0.5LX_1$
BC	L	$-0.71X_1$	-0.71	$0.5LX_1$
CD	L	$-P-0.71X_1$	-0.71	$(0.71P+0.5X_1)L$
DA	L	$-0.71X_1$	-0.71	$0.5LX_1$
AC	$1.41L$	$1.41P+X_1$	1.0	$(2P+1.41X_1)L$
BD	$1.41L$	X_1	1.0	$1.41X_1L$
				$\sum = 2.71PL + 4.82X_1L$

شکل ١٦–٤

کاربرد انرژی مکمل برای حل خرپاهای نامعین استاتیکی بسیار شبیه روشی است که در مثال های ١٦–٨ تا ١٦–١٠ نشان داده شدند. برای مثال، راه حل مثال ١٦–٨ به صورت زیر

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

خواهد بود. دوباره ما BD را به عنوان عضو افزونه انتخاب می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نیرو در BD برابر است با X_1. نیروهای $F_{a,j}$ در خرپای کامل بر حسب P و X_1 محاسبه می‌شوند و از این طریق برای هر عضو مقدار $\partial F_{a,j}/\partial X_1$ به دست می‌آید. عبارت زیر برای هر عضو محاسبه می‌شود و در تمام خرپا مقادیرش جمع می‌شود:

$$\left(\frac{F_{a,j}L_j}{A_jE_j}\right)\frac{\partial F_{a,j}}{\partial X_1}$$

در معادله ۱٦-۹ (یا ۱٦-۱۰) λ_{BD} برابر صفر است و بدین ترتیب مقدار X_1 را بر حسب P می‌دهد. راه حل در جدول ۱٦-٤ نشان داده شده است. بنابراین از معادله ۱٦-۹ داریم:

$$\frac{1}{AE}\left(2.71PL++4.82X_1L\right)=0$$

که همانند قبل از آن خواهیم داشت:

$$X_1=-0.56P$$

از دو راهکاری که برای حل مثال ۱٦-۸ نشان داده شد، می‌توان مشاهده کرد که استفاده از اصل مقدار ثابت (ایستایی) انرژی مکمل نهایی منجر به راه حل‌هایی با پیچیدگی جبری نسبتاً بیشتری می‌شود. این امر هنگامی که درجه نامعینی یک سازه بیش از ۱ است و نیروهای $F_{a,j}$ بر حسب بارهای اعمال شده و تمام نیروهای افزونه بیان می‌شوند، بیشتر می‌شود. البته به تعداد افزونگی ها، معادله‌هایی به شکل معادله ۱٦-۹ وجود خواهد داشت.

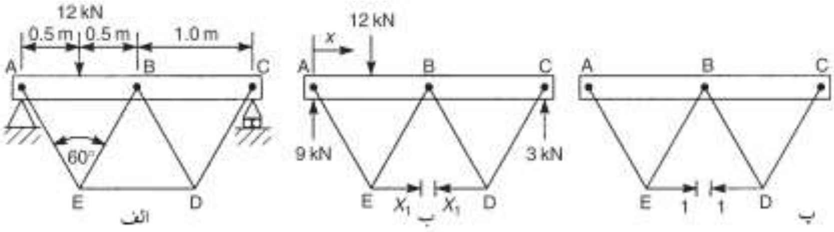
۱٦-٦ تیرهای مهاربندی شده

بعضی سازه‌ها شامل تیرهایی می‌شوند که توسط خرپاها سخت شده‌اند که در این سازه‌ها، قسمت تیر سازه قادر است علاوه بر نیروهای محوری در برابر نیروهای برشی و گشتاور خمشی مقاومت کند. جابجایی‌های ناشی از نیروهای برشی آنقدر کوچک هستند که می‌توان از آنها صرف نظر کرد. بنابراین، در چنین سازه‌هایی ما فرض می‌کنیم که اعضای بخش خرپا فقط در برابر نیروهای محوری مقاومت می‌کنند و بخش تیر سازه در برابر نیروهای محوری و گشتاور خمشی مقاومت می‌کند. در برخی موارد، از نیروهای محوری تیر نیز صرف نظر می‌شود، زیرا اثر آنها در مقدار بزرگتر سطح مقطع، اندک است.

مثال ۱٦-۱۱) تیر ABC نشان داده شده در شکل ۱٦-۲۱الف دارای اتکای ساده است و به وسیله خرپایی که اعضای آن فقط قادر به مقاومت در برابر نیروهای محوری هستند، سخت

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

شده است. تیر دارای سطح مقطع ۶۰۰۰ میلی متر مربع و گشتاور دوم سطح $7.2*10^6\ mm^4$ است. اگر سطح مقطع اعضای خرپا ٤۰۰ میلی متر مربع باشد نیروها را در اعضای خرپا محاسبه کنید و بیشینه مقدار گشتاور خمشی را در تیر به دست آورید. برای تمام اعضا مدول یانگ برابر E است.



شکل۱۶-۲۱تیر مهاربندی شده مثال۱۶-۱۱

مشاهده می‌کنیم که اگر تیر قادر بود فقط در برابر نیروهای محوری مقاومت کند، سازه یک خرپای معین استاتیکی نسبتاً ساده می‌شد. با این وجود، تیر، علاوه بر نیروهای محوری در برابر گشتاور خمشی نیز مقاومت می‌کند. (ما از اثر برش صرف نظر می‌کنیم.) بدین ترتیب سازه نامعین استاتیکی و ۱ درجه نامعین است، گشتاور خمشی در هر مقطع تیر. بنابراین ما فقط به یک آزاد کردن برای معین کردن استاتیکی سازه نیاز داریم. ضروری نیست که گشتاور خمشی در تیر را برای آزاد کردن انتخاب کنیم. ما عضو ED خرپا را همانطور که در شکل ۱۶-۲۱ب نشان داده شده است انتخاب می‌کنیم، زیرا این انتخاب به خاطر تقارن برای ما مزایایی را در کاربرد روش بار واحد در شکل ۱۶-۲۱ج در بر خواهد داشت.

در این مثال جابجایی‌ها ناشی از گشتاور خمشی در تیر و نیروهای محوری در تیر و اعضای خرپا هستند. بنابراین، در سازه آزاد شده شکل ۱۶-۲۱ ب، جابجایی نسبی Δ_{ED} انتهاهای بریده شده عضو ED از روش بار واحد (معادله (پ) مثال ۱۵٫۹ و مثال های ۱۶-۸ تا ۱۶-۱۰ را ببینید.) برابر است با:

$$\Delta_{ED} = \int_{ABC} \frac{M_0 M_1}{EI} dx + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{0,j} F_{1,j} L_j}{A_j E} \qquad \text{(الف)}$$

که در آن M_O گشتاور خمشی در هر مقطع تیر ABC در سازه آزاد شده است. ضریب نرمی a_{11} عضو ED برابر است با:

$$a_{11} = \int_{ABC} \frac{M_1^2}{EI} dx + \sum_{j=1}^{n} \frac{F_{1,j}^2 L_j}{A_j E} \qquad \text{(ب)}$$

عضو	A_j (mm^2)	$F_{0,j}$ (kN)	$F_{1,j}$	$F_{0,j}F_{1,j}/A_j$	$F^2_{1,j}/A_j$	$F_{a,j}$ (kN)
AB	6000	0	−0.5	0	4.17×10^{-5}	−2.01
BC	6000	0	−0.5	0	4.17×10^{-5}	−2.01
CD	400	0	1.0	0	2.5×10^{-3}	4.02
ED	400	0	1.0	0	2.5×10^{-3}	4.02
BD	400	0	−1.0	0	2.5×10^{-3}	−4.02
EB	400	0	−1.0	0	2.5×10^{-3}	−4.02
AE	400	0	1.0	0	2.5×10^{-3}	4.02
				$\sum=0$	$\sum=0.0126$	

جدول۱۶-۵

در معادله‌های (الف) و (ب) طول L_j مانند مدول یانگ،E، ثابت است. بنابراین در محاسبه جمع عبارات جدول ۱۶-۵ قابل چشم پوشی هستند. بررسی جدول ۱۶-۵ نشان می‌دهد که جابجایی Δ_{ED} در سازه آزاد شده، تنها ناشی از خمش تیر است. یعنی عبارت دوم در سمت راست معادله ۱ برابر صفر است. این امر از بررسی سازه نیز قابل استنباط است. همینطور سهم نیروهای محوری در جابجایی تیر در دو عبارت اولی ستون یکی مانده به آخر جدول ۱۶-۵ قابل مشاهده است، این مقادیر آنقدر کوچک هستند که قابل صرف نظر هستند. سهم خمش در Δ_{ED} تیر را محاسبه می‌کنیم. از شکل ۱۶-۲۱ب داریم:

$$M_0 = 9x \qquad (0 \le x \le 0.5m)$$

$$M_0 = 9x - 12(x-0.5) = 6-3x \qquad (0.5 \le x \le 2.0m)$$

$$M_1 = -0.87x \qquad (0.5 \le x \le 1.0m)$$

$$M_1 = -0.87x + 1.74(x-1.0) = 0.87x - 1.74 \qquad (1.0 \le x \le 2.0m)$$

با جایگذاری M_O و M_1 در معادله (الف) داریم:

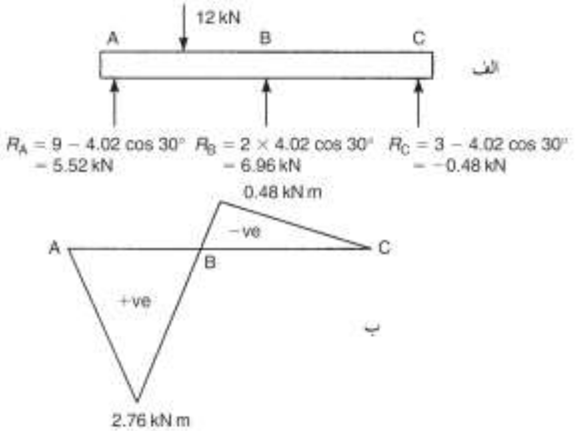
$$\int_{ABC}\frac{M_0M_1}{EI}dx =$$
$$=\frac{1}{EI}\left[-\int_0^{0.5}9\times0.87x^2dx - \int_0^{0.5}(6-3x)0.87xdx + \int_1^{2.0}(6-3x)(0.87x-1.74)dx\right]$$

که:

$$\int_{ABC}\frac{M_0M_1}{EI}dx = -\frac{0.33\times10^6}{E}mm$$

به صورت مشابه:

$$\int_{ABC}\frac{M_1^2}{EI}dx = \frac{1}{EI}\left[\int_0^1 0.87^2x^2dx + \int_1^{2.0}(0.87x-1.74)^2dx\right]$$



شکل۱۶-۲۲ توزیع گشتاور خمشی مثال۱۶-۱۱

که:

$$\int_{ABC} \frac{M_1^2}{EI} dx = \frac{0.083 \times 10^3}{EI} mm/N$$

شرایط سازگاری به ما می‌دهد:

$$\Delta_{ED} + a_{11} X_1 = 0$$

بنابراین:

$$-\frac{0.33 \times 10^3}{E} + \frac{0.083 \times 10^3}{E} X_1 = 0$$

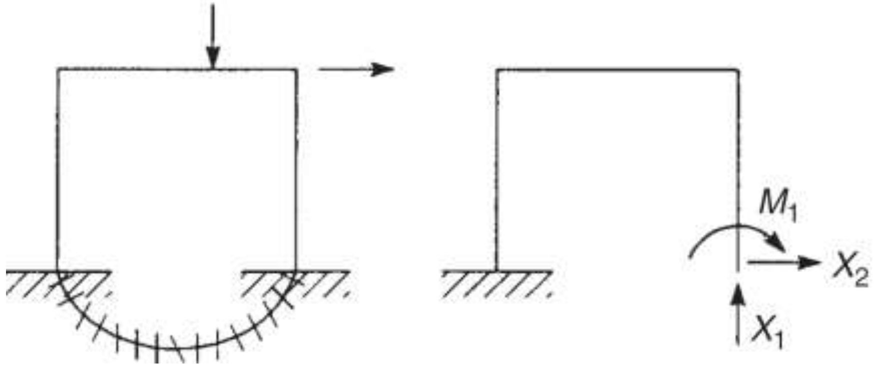
که می‌دهد:

$$X_1 = 4018.1N = 4.02kN$$

نیروهای محوری تیر و خرپا را می‌توان با استفاده از روش گره به گره به دست آورد که در ستون آخری جدول ۱۶-۵ نوشته شده‌اند. نیروهایی که در تیر سازه کامل اثر می‌کنند در شکل ۱۶-۲۲الف و دیاگرام گشتاور خمشی در شکل ۱۶-۲۲ ب نشان داده شده‌اند. در دیاگرام خمش مشاهده می‌کنیم که گشتاور خمشی بیشینه در تیر برابر ۲/۷۶ کیلونیوتن متر است.

۱۶-۷ قاب های پرتال

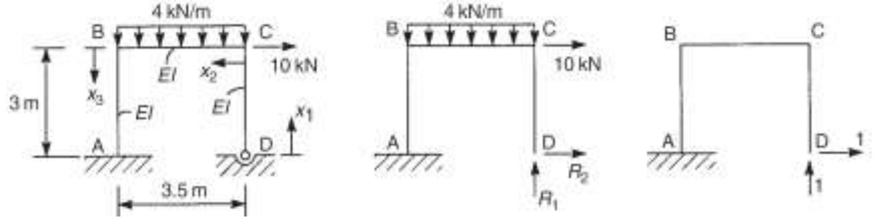
روش نرمی را می‌توان برای تحلیل قاب های پرتال نیز به کار برد. همانطور که خواهیم دید در بیشتر موارد به جز موارد ساده، درجه نامعینی استاتیکی بالا است، بدین ترتیب تعداد معادلات سازگاری مورد نیاز برای حل، برای محاسبات دستی بسیار زیاد می‌شود.



شکل۱۶-۲۳ نامعینی یک قاب پرتال

قاب نشان داده شده در شکل ۱۶-۲۳الف را در نظر بگیرید. از بخش ۱۶-۲ می دانیم که قاب به همراه فونداسیونش تشکیل یک تک حلقه دو بعدی را می دهند و بنابراین سه درجه نامعین استاتیکی است. به همین دلیل ما برای به دست آوردن سازه اولیه معین استاتیکی به ۳ آزاد کردن احتیاج داریم. این هدف با حذف فونداسیون در پای یکی از بازوهای عمودی مانند آنچه در شکل ۱۶-۲۳ ب نشان داده شده است میسر می‌شود. در پی این حذف، ما دو آزاد کردن در نیرو و یکی در گشتاور داریم، سازه اولیه در حقیقت، یک طره خم شده است. در این مثال سه معادله سازگاری نیازمند به حل، وجود دارد. دو انتقال و یک دوران. واضح است که برای یک قاب پرتال دو چشمه مسطح، ما شش معادله سازگاری خواهیم داشت، بنابراین راه حل به کار زیادی نیاز خواهد داشت. افزودن های جدید به قاب راه حل های دستی را غیر عملی می‌کند. علاوه بر این همانطور که در بخش ۱۶-۱۰ خواهیم دید، روش پخش لنگر راه حلی سریع را برای ما فراهم می‌کند. البته باید توجه شود که استفاده از روش پخش لنگر نیازمند آن است که انتقال قاب که به صورت جانبی است، باید به صورت جداگانه در نظر گرفته شود. در حالی که در روش نرمی، انتقال در مسئله فرض شده بود و نیازی به جداگانه در نظر گرفتن آن نبود.

مثال ۱۶–۱۲) توزیع گشتاور خمشی را در قاب $ABCD$ نشان داده شده در شکل ۱۶–۲۴الف تعیین کنید. صلبیت خمشی تمام اعضای قاب برابر EI است.



شکل۱۶–۲۴ قاب پرتال مثال۱۶–۱۲

از مقایسه با شکل ۱۶–۲۳الف متوجه می شویم که قاب دارای درجه نامعینی استاتیکی ۲ است زیرا بازوی عمودی CD در D به فونداسیون مفصل شده است. بدین دلیل ما برای به دست آوردن سازه اولیه معین استاتیکی فقط به آزاد کردن ۲ عکس‌العمل نیاز داریم. مانند آنچه در شکل ۱۶–۲۴ ب نشان داده شده است. برای قاب‌هایی از این نوع، معمولاً از جابجایی‌های ناشی از نیروهای محوری صرف نظر می‌شود و فرض می‌شود که جابجایی‌ها فقط ناشی از خمش هستند. نقطه D در سازه اولیه، جابجایی‌های عمودی $\Delta_{D,V}$ و افقی $\Delta_{D,H}$ را متحمل می‌شود، بنابراین اگر ما عکس‌العمل‌های افزونه را با R_1 و R_2 نمایش دهیم، معادله‌های سازگاری برابر خواهند بود با:

$$\Delta_{D,V} + a_{11}R_1 + a_{12}R_2 = 0 \quad \text{(الف)}$$

$$\Delta_{D,H} + a_{21}R_1 + a_{22}R_2 = 0 \quad \text{(ب)}$$

که در آنها ضرایب نرمی دارای معانی معمول خود هستند. دوباره، مانند مثال های قبل، روش بار واحد را برای محاسبه جابجایی‌ها و ضرایب نرمی به کار می گیریم، بنابراین:

$$\Delta_{D,V} = \sum \int_L \frac{M_0 M_{1,V}}{EI} dx$$

که $M_{1,V}$ گشتاور خمشی در هر نقطه در قاب، ناشی از یک بار واحد عمودی اعمال شده در D است. به صورتی مشابه:

$$\Delta_{D,H} = \sum \int_L \frac{M_0 M_{1,H}}{EI} dx$$

و

$$a_{11} = \sum \int_L \frac{M_{1,V}^2}{EI} dx$$

$$a_{22}=\sum\int_L \frac{M_{1,H}^2}{EI}dx \qquad a_{12}=a_{21}=\sum\int_L \frac{M_{1,V}M_{1,H}}{EI}dx$$

در پایین ما عبارت‌هایی را برای گشتاور خمشی در اعضای قاب می نویسیم. ما گشتاور خمشی را هنگامی مثبت می دانیم که باعث کشش در بیرون قاب شود. بنابراین در DC:

$$M_0=0 \qquad M_{1,V}=0 \qquad M_{1,H}=-1x_1$$

در CB داریم:

$$M_0=4x_2\frac{x_2}{2}=2x_2^2 \qquad M_{1,V}=-1x_2 \qquad M_{1,H}=-3$$

در BA داریم:

$$M_0=4\times3.5\times1.75+10x_3=24.5+10x_3 \qquad M_{1,V}=-3.5$$

$$M_{1,H}=-1(3-x_3)$$

که از آنجا:

$$\Delta_{D,V}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{3.5}\left(-2x_2^3\right)dx_2+\int_0^3-(24.5+10x_3)3.5dx_3\right]=-\frac{489.8}{EI}$$

$$\Delta_{D,H}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{3.5}\left(-6x_2^2\right)dx_2+\int_0^3-(24.5+10x_3)(3-x_3)dx_3\right]=-\frac{241.0}{EI}$$

$$a_{11}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{3.5}x_2^2dx_2+\int_0^3 3.5^2\,dx_3\right]=\frac{51.0}{EI}$$

$$a_{22}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^3 x_1^2dx_1+\int_0^{3.5}3^2\,dx_2+\int_0^3(3-x_3)^2\,dx_3\right]=\frac{49.5}{EI}$$

$$a_{12}=a_{21}=\frac{1}{EI}\left[\int_0^{3.5}3x_2dx_2+\int_0^3 3.5(3-x_3)dx_3\right]=\frac{34.1}{EI}$$

با جایگذاری $\Delta_{D,V}$، $\Delta_{D,H}$، a_{11} و غیره در معادله‌های (الف) و (ب) به دست خواهیم آورد:

$$-\frac{489.8}{EI}+\frac{51.0}{EI}R_1+\frac{34.1}{EI}R_2=0 \qquad \text{(پ)}$$

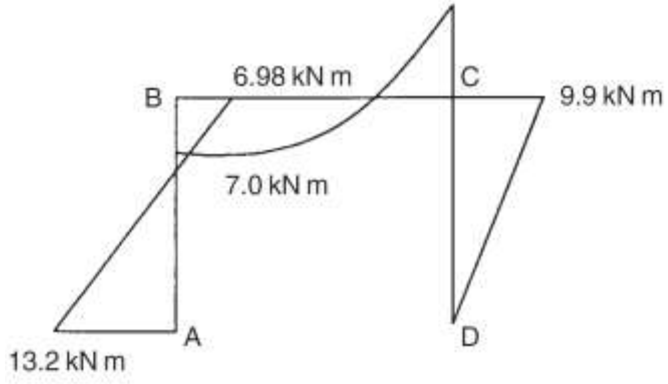
$$-\frac{241.0}{EI}+\frac{34.1}{EI}R_1+\frac{49.5}{EI}R_2=0 \qquad \text{(ت)}$$

با حل معادله‌های (پ) و (ت) خواهیم داشت:

$$R_1=11.8kN \qquad R_2=-3.3kN$$

سپس دیاگرام گشتاور خمشی مانند شکل ۱۶-۲۵ رسم خواهد شد.

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com



شکل۱٦-۲۵ دیاگرام گشتاور خمشی برای قاب مثال۱٦-۱۲

مشاهده می‌شود که مقدار محاسبات قابی به این سادگی (مثال ۱٦-۱۲) کاملاً زیاد است. به همین دلیل همانطور که قبلا نیز گفته شد روش پخش لنگر یا یک روش بر مبنای محاسبات رایانه‌ای به کار می رود.

۱٦-۸ قوس‌های دو مفصلی

در فصل ٦ دیدیم که یک کمان (قوس) سه مفصلی، به خاطر حضور لولا یا مفصل سوم در جایی که گشتاور خمشی داخلی صفر است، معین استاتیکی است. در حقیقت، حضور مفصل سوم، مانند یک آزاد کردن است. بنابراین یک قوس دو مفصلی، مانند آنچه در شکل ۱٦-۲٦الف نشان داده شده است دارای نامعینی استاتیکی ۱ است. از بررسی به راحتی مشخص است که مانند قوس سه مفصلی، در هر تکیه‌گاه دو عکس‌العمل وجود دارد. تحلیل قوس‌های دو مفصلی، یعنی تعیین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را می‌توان با استفاده از روش نرمی انجام داد. دوباره مانند مورد قاب های پرتال، مرسوم است که از اثر نیروهای محوری در جابجایی‌ها صرف نظر شود و فرض شود که جابجایی‌ها فقط از خمش ناشی می‌شوند. قوس شکل ۱٦-۲٦الف دارای پروفیلی (نیمرخ) است که معادله آن را می‌توان بر حسب x و y بیان کرد. گشتاور دوم سطح مقطع قوس برابر I است و ما فاصله حول پروفیل از A را با s نشان می دهیم.

در ابتدا ما یک آزاد کردن را بر می گزینیم، برای به دست آوردن سازه اولیه معین استاتیکی، عکس‌العمل افقی R_1 در B را آزاد می‌کنیم، مانند شکل ۱٦-۲٦ب. سپس با استفاده از روش

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

بار واحد، جابجایی افقی $\Delta_{B,H}$ نقطه B را در سازه اولیه و ضریب نرمی a_{11} را محاسبه می‌کنیم، پس از آن از سازگاری داریم:

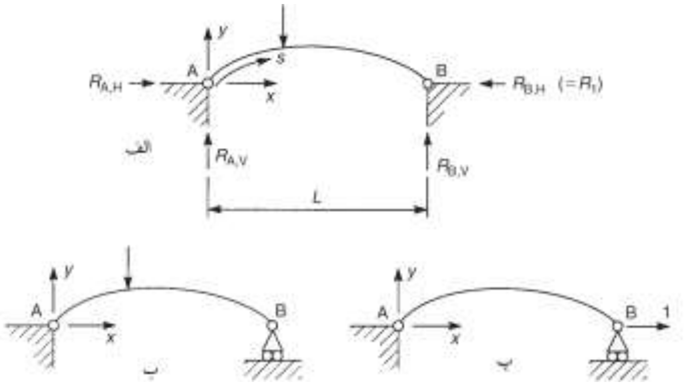
$$\Delta_{B,H} - a_{11}R_1 = 0 \qquad (۱۱-۱۶)$$

که در آن عبارت شامل R_1 منفی است زیرا R_1 در جهت مخالف بار واحد است. (شکل ۱۶-۲۶ ج را ببینید.) سپس با روش نوشتار معمول خواهیم داشت:

$$\Delta_{B,H} = \int_{profile} \frac{M_0 M_1}{EI} ds \qquad (۱۲-۱۶)$$

که در آن M_O به بارگذاری اعمال شده وابسته است و $M_1=1y$ (یک گشتاور هنگامی منفی است که در زیر سطح قوس تولید کشش کند.). همینطور:

$$a_{11} = \int_{profile} \frac{M_1^2}{EI} ds = \int_{profile} \frac{y^2}{EI} ds \qquad (۱۳-۱۶)$$

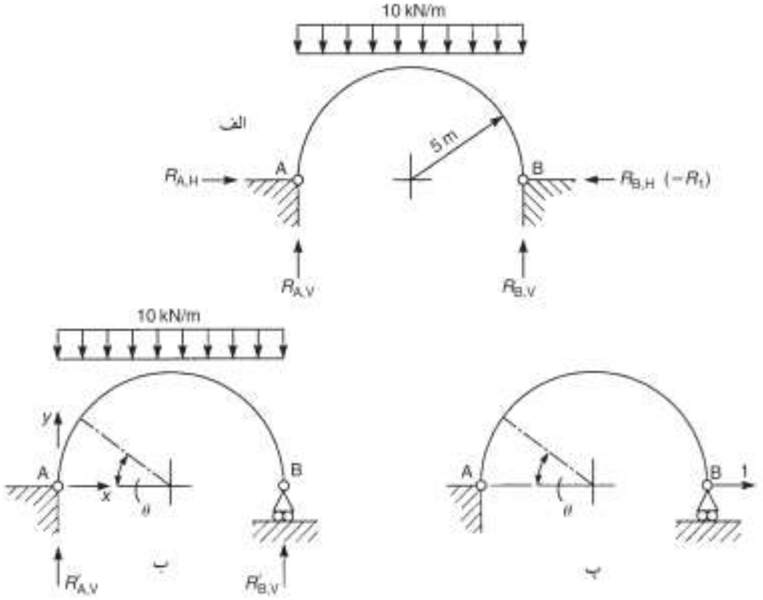


شکل۱۶-۲۶ راه حل یک قوس دو مفصلی

با جایگذاری M_1 در معادله ۱۶-۱۲ و سپس جایگذاری $\Delta_{B,H}$ و a_{11} در معادله ۱۶-۱۱ به دست خواهیم آورد:

$$R_1 = \frac{\int_{profile} \frac{M_0 y}{EI} ds}{\int_{profile} \frac{y^2}{EI} ds} = \qquad (۱۴-۱۶)$$

مثال ۱۶-۱۳) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در قوس نیم دایره‌ای دو مفصلی شکل ۱۶-۲۷الف تعیین کنید. صلبیت خمشی قوس برابر مقدار ثابت EI است.



شکل١٦-٢٧ قوس نیم دایره‌ای مثال١٦-١٣

دوباره ما عکس‌العمل افقی در تکیه‌گاه B را برای آزاد کردن انتخاب می‌کنیم، بدین ترتیب $R_{B,H}(=R_1)$ به صورت مستقیم از معادله ١٦-١٤ به دست می آید که در آن M_O و s توابعی از x و y هستند. اگر ما سیستم مختصات زاویه‌ای را به کار بریم محاسبه ساده سازی می‌شود، از سازه اولیه نشان داده شده در شکل ١٦-٢٧ ب داریم:

$$M_0 = R'_{B,V}\left(5+5\cos\theta\right)-\frac{10}{2}\left(5+5\cos\theta\right)^2 \qquad \text{الف}$$

که در آن $R'_{B,V}$ عکس‌العمل عمودی در نقطه B در سازه اولیه است. از شکل ١٦-٢٧ب داریم که $R'_{B,V} = 50kN$. همینطور $R'_{B,V} = R'_{A,V}$، با جایگذاری $R'_{B,V}$ در معادله (الف) به دست خواهیم آورد:

$$M_0 = 125\sin^2\theta \qquad \text{ب}$$

همینطور داریم:

$$y = 5\sin\theta \qquad ds = 5d\theta$$

بنابراین از معادله ١٦-١٤ داریم:

$$R_1 = \frac{\int_0^{\pi} 125\sin^2\theta 5\sin\theta 5d\theta}{\int_0^{\pi} 25\sin^2\theta 5d\theta}$$

یا:

$$R_1 = \frac{\int_0^{\pi} 25\sin^3\theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^2\theta d\theta} \qquad \text{پ}$$

که می‌دهد:

$$R_1 = 21.2kN\left(= R_{B,H}\right)$$

عکس‌العمل‌های باقیمانده با بررسی تعادل استاتیکی قوس به دست می‌آیند و برابر هستند با:

$$R_{A,H} = 21.2kN \qquad R_{A,V} = R_{B,V} = 50kN$$

انتگرال‌های معادله (پ) مثال ۱۶-۱۳ برای به دست آوردن مقدار معین خود نسبتاً ساده هستند. صورت کسر را می‌توان از اجزایش به دست آورد و مخرج را نیز با جایگذاری $2\left(1-\cos 2\theta\right)/2$ به جای $sin^2\theta$ می‌توان محاسبه کرد. علاوه بر این در قوسی که دارای پروفیل یک نیم دایره است $M_{o,y}$ و ds به راحتی بر حسب سیستم مختصات زاویه‌ای بیان می‌شوند. هر چند این راهکار را در یک قوس دو مفصلی شامل پروفیل سهموی نمی‌توان مورد استفاده قرار داد و منجر به انتگرال‌های پیچیده‌تری می‌شود. در آن موارد می‌توان با توجه کردن به این امر که گشتاور دوم سطح مقطع قوس حول پروفیل تغییر می‌کند، امر را ساده سازی نمود. چنین تغییری را پنداشت سکانت، پنداشت قاطع یا فرض سکانت می‌نامند و در پایین توضیح داده شده است.

پنداشت سکانت

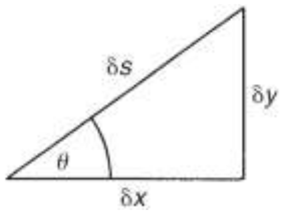
در معادله ۱۶-۱۴ عبارت ds/I ظاهر می‌شود. اگر این عبارت با عبارتی که تابعی از x یا y باشد جایگزین شود، راه حل ساده‌تر می‌شود. طول المانی δ_s قوس نشان داده شده در شکل ۱۶-۲۸ را در نظر بگیرید و تصاویر آنها بر روی محورهای x و y یعنی δ_x و δ_y را نیز در نظر بگیرید. از المان مثلثی داریم:

$$\delta x = \delta s\cos\theta$$

یا، در حد هنگامی که ds به سمت صفر میل می‌کند:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$ds = \frac{dx}{\cos\theta} = dx\sec\theta$$



شکل۱۶-۲۸ طول المانی قوسی

بنابراین:

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx\sec\theta}{I}$$

اجازه بدهید فرض کنیم که I حول پروفایل قوس تغییر می‌کند به گونه‌ای که:

$$I = I_0 \sec\theta$$

که در آن I_o گشتاور دوم سطح در تاج قوس است. (یعنی جایی که $\theta=0$ است.) بدین ترتیب:

$$\frac{ds}{I} = \frac{dx\sec\theta}{I_0\sec\theta} = \frac{dx}{I_0}$$

بنابراین با جایگذاری ds/I در معادله ۱۶-۱۴ خواهیم داشت:

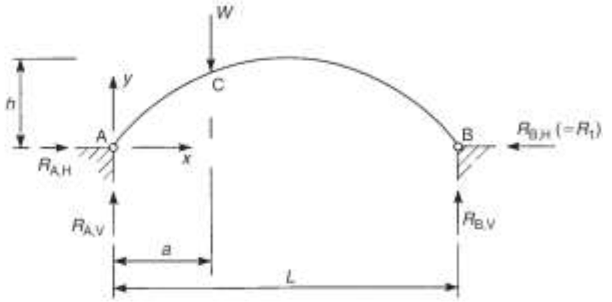
$$R_1 = \frac{\int_{profile}\left(\frac{M_0 y}{EI_0}\right)dx}{\int_{profile}\left(\frac{y^2}{EI_0}\right)dx}$$

یا:

$$R_1 = \frac{\int_{profile} M_0 y dx}{\int_{profile} y^2 dx} \qquad (۱۶-۱۵)$$

مثال ۱۶-۱۴) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی در قوس سهموی نشان داده شده در شکل ۱۶-۲۹ را با فرض اینکه گشتاور دوم سطح مقطع قوس طبق پنداشت سکانت تغییر می‌کند را تعیین کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۶-۲۹ قوس سهموی مثال۱۶-۱۴

معادله قوس را می‌توان به صورت زیر نشان داد:

$$y = \frac{4h}{L^2}\left(Lx - x^2\right) \qquad \text{الف}$$

دوباره می‌توانیم قوس را در B مانند شکل ۱۶-۲۶ب آزاد کنیم. سپس خواهیم داشت:

$$M_0 = R'_{A,V}x \qquad (0 \le x \le a)$$

$$M_0 = R'_{A,V}x - W(x-a) \qquad (a \le x \le L)$$

که در آن $R'_{A,V}x$ عکس‌العمل عمودی در A در سازه آزاد شده است. حال با گشتاور گرفتن حول B خواهیم داشت:

$$R'_{A,V}L - W(L-a) = 0$$

که از آنجا:

$$R'_{A,V} = \frac{W}{L}(L-a)$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

$$M_0 = \frac{W}{L}(L-a)x \qquad (0 \le x \le a) \qquad \text{ب}$$

$$M_0 = \frac{W}{L}(L-x) \qquad (a \le x \le L) \qquad \text{پ}$$

مخرج کسر معادله ۱۶-۱۵ را می‌توان به صورت جداگانه معین کرد، بنابراین از معادله (الف) خواهیم داشت:

$$\int_{profile} y^2 dx = \int_0^L \left(\frac{4h}{L^2}\right)^2 \left(Lx - x^2\right)^2 dx = \frac{8h^2L}{15}$$

سپس از معادله ۱۶-۱۵ و معادله‌های (ب) و (پ) داریم:

$$R_1 = \frac{15}{8h^2L}\left[\int_0^a \frac{W}{L}(L-a)x\frac{4h}{L^2}\left(Lx-x^2\right)dx + \int_a^L \frac{Wa}{L}(L-a)\frac{4h}{L^2}\left(Lx-x^2\right)dx\right]$$

که می‌دهد:

$$R_1 = \frac{5Wa}{8hL^3}\left(L^3+a^3-2La^2\right) \qquad \text{ت}$$

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی باقیمانده را با بررسی تعادل استاتیکی قوس می‌توان به دست آورد. اگر در مثال ١٦-١٤ ما موقعیت بار را بر حسب دهانه قوس $a=kL$ بیان کرده بودیم معادله (ت) در مثال ١٦-١٤ به صورت زیر می‌شد:

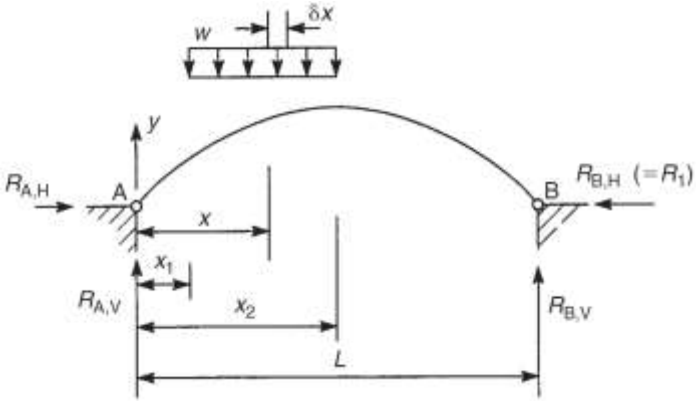
$$R_1 = \frac{5Wa}{8hL^3}\left(k+k^4-2k^3\right) \qquad \text{ث}$$

بنابراین برای مجموعه‌ای از بارهای متمرکز قرار گرفته در فاصله های k_1L, k_2L, K_3L و غیره از A، عکس‌العمل R_1 را با استفاده از معادله ١٦-١٦ می‌توان برای هر بار اثرکننده به صورت جداگانه به دست آورد و عکس‌العمل نهایی ناشی از تمام بارها را می‌توان با جمع آثار قوا به دست آورد. نتیجه نشان داده شده در معادله ١٦-١٦ را می‌توان برای تعیین عکس‌العمل R_1 ناشی از بار گسترده یکنواخت در بخشی از دهانه استفاده کرد. قوس شکل ١٦-٣٠ را در نظر بگیرید. پروفیل قوس سهموی است و گشتاور دوم سطح طبق پنداشت سکانت تغییر می‌کند. طول المانی δ_x بار، تولید بار $w\delta_x$ بر روی قوس می‌کند. بنابراین از آنجایی که بسیار کوچک است ما می‌توانیم این بار را به صورت متمرکز فرض کنیم. بدین ترتیب تولید نموی به اندازه δR_1 در عکس‌العمل افقی تکیه‌گاه می‌کند که از معادله ١٦-١٦ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\delta R_1 = \frac{5}{8}w\delta x\frac{L}{h}\left(k+k^4-2k^3\right)$$

که در آن $k=x/L$. بنابراین با جایگذاری k در عبارت δR_1 و سپس انتگرال گیری در طول بار به دست خواهیم آورد:

$$R_1 = \frac{5wL}{8h}\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{x}{L}+\frac{x^4}{L^4}-\frac{2x^3}{L^3}\right)dx$$



شکل۱۶-۳۰ قوس سهموی حمل کننده بار گسترده یکنواخت در بخشی از دهانه

که می‌دهد:

$$R_1 = \frac{5wL}{8h}\left[\frac{x^2}{2L} + \frac{x^5}{5L^4} - \frac{x^4}{2L^3}\right]_{x_1}^{x_2}$$

برای بار گسترده یکنواخت پوشش دهنده کل دهانه، یعنی $x_1=0$ و $x_2=L$ خواهیم داشت:

$$R_1 = \frac{5wL}{8h}\left(\frac{L^2}{2L} + \frac{L^5}{5L^4} - \frac{L^4}{2L^3}\right) = \frac{wL^2}{8h}$$

گشتاور خمشی در هر نقطه (x,y) در قوس برابر است با:

$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL^2}{8h}\left[\frac{4h}{L^2}\left(Lx - x^2\right)\right]$$

یعنی:

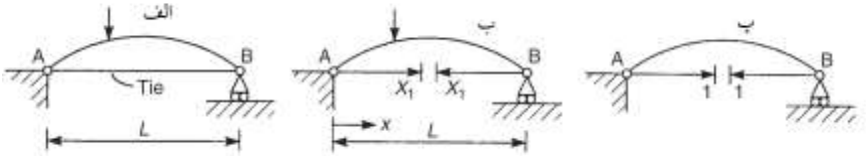
$$M = \frac{wL}{2}x - \frac{wx^2}{2} - \frac{wL}{2}x + \frac{wx^2}{2} = 0$$

بنابراین برای قوس دو مفصلی سهموی حمل کننده بار گسترده یکنواخت در تمام دهانه‌اش، گشتاور خمشی در قوس در همه جایش برابر صفر است. نتیجه مشابهی نیز برای قوس سه مفصلی فصل ٦ به دست آمد. هرچند به نظر می‌رسد که پنداشت سکانت ساده سازی‌ای مصنوعی در راه حل قوس‌های سهموی است اما در حقیقت اختلاف زیادی را در گشتاور دوم سطح قوس‌های با دهانه بزرگ و با عمق قوس کم ایجاد نمی‌کند. بنابراین این پنداشت برای برخی موارد عملی، به ما راه حل‌هایی منطقی و دقیق می‌دهد.

قوس‌های مقید

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در برخی موارد عکس‌العمل‌های افقی تکیه‌گاه‌ها با یک قید که انتهاهای قوس را مانند شکل ١٦-٣١الف به هم متصل می‌کند، جایگزین می‌شوند. در این حالت ما نیروی محوری X_1 در قید را برای آزاد کردن انتخاب می‌کنیم. سازه اولیه با یک برش در قید مانند شکل ١٦-٣١ب می‌شود. سپس روش بار واحد مانند شکل ١٦-٣١ ج برای تعیین جابجایی افقی در B در سازه اولیه مورد استفاده قرار می گیرد.



شکل١٦-٣١ راه حل برای یک قوس دو مفصلی

تغییرمکان دارای سهم‌هایی از خمش قوس و نیروی محوری در قید است. بنابراین با نوشتار معمول خواهیم داشت:

$$\Delta_{B,H} = \int_{profile} \frac{M_0 M_1}{EI} ds + \int_0^L \frac{F_0 F_1}{EI} dx$$

$$a_{11} = \int_{profile} \frac{M_1^2}{EI} ds + \int_0^L \frac{F_1^2 L}{AE} dx$$

و شرایط سازگاری برابر خواهد بود با:

$$\Delta_{B,H} + a_{11} X_1 = 0$$

قوس‌های قطعه قطعه

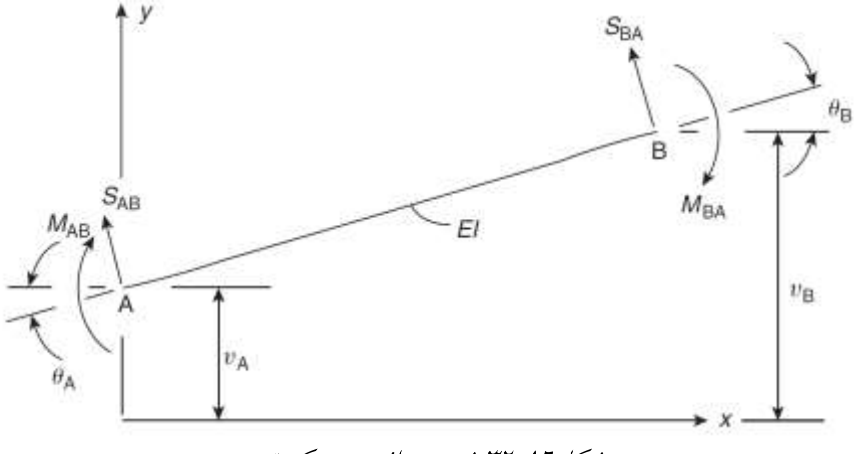
قوس قطعه قطعه قوسی است که دارای قطعاتی است که دارای انحناهای مختلف هستند یا دارای معادلات مختلفی است که پروفیل هایش را شرح می دهند. بهترین روش برای تحلیل چنین قوس‌هایی راهکارهای بر مبنای رایانه است، مانند روش سختی که در آن سختی یک قطعه منفرد را با تعیین روابط نیرو–جابجایی از طریق راهکاری بر مبنای انرژی می‌توان به دست آورد. هر چند، این چنین بررسی‌هایی از نقطه نظر این کتاب خارج هستند.

١٦-٩ روش شیب افت

در تحلیل، روابط شیب افت برای المان‌های تیر، بخشی حیاتی از روش سختی بر مبنای رایانه و روش پخش لنگر هستند. نیروهای برشی و گشتاورهای انتهایی المان تیر در اینجا به جابجایی‌ها و دورآنهای انتهاها مربوط می‌شوند. علاوه بر این، این روابط روشی را برای

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

حل فراهم می‌کنند که می‌توانیم گشتاورهای انتهایی تیرها و قاب های نامعین استاتیکی را تعیین کنیم. این روش با عنوان روش شیب افت شناخته می‌شود. تیر AB نشان داده شده در شکل ۱۶–۳۲ را در نظر بگیرید. تیر دارای صلبیت خمشی EI است و در انتهاهای خود تحت گشتاورهای M_{AB} و M_{BA} و نیروهای برشی S_{AB} و S_{BA} قرار دارد. نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی جابجایی‌های υ_A و υ_B و دورآنهای θ_A و θ_B را مانند آنچه نمایش داده شده است تولید می‌کنند. در اینجا ما با گشتاورهای انتهایی تیر طرف هستیم. علامت قراردادی محدب / مقعر دیگر برای توصیف این گشتاورها مناسب نیست زیرا یک گشتاور ساعتگرد در انتهای سمت چپ تیر با گشتاور پادساعتگرد انتهای سمت راست تشکیل یک کوپل می‌دهد و تولید گشتاور خمشی در تمام مقاطع تیر خواهد کرد.



شکل۱۶–۳۲ شیب و افت در یک تیر

بنابراین ما یک قرارداد علامت را برمی‌گزینیم، به گونه‌ای که گشتاور در یک نقطه مثبت است اگر به صورت ساعتگرد اعمال شود و منفی است اگر به صورت پادساعتگرد اعمال شود. بنابراین در شکل ۱۶–۳۲ هر دو گشتاور M_{AB} و M_{BA} مثبت هستند. حال در حل یک مسئله خاص می بینیم که چگونه‌این گشتاورها بر حسب توزیع گشتاورهای خمشی در طول تیر تفسیر می‌شوند. در تحلیل، ما از اثرات نیروهای محوری صرف نظر می‌کنیم زیرا نیروهای محوری اثر قابل چشم پوشی ای بر معادلات تعادل گشتاور دارند. همینطور، گشتاورهای M_{AB} و M_{BA} مستقل از هم دیگر هستند اما نیروهای برشی که در غیاب بارهای جانبی مساوی و مخالف هم بودند، به گشتاورهای انتهایی وابسته‌اند.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

از رابطه ١٣-٣ و شکل ١٦-٣٢ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx} = M_{AB} + S_{AB}x$$

که از آنجا:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = M_{AB}x + S_{AB}\frac{x^2}{2} + C_1 \qquad (١٦-١٧)$$

و:

$$EI\upsilon = M_{AB}\frac{x^2}{2} + S_{AB}\frac{x^3}{6} + C_1x + C_2 \qquad (١٦-١٨)$$

هنگامی که:

$$x = 0 \qquad \frac{d\upsilon}{dx} = \theta_A \qquad \upsilon = \upsilon_A$$

بنابراین از معادله ١٦-١٧ داریم $C_1=EI\theta_A$ و از معادله ١٦-١٨ داریم $C_2=EI\upsilon_A$. بدین ترتیب معادله‌های ١٦-١٧ و ١٦-١٨ به ترتیب به صورت زیر می‌شوند:

$$EI\frac{d\upsilon}{dx} = M_{AB}x + S_{AB}\frac{x^2}{2} + EI\theta_A \qquad (١٦-١٩)$$

و:

$$EI\upsilon = M_{AB}\frac{x^2}{2} + S_{AB}\frac{x^3}{6} + EI\theta_A x + EI\upsilon_A \qquad (١٦-٢٠)$$

همینطور در $x=L$ مقادیر $d\upsilon/dx=\theta_B$ و $\upsilon_B=\upsilon$ است. بنابراین از معادله‌های ١٦-١٩ و ١٦-٢٠ داریم:

$$EI\theta_B = M_{AB}L + S_{AB}\frac{L^2}{2} + EI\theta_A \qquad (١٦-٢١)$$

و:

$$EI\upsilon_B = M_{AB}\frac{L^2}{2} + S_{AB}\frac{L^3}{6} + EI\theta_A L + EI\upsilon_A \qquad (١٦-٢٢)$$

با حل معادله‌های ١٦-٢١ و ١٦-٢٢ برای M_{AB} و S_{AB} خواهیم داشت:

$$M_{AB} = -\frac{2EI}{L}\left[2\theta_A + \theta_B + \frac{3}{L}\left(\upsilon_A - \upsilon_B\right)\right] \qquad (١٦-٢٣)$$

و:

$$S_{AB} = \frac{6EI}{L^2}\left[\theta_A + \theta_B + \frac{2}{L}\left(\upsilon_A - \upsilon_B\right)\right] \qquad (١٦-٢٤)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

حال از تعادل گشتاور تیر حول B خواهیم داشت:

$$M_{BA}+S_{AB}L+M_{AB}=0$$

$$M_{BA}=-S_{AB}L-M_{AB}$$

با جایگذاری M_{AB} و S_{AB} در این عبارت، از معادله‌های ١٦-٢٤ و ١٦-٢٣ به دست خواهیم آورد:

$$M_{BA}=-\frac{2EI}{L}\left[2\theta_B+\theta_B+\frac{3}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right] \qquad (١٦\text{-}٢٥)$$

علاوه بر این، از آنجایی که S_{BA}=-S_{AB} (از تعادل عمودی المان):

$$S_{BA}=-\frac{6EI}{L^2}\left[\theta_A+\theta_B+\frac{2}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right] \qquad (١٦\text{-}٢٦)$$

معادله‌های ١٦-٢٣ تا ١٦-٢٦ معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\left.\begin{aligned}
M_{AB}&=-\frac{6EI}{L^2}\upsilon_A-\frac{4EI}{L}\theta_A+\frac{6EI}{L^2}\upsilon_B-\frac{2EI}{L}\upsilon_B\\
S_{BA}&=\frac{12EI}{L^3}\upsilon_A+\frac{6EI}{L^2}\theta_A-\frac{12EI}{L^3}\upsilon_B+\frac{6EI}{L^2}\theta_B\\
M_{BA}&=-\frac{6EI}{L^2}\upsilon_A-\frac{2EI}{L}\theta_A+\frac{6EI}{L^2}\upsilon_B-\frac{4EI}{L}\upsilon_B\\
S_{BA}&=-\frac{12EI}{L^3}\upsilon_A-\frac{6EI}{L^2}\theta_A+\frac{12EI}{L^3}\upsilon_B-\frac{6EI}{L^2}\theta_B
\end{aligned}\right\} \qquad (١٦\text{-}٢٧)$$

معادله ١٦-٢٧ به عنوان معادلات شیب افت شناخته می‌شود و روابط نیرو-جابجایی یک تیر را بر خلاف روابط جابجایی-نیرو در روش نرمی، بنا می‌نهد. ضرایبی که در معادله ١٦-٢٧ در اجزای جابجایی ضرب شده‌اند به عنوان ضرایب سختی شناخته می‌شوند. تیر شکل ١٦-٣٢ تحت بارهای جانبی نیست. واضح است که در موارد عملی، بارهای جانبی وجود دارند مگر اینکه برای ما فقط یک تکیه‌گاه نشست کننده مورد نظر باشد. بدین ترتیب با گشتاورهای جدید و نیروهای برشی در انتهاهای تیر روبرو می شویم. معادله‌های ١٦-٢٣ تا ١٦-٢٦ را می‌توان پس از آن به صورت زیر نوشت:

$$M_{AB}=-\frac{2EI}{L^2}\left[2\theta_A+\theta_B+\frac{3}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right]+M_{AB}^F \qquad (١٦\text{-}٢٨)$$

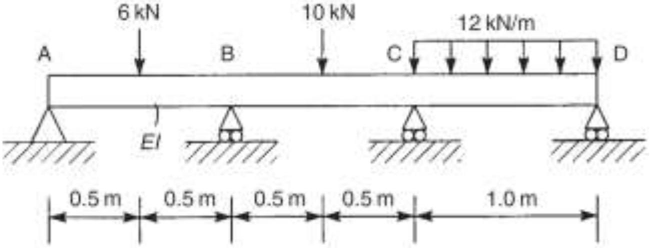
$$S_{AB}=\frac{6EI}{L^2}\left[\theta_A+\theta_B+\frac{2}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right]+S_{AB}^F \qquad (١٦\text{-}٢٩)$$

$$M_{BA}=-\frac{2EI}{L^2}\left[2\theta_B+\theta_A+\frac{3}{L}(\upsilon_A-\upsilon_B)\right]+M_{BA}^F \qquad (۳۰-۱٦)$$

$$S_{BA}=-\frac{6EI}{L^2}\left[\theta_A+\theta_B+\frac{2}{L}(\upsilon_A-\upsilon_B)\right]+S_{BA}^F \qquad (۲۸-۱٦)$$

که در آن M^F_{AB} و M^F_{BA} گشتاورهای انتهایی در انتهاهای تیر هستند که ناشی از بارهای اعمالی هستند و به $\theta_A=\theta_B=0$ و $\upsilon_B=\upsilon_A=0$ مربوط هستند. یعنی آنها آنها گشتاورهای انتهاهای گیردار شده هستند (*FEM*)، به صورت مشابهی نیروهای برشی S^F_{AB} و S^F_{BA} مربوط به انتهای گیردار شده هستند.

مثال ۱٦-۱۵) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تیر سه دهانه سرتاسری شکل ۱٦-۳۳ را بیابید.



شکل۱٦-۳۳ تیر سرتاسری مثال۱٦-۱۵

تیر شکل ۱٦-۳۳ همان تیری است که با استفاده از روش اتعطاف پذیری در مثال ۱٦-۷ حل شد، بدین ترتیب این مثال مقایسه ای را بین این دو روش انجام می‌دهد. در ابتدا ما تیر را به صورت سه قطعه تک تک گیردار *AB*، *BC* و *CD* مورد بررسی قرار می دهیم و مقادیر *FEM* های M^F_{AB}، M^F_{BA}، M^F_{BC} و غیره را محاسبه می‌کنیم. بنابراین با استفاده از نتایج مثال‌های ۱۳-۲۰ و ۱۳-۲۲ و به یاد داشتن اینکه گشتاورهای ساعتگرد مثبت هستند و گشتاورهای پاد ساعتگرد منفی هستند داریم:

$$M_{AB}^F=-M_{BA}^F=-\frac{6\times1.0}{8}=-0.75kN.m$$

$$M_{BC}^F=-M_{CB}^F=-\frac{10\times1.0}{8}=-1.25kN.m$$

$$M_{CD}^F=-M_{DC}^F=-\frac{12\times1.0^2}{12}=-1.0kN.m$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در تیر شکل ۱۶–۳۳ جابجایی‌های عمودی در تمام تکیه‌گاه‌ها برابر صفر است. یعنی υ_A، υ_B، υ_C و υ_D صفر هستند. بنابراین از معادله‌های ۱۶–۲۸ و ۱۶–۳۰ خواهیم داشت:

$$M_{AB} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_A + \theta_B\right) - 0.75$$ الف

$$M_{BA} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_B + \theta_A\right) + 0.75$$ ب

$$M_{BC} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_B + \theta_C\right) - 1.25$$ پ

$$M_{CB} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_C + \theta_B\right) + 1.25$$ ت

$$M_{CD} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_C + \theta_D\right) - 1.0$$ ث

$$M_{DC} = -\frac{2EI}{1.0}\left(2\theta_D + \theta_C\right) + 1.0$$ ج

از تعادل گشتاورها در تکیه‌گاه‌ها داریم:

$$M_{AB} = 0$$

$$M_{BA} + M_{BC} = 0$$

$$M_{CB} + M_{CD} = 0$$

$$M_{DC} = 0$$

با جایگذاری M_{AB} و غیره در معادله‌های ۱ تا ٦ در این عبارات به دست خواهیم آورد:

$$4EI\theta_A + 2EI\theta_B + 0.75 = 0$$ ح

$$2EI\theta_A + 8EI\theta_B + 2EI\theta_C + 0.5 = 0$$ خ

$$2EI\theta_B + 8EI\theta_C + 2EI\theta_D - 0.25 = 0$$ د

$$4EI\theta_D + 2EI\theta_C - 1.0 = 0$$ ذ

حل معادله‌های (ح) تا (ذ) به ما می‌دهد:

$$4EI\theta_A = -0.183$$

$$EI\theta_B = -0.008$$

$$EI\theta_C = -0.033$$

$$EI\theta_D = +0.267$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌های (الف) تا (ج) خواهیم داشت:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$M_{AB} = 0$

$M_{BA} = 1.15$

$M_{BC} = -1.15$

$M_{CB} = 1.4$

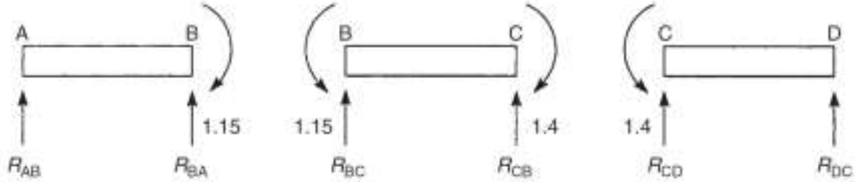
$M_{CD} = -1.4$

$M_{DC} = 0$

گشتاورهای انتهایی اثر کننده بر سه دهانه تیر، حال در شکل ۱۶-۳۴ نشان داده شده‌اند. این گشتاورها تولید عکس‌العمل‌های R_{AB},R_{BA} و غیره در تکیه‌گاه‌ها می‌کنند. بنابراین:

$$R_{AB} = -R_{BA} = -\frac{1.15}{1.0} = -1.15kN$$

$$R_{BC} = -R_{CB} = -\frac{(1.4 - 1.15)}{1.0} = -0.25kN$$



شکل۱۶-۳۴ گشتاورها و عکس‌العمل‌ها در انتهای دهانه تیر سراسری مثال۱۶-۱۵

بنابراین عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها، **فقط** ناشی از گشتاورهای انتهایی برابر هستند با:

$R_{A,M} = -1.15kN$

$R_{B,M} = 1.15 - 0.25 = 0.9kN$

$R_{C,M} = 0.25 + 1.4 = 1.65kN$

$R_{D,M} = -1.4kN$

علاوه بر این عکس‌العمل‌ها، عکس‌العمل‌های ناشی از بارگذاری واقعی نیز وجود دارند که می‌توان با تحلیل هر یک از دهانه ها به عنوان یک تیر با اتکای ساده، می‌توان آنها را به دست آورد. (اثرات گشتاور انتهایی در بالا محاسبه شد.) در این مثال با بررسی می‌توان این عکس‌العمل‌ها را به دست آورد. بنابراین:

$R_{A,S} = 3.0kN$

$R_{B,S} = 3.0 + 5 = 8kN$

$R_{C,S} = 5.0 + 6.0 = 11kN$

$R_{D,S} = 6.0kN$

سپس عکس‌العمل‌های نهایی تکیه‌گاه‌ها برابر خواهند بود با:

$R_A = R_{A,M} + R_{A,S} = -1.15 + 3.0 = 1.85kN$

$R_B = R_{B,M} + R_{B,S} = 0.9 + 0.8 = 8.9kN$

$R_C = R_{C,M} + R_{C,S} = 1.65 + 11.0 = 12.65kN$

$R_D = R_{D,M} + R_{D,S} = -1.4 + 6.0 = 4.6kN$

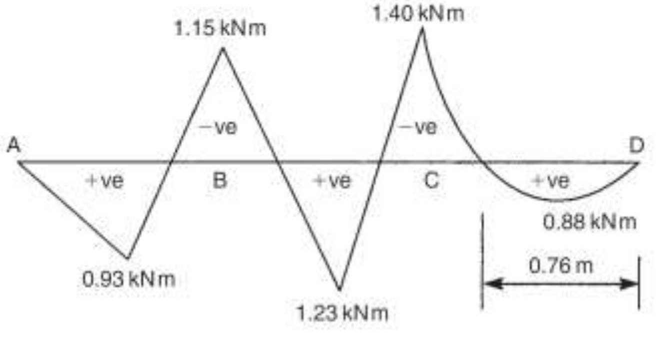
از راه دیگری می‌توانستیم این عکس‌العمل‌ها را با روندهایی نسبتاً طولانی‌تر و جایگذاری θ_A، θ_B و غیره در معادله‌های ۱۶–۲۹ و ۱۶–۳۱ به دست بیاوریم، به عنوان مثال:

$$S_{AB} = R_A = \frac{6EI}{L^2}(\theta_A + \theta_B) + 3.0 \qquad (\upsilon_A = \upsilon_B = 0)$$

که مانند قبل می‌دهد:

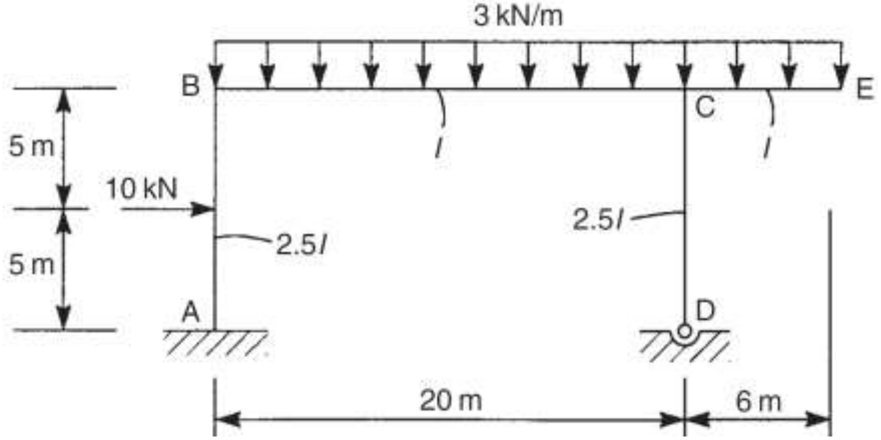
$R_A = 1.85kN$

با مقایسه راه حل بالا با مثال ۱۶–۷ می‌بینیم که اختلاف اندکی موجود است که به خاطر خطای گردکردن به وجود آمده است. با به دست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها، توزیع گشتاورهای خمشی (با بازگشت به قرارداد علامت مثبت (مقعر) و منفی (محدب) از روش‌های معمول به دست می‌آیند که در شکل ۱۶–۳۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۶–۳۵ دیاگرام گشتاور خمشی

مثال ۱۶–۱۶) گشتاورهای انتهایی را در اعضای قاب پرتال شکل ۱۶–۳۶ تعیین کنید. گشتاور دوم سطح اعضای عمودی برابر *2.5I* و برای اعضای افقی برابر *I* است.



شکل۱۶-۳۶ قاب پرتال مثال۱۶-۱۶

راهکاری که در این مسئله به کار می بریم بسیار مشابه تیر سراسری مثال ۱۶-۱۵ است. هرچند به دلیل هندسه نا متقارن قاب و اعمال بار ده کیلونیوتن، قاب انتقال خواهد داشت، به گونه‌ای که جابجایی‌های افقی υ_B و υ_C در B و C در اعضای BA و CD وجود خواهد داشت. از آنجایی که ما از جابجایی‌های ناشی از نیروهای محوری صرف نظر می‌کنیم پس $\upsilon_{B}=\upsilon_{C}=\upsilon_{1}$ در حقیقت اگر در یک تیر سراسری یک یا بیشتر از یک تکیه‌گاه دچار نشست شود ما دچار همین وضعیت می شویم. همینطور توجه داریم که دوران θ_A در A باید صفر باشد زیرا انتهای A عضو AB گیردار است. در ابتدا مانند مثال ۱۶-۱۵ ما باید FEM های اعضا (لنگرهای گیرداری) در قاب را محاسبه کنیم. با استفاده از نتایج مثال های ۱۳-۲۰ و ۱۳-۲۲، می‌دانیم که می‌توان اثر طره CE را با وارد کردن گشتاور انتهایش، در محاسبات منظور کرد. از این طریق تعداد معادلات لازم برای حل، کمتر می‌شود. بنابراین از شکل ۱۶-۳۶ داریم:

$$M_{CE}^{F}=-\frac{3\times 6^{2}}{2}=-54kN.m$$

$$M_{AB}^{F}=-M_{BA}^{F}=-\frac{10\times 10}{8}=-12.5kN.m$$

$$M_{BC}^{F}=-M_{CB}^{F}=-\frac{3\times 20^{2}}{12}=-100kN.m$$

$$M_{CD}^{F}=M_{DC}^{F}=0$$

حال از معادله‌های ۱۶-۲۸ و ۱۶-۳۰ داریم:

$$M_{AB}=-\frac{2\times2.5EI}{10}\left(\theta_A-\frac{3}{10}\upsilon_1\right)-12.5$$ الف

$$M_{BA}=\frac{2\times2.5EI}{10}\left(2\theta_B-\frac{3}{10}\upsilon_1\right)+12.5$$ ب

در معادله‌های (الف) و (ب) ما فرض کرده ایم که جابجایی υ_1 به سمت راست است. علاوه بر این:

$$M_{BC}=-\frac{2EI}{20}(2\theta_B+\theta_C)-100$$ پ

$$M_{CB}=-\frac{2EI}{20}(2\theta_C+\theta_B)+100$$ ت

$$M_{CD}=-\frac{2\times2.5EI}{10}\left(2\theta_C+\theta_D+\frac{3}{10}\upsilon_1\right)$$ ث

$$M_{DC}=-\frac{2\times2.5EI}{10}\left(2\theta_D+\theta_C+\frac{3}{10}\upsilon_1\right)$$ ج

با توجه به تعادل عضو، گشتاورهای انتهای در گره‌ها:

$$M_{BA}+M_{BC}=0$$

$$M_{CB}+M_{CD}-54=0$$

$$M_{DC}=0$$

با جایگذاری M_{BA}،M_{BC} و غیره از معادله‌های (الف) تا (ج) در معادله‌های تعادل به دست خواهیم آورد:

$$1.25EI\theta_B+0.1EI\theta_C-0.15EI\upsilon_1+87.5=0$$ ح

$$1.2EI\theta_C+0.1EI\theta_B+0.5EI\theta_C+0.15EI\upsilon_1-46=0$$ خ

$$EI\theta_D+0.5EI\theta_C+0.15\upsilon_1=0$$ د

از آنجایی که ٤ جابجایی مجهول وجود دارد ما به یک معادله بیشتر برای حل کامل نیاز داریم. این معادله با بررسی تعادل افقی کلی قاب به دست می آید. بنابراین:

$$S_{AB}+S_{DC}-10=0$$

که در آن از معادله ١٦-٢٩ داریم:

$$S_{AB}=\frac{6\times2.5EI}{10^2}\theta_B-\frac{12\times2.5EI}{10^3}\upsilon_1+5$$

که عبارت آخر سمت راست آن $S_{AB}^{F}(=+5kN)$ است. یعنی سهم بار افقی ۱۰ کیلونیوتن در S_{AB}. همینطور:

$$S_{DC}=\frac{6\times 2.5EI}{10^2}(\theta_D+\theta_C)-\frac{12\times 2.5EI}{10^3}\upsilon_1$$

با جایگذاری S_{AB} و S_{DC} در معادله‌های تعادل خواهیم داشت:

$$EI\theta_B+EI\theta_D+EI\theta_C-0.4EI\upsilon_1-33.3=0 \qquad \text{ذ}$$

با حل معادله‌های (ح) تا (ذ) به دست خواهیم آورد:

$$EI\theta_B=-101.5$$

$$EI\theta_C=+73.2$$

$$EI\theta_D=-9.8$$

$$EI\upsilon_1=-178.6$$

با جایگذاری این مقادیر در معادله‌های (الف) تا (ح) نتیجه می‌دهد:

$$M_{AB}=11.5kN.m$$

$$M_{BA}=87.2kN.m$$

$$M_{BC}=-87.2kN.m$$

$$M_{CB}=95.5kN.m$$

$$M_{CD}=-41.5kN.m$$

$$M_{DC}=0$$

$$M_{CE}=-54kN.m$$

۱۶-۱۰ پخش لنگر

مثال های ۱۶-۱۵ و ۱۶-۱۶ نشان می‌دهند که هر چه سازه پیچیده‌تر باشد، تعداد مجهولات بیشتر می‌شود و بدین ترتیب تعداد معادلات همزمانی که باید حل شوند بیشتر می‌شود. بدین ترتیب روش‌های دستی تحلیل بسیار خسته کننده می‌شوند و حتی اگر غیر عملی نیستند راهکارهای ساده‌تر بیشتر مورد علاقه هستند. یک راهکار دیگر این است که از تکنیک‌های بر مبنای رایانه بهره ببریم اما روش دستی قدرتمند دیگری نیز وجود دارد، روندی تکراری که با عنوان روش پخش لنگر شناخته می‌شود. این روش توسط پروفسور

هاردی کراس استنتاج شد و در یک مقاله در سال ۱۹۳۲ به انجمن مهندسین عمران ایالات متحده $ASCE$ ارائه شد.

اصل و اساس

تیر سه دهانه سرتاسری نشان داده شده در شکل ۱۶–۳۷الف را در نظر بگیرید. تیر بارهایی را که قبلاً دیده‌ایم حمل می‌کند و این بارها تولید $\theta_D, \theta_C, \theta_B$،$\theta_A$ در تکیه‌گاه‌ها می‌کنند. همانند آنچه در شکل ۱۶–۳۷ ب نشان داده شده است. در شکل ۱۶–۳۷ ب، θ_A و θ_C مثبت هستند (مربوط به گشتاورهای مثبت هستند.) و θ_B و θ_D منفی هستند. فرض کنید که تیر پیش از آنکه بارها اعمال شوند، در تکیه‌گاه‌ها گیردار شده است، بدین ترتیب از دوران‌ها جلوگیری شده است. پس بدین ترتیب هر دهانه یک تیر دو سرگیردار با گشتاورهایی در هر انتها می‌شود. یعنی لنگرهای گیرداری $FEMs$. با استفاده از روش نوشتار مشابهی با روش شیب افت این گشتاورها برابر هستند با:

$$M_{DC}^F, M_{AB}^F, M_{BA}^F, M_{BC}^F, M_{CB}^F, M_{CD}^F$$

حال اگر ما تیر را در تکیه‌گاه B آزاد کنیم گشتاور برآیند در B برابر است با:

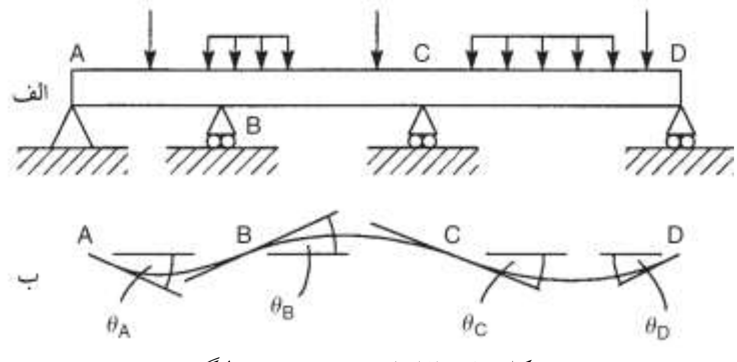
$$M_{BA}^F + M_{BC}^F$$

که تا هنگامی که تعادل بازگردد تولید دورانی در نقطه B تیر می‌کند. گشتاور برآیند در B، گشتاور خارج از تعادل B است. توجه داشته باشید که در این مرحله، دوران تیر در B مقدار θ_B نیست. در حقیقت وقتی اجازه می دهیم تیر حول یک موقعیت تعادل در B دوران کند، گشتاور متعادل کننده‌ای به اندازه زیر اعمال می‌کنیم:

$$-\left(M_{BA}^F + M_{BC}^F\right)$$

بخشی از این گشتاور متعادل کننده باعث دوران در دهانه BA خواهد شد و بخش دیگر باعث دوران در دهانه BC خواهد شد. به عبارت دیگر گشتاور متعادل کننده در B در دهانه های BA و BC پخش شده است. مقادیر مربوطه وابسته به سختی یا مقاومت در برابر دوران BA و BC هستند. این روند در لنگرهای گیرداری AوC تاثیر دارد و به همین دلیل دیگر مقادیر آنها برابر M_{AB}^F و M_{CB}^F نخواهد بود. پس از این خواهیم دید که چگونه این گشتاورها تغییر می‌کنند.

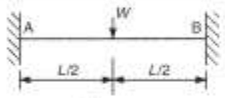
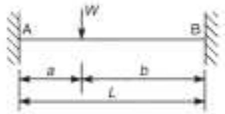
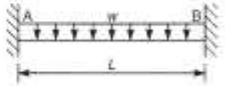
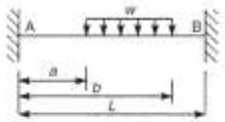
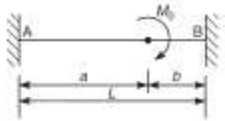
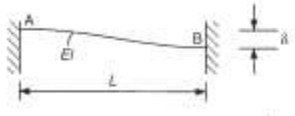
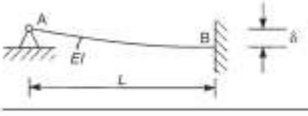
حال تیر را در وضعیت تعادل جدیدش در B گیردار می‌کنیم و تیر را در C آزاد می‌کنیم. این امر تولید گشتاور خارج از تعادل در C خواهد کرد که منجر به چرخش تیر حول موقعیت تعادل جدیدی در C می‌شود. پس از آن لنگر گیرداری *(FEM)* در D تغییر می‌کند و حال یک گشتاور خارج از تعادل در B وجود خواهد داشت. حال تیر را در C گیردار می‌کنیم و در A و D آزاد می‌کنیم، که در نتیجه گشتاورها در B و C تغییر می‌کند. بدین ترتیب تیر در موقعیتی است که در هر تکیه‌گاه گیردار شده است اما در زاویه‌هایی حول تکیه‌گاه‌ها دوران کرده است که برابر $\theta_D, \theta_C, \theta_B$،$\theta_A$ نیستند. واضح است که گشتاور خارج از تعادل در هر تکیه‌گاه به اندازه ای که در ابتدا بود بزرگ نیست زیرا دورانی رخ می‌دهد. بنابراین حالا تیر به شرایط تعادل شکل ١٦-٣٧ ب نزدیکتر است. روند گیردار کردن / آزاد کردن یا قفل کردن / آزاد کردن آنقدر تکرار می‌شود تا اختلاف بین زوایای دوران در هر تکیه‌گاه و شرایط تعادل شکل ١٦-٣٧ب به حدی کوچک شوند که قابل چشم پوشی باشند. خوشبختانه این امر پس از عملیات های قفل کردن / آزاد کردن نسبتاً کمی رخ می‌دهد. برای به کار بردن روش پخش لنگر ما به لنگرهای گیرداری در اعضای مختلف تیر یا قاب نیاز داریم. همینطور نیاز داریم تا میزان پخش گشتاور متعادل کننده در یک تکیه‌گاه به دهانه های مجاور را تعیین کنیم و نیاز داریم تا سهم گشتاور پخش شده که به هر تکیه‌گاه مجاور منتقل می‌شود را نیز تعیین کنیم. قرارداد علامتی که ما برای گشتاورهای گیرداری *FEM*ها اتخاذ می‌کنیم همانند آنهایی است که برای گشتاورهای انتهایی روش شیب افت اتخاذ کرده بودیم. بنابراین گشتاورهای ساعتگرد مثبت هستند و گشتاورهای پادساعتگرد منفی هستند.



شکل١٦-٣٧ اساس روش پخش لنگر

گشتاورهای گیرداری، لنگرهای گیرداری FEM

ما به مقادیر لنگرهای گیرداری برای گستره ای از بارگذاری ها نیازمندیم. سودمند است که لنگرهای گیرداری را برای عوامل بارگذاری مرسوم فهرست کنیم.

نوع بار	FEMs	
	M^F_{AB}	M^F_{BA}
	$-\frac{WL}{8}$	$+\frac{WL}{8}$
	$-\frac{Wab^2}{L^2}$	$+\frac{Wa^2b}{L^2}$
	$-\frac{wL^2}{12}$	$+\frac{wL^2}{12}$
	$-\frac{w}{L^2}\left[\frac{L^2}{2}(b^2-a^2)-\frac{2}{3}L(b^3-a^3)+\frac{1}{4}(b^4-a^4)\right]$	$+\frac{wb^3}{L^2}\left(\frac{L}{3}-\frac{b}{4}\right)$
	$+\frac{M_0b}{L^2}(2a-b)$	$+\frac{M_0a}{L^2}(2b-a)$
	$-\frac{6EI\delta}{L^2}$	$-\frac{6EI\delta}{L^2}$
	0	$-\frac{3EI\delta}{L^2}$

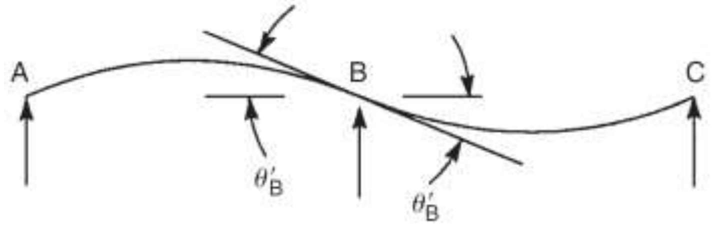
جدول۱۶-۶

بقیه لنگرهای گیرداری را از روش گشتاور – سطح می‌توان به دست آورد که در بخش ۱۳-۳ توضیح داده شده‌اند. مقادیر جدول ۱۶-۶ نتایجی هستند که از تحلیل تیرهای دوسرگیردار بخش ۱۳,۷ به دست آمده اند.

ضریب سختی

گشتاوری به نقطه‌ای در تیری وارد می‌شود و باعث دوران تیر در آن نقطه می‌شود، زاویه دوران به صورت مستقیم متناسب با گشتاور اعمالی است (معادله ۹-۱۹ را ببینید) بنابراین برای تیر AB و گشتاور M_{BA} که در انتهای B اعمال شده است:

$$M_{BA} = -K_{AB}\theta_B \qquad (۱۶-۳۲)$$



شکل۱۶-۳۸ تعیین DF یا ضریب پخش

که در آن $K_{AB}(=K_{BA})$ برابر است با سختی دورانی تیر AB. مقدار K_{AB} همانطور که خواهیم دید به شرایط تکیه‌گاهی انتهاهای تیر وابسته است. توجه داشته باشید که از شکل ۱۶-۳۲، M_{BA} مثبت، مقدار θ_B را کاهش می‌دهد.

ضریب پخش

فرض کنید که در شکل ۱۶-۳۸ گشتاور خارج از تعادل در تکیه‌گاه B تیر ABC در دهانه‌های BA و BC توزیع می‌شود که در آزاد کردن اول برابر مقدار زیر است:

$$M_B\left(=M_{BA}^F + M_{BC}^F\right)$$

که M'_{BA} را بخشی از M_B که در BA پخش می‌شود در نظر می گیریم و M'_{BC} را بخشی از M_B که در BC پخش می‌شود در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید که زاویه دوران در B ناشی از M_B برابر θ'_B است. سپس از معادله ۱۶-۲۳ داریم:

$$M'_{BA} = -K_{AB}\theta'_B \qquad (۱۶-۳۳)$$

و:

$$M'_{BC} = -K_{BC}\theta'_B \qquad (۱۶-۳۴)$$

اما:

$$M'_{BA} + M'_{BC} + M_{BA} = 0$$

توجه داشته باشید که M'_{BA} و M'_{BC} بخش‌هایی از گشتاور متعادل کننده هستند در حالیکه M_B گشتاور خارج از تعادل است. با جایگذاری M'_{BA} و M'_{BC} از معادله‌های ۱۶–۳۳ و ۱۶–۳۴ داریم:

$$-\theta'_B\left(K_{BA}+K_{BC}\right)=-M_B$$

بنابراین:

$$\theta'_B=\frac{M_B}{K_{BA}+K_{BC}} \tag{۱۶–۳۵}$$

با جایگذاری θ'_B در معادله‌های ۱۶–۳۳ و ۱۶–۳۴ از معادله ۱۶–۳۵ داریم:

$$M'_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}\left(-M_B\right) \qquad M'_{BC}=\frac{K_{BC}}{K_{BA}+K_{BC}}\left(-M_B\right) \tag{۱۶–۳۶}$$

عبارت های زیر ضرایب پخش یا DF در تکیه‌گاه B هستند:

$$\frac{K_{BA}}{\left(K_{BA}+K_{BC}\right)} \qquad \frac{K_{BC}}{\left(K_{BA}+K_{BC}\right)}$$

ضرایب سختی و ضرایب انتقال

حال ما مقادیر ضرایب سختی K و ضرایب انتقال[1] COF را برای برخی شرایط تکیه‌گاه و بارگذاری به دست می‌آوریم. این امر در حل مسایل گوناگون مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بدین منظور ما از معادله‌های شیب افت استفاده می‌کنیم. معادله ۱۶–۲۸ و ۱۶–۳۰. بنابراین برای دهانه AB تیر:

$$M_{AB}=-\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B+\frac{3}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right)$$

$$M_{BA}=-\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A+\frac{3}{L}\left(\upsilon_A-\upsilon_B\right)\right)$$

در برخی مسائل برای ما جابجایی یک انتهای دهانه تیر نسبت دیگری مورد نظر است، یعنی اثر نشست تکیه‌گاه. بنابراین برای $\upsilon_A=0$ و $\upsilon_B=\delta$ (دو مورد آخر بارگذاری در جدول ۱۶–۶) معادله‌های بالا به صورت زیر می‌شوند:

$$M_{AB}=-\frac{2EI}{L}\left(2\theta_A+\theta_B-\frac{3}{L}\delta\right) \tag{۱۶–۳۷}$$

[1] Carry Over Factor

$$M_{BA}=-\frac{2EI}{L}\left(2\theta_B+\theta_A-\frac{3}{L}\delta\right) \qquad (۱۶–۳۸)$$

با مرتب کردن دوباره معادله‌های ۱۶–۳۷ و ۱۶–۳۸ داریم:

$$2\theta_A+\theta_B-\frac{3}{L}\delta=-\frac{L}{2EI}M_{AB} \qquad (۱۶–۳۹)$$

$$2\theta_B+\theta_A-\frac{3}{L}\delta=-\frac{L}{2EI}M_{BA} \qquad (۱۶–۴۰)$$

معادله‌های ۱۶–۳۹ و ۱۶–۴۰ را می‌توان بر حسب ترکیب های مختلف از θ_A، θ_B و δ نوشت. بنابراین با تفریق معادله ۱۶–۳۹ از معادله ۱۶–۴۰ و مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\theta_B-\theta_A=-\frac{L}{2EI}\left(M_{BA}-M_{AB}\right) \qquad (۱۶–۴۱)$$

با ضرب معادله ۱۶–۳۹ در ۲ و تفریق از معادله ۱۶–۴۰ خواهیم داشت:

$$\frac{\delta}{L}-\theta_A=-\frac{L}{6EI}\left(M_{BA}-2M_{AB}\right) \qquad (۱۶–۴۲)$$

حال با حذف θ_A بین معادله‌های ۱۶–۳۹ و ۱۶–۴۰ خواهیم داشت:

$$\theta_B-\frac{\delta}{L}=-\frac{L}{6EI}\left(2M_{BA}-M_{AB}\right) \qquad (۱۶–۴۳)$$

حال از معادله‌های ۱۶–۴۱ تا ۱۶–۴۳ برای تعیین ضرایب سختی و COFها یا ضرایب انتقال، در شرایط گوناگون بارگذاری و تکیه‌گاه در A و B استفاده می‌کنیم.

مورد ۱: A گیردار شده است، B دارای اتکای ساده است، گشتاور M_{BA} در B اعمال می‌شود.

این شرایط هنگامی رخ می‌دهد که تیر در تکیه‌گاهی مانند B آزاد شده است و ما به ضریب سختی دهانه BA نیاز داریم تا بتوانیم ضریب پخش را به دست آوریم. همینطور لازم است تا سهم گشتاور M_{BA} که به تکیه‌گاه A منتقل می‌شود را نیز حساب کنیم.

در این مورد $\theta_A = \delta =$ ۰ و بنابراین از معادله ۱۶–۴۲:

$$M_{AB}=\frac{1}{2}M_{BA}$$

بنابراین نیمی از گشتاور اعمالی M_{BA} به A منتقل می‌شود و بدین ترتیب $COF=0.5$ است. (یعنی ضریب انتقال برابر یک دوم است.) حال از معادله ۱۶–۴۳ خواهیم داشت:

$$\theta_B=-\frac{L}{6EI}\left(2M_{BA}-\frac{M_{BA}}{2}\right)$$

بنابراین:

$$M_{BA}=-\frac{4EI}{L}\theta_B$$

که از آن (معادله ۱۶-۳۲ را ببینید):

$$K_{BA}=\frac{4EI}{L}\qquad(=K_{AB})$$

مورد ۲: A دارای اتکای ساده است، B دارای اتکای ساده است، گشتاور M_{BA} در B اعمال می‌شود.

این شرایط هنگامی رخ می‌دهد که ما تیر را در یک تکیه‌گاه داخلی مانند B آزاد کنیم و تکیه‌گاه مجاور A یک تکیه‌گاه خارجی است که مفصل شده است و بنابراین آزاد است تا دوران کند. در این مورد، گشتاور M_{BA} بر روی گشتاور در A که همواره صفر است تاثیری ندارد. به همین دلیل دیگر انتقالی از B به A صورت نمی گیرد.

از معادله ۱۶-۴۳:

$$\theta_B=-\frac{L}{6EI}2M_{BA}\qquad(M_{AB}=0)$$

که می‌دهد:

$$M_{AB}=-\frac{3EI}{L}\theta_B$$

بنابراین:

$$K_{BA}=\frac{3EI}{L}\qquad(=K_{AB})$$

مورد ۳: BوA دارای اتکای ساده هستند، گشتاورهای مساوی M_{BA} و $-M_{AB}$ در B و A اعمال می‌شوند.

این مورد، هنگامی که تیر متقارن است و بارگذاری نیز متقارن است و بر دهانه مرکزی وارد می‌شود، مورد استفاده قرار می گیرد. عملیات های مشابهی در هر انتهای دهانه مرکزی انجام می گیرد و انتقال گشتاوری از A به B یا از B بهA صورت نمی گیرد. همینطور $\theta_B=-\theta_A$ است و از معادله ۱۶-۴۱ داریم:

$$M_{BA}=-\frac{2EI}{L}\theta_B$$

$$K_{BA}=\frac{2EI}{L}\qquad(=K_{AB})$$

مورد ٤: A و B دارای اتکای ساده هستند، تیر به صورت نامتقارن بارگذاری می‌شود به گونه‌ای که $M_{AB}=M_{BA}$.

در این مورد تیر نامتقارن است اما بارگذاری، همچنان مانند مورد ۳ متقارن است و انتقال گشتاوری از A به B یا از B به A صورت نمی گیرد. همینطور $\theta_B=\theta_A$ است و از معادله ١٦-٤٣ داریم:

$$M_{BA}=-\frac{6EI}{L}\theta_B$$

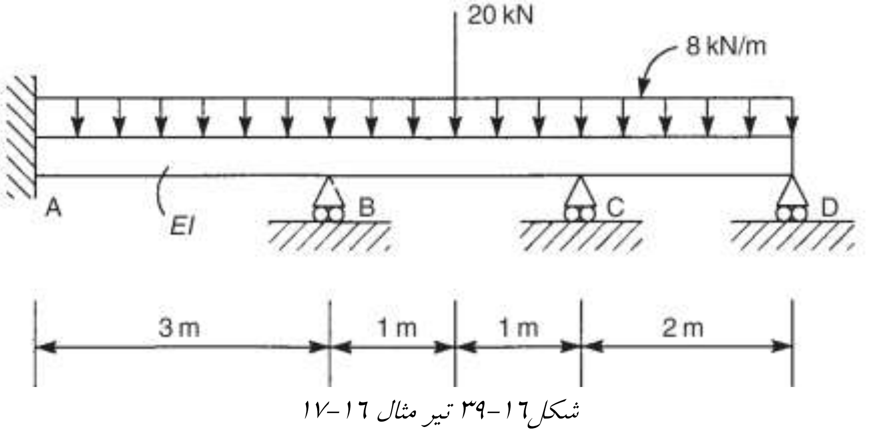
$$K_{BA}=\frac{6EI}{L}\qquad(=K_{AB})$$

حال ما در موقعیتی هستیم که می‌توانیم روش پخش لنگر را در تیرها و قاب ها به کار ببریم. توجه داشته باشید که آزاد کردن و قفل کردن‌های متوالی تکیه‌گاه‌ها، در حقیقت، به صورت همزمان در هنگام تحلیل انجام می‌شود. در ابتدا ما تیرهای سراسری را بررسی می‌کنیم.

تیرهای سراسری

مثال ١٦-١٧

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر سرتاسری $ABCD$ نشان داده شده در شکل ١٦-٣٩ تعیین کنید. صلبیت خمشی در همه جا مقدار ثابت EI است.



شکل ١٦-٣٩ تیر مثال ١٦-١٧

در ابتدا لنگرهای گیرداری هر یک از سه دهانه را با استفاده از نتایج جدول ۱۶-۶محاسبه می‌کنیم. بنابراین:

$$M_{AB}^{F} = -M_{BA}^{F} = -\frac{8\times 3^2}{12} = -6.0kN.m$$

$$M_{BC}^{F} = -M_{CB}^{F} = -\frac{8\times 2^2}{12} - \frac{20\times 2}{8} = -7.67kN.m$$

$$M_{CD}^{F} = -M_{DC}^{F} = -\frac{8\times 2^2}{12} = -2.67kN.m$$

در این مثال خاص باید به برخی ویژگی ها دقت شود، ابتدا اینکه تکیه‌گاه در A گیردار است بنابراین آزاد نخواهد شد و قفل هم نخواهد شد. به عبارت دیگر گشتاور در A همواره متعادل است (توسط تکیه‌گاه گیردار) اما هنگامی که تیر در B آزاد می‌شود و قفل می‌شود این مقدار متناوبا تغییر می‌کند. دوم اینکه تکیه‌گاه در D یک تکیه‌گاه با مفصل خارجی است بنابراین گشتاور نهایی در D باید صفر باشد. می‌توانیم میزان محاسبات را در مرحله اول با متعادل کردن تیر در D کاهش بدهیم و سپس تکیه‌گاه D را مفصلی باقی بگذاریم به گونه‌ای که انتقال گشتاوری از C به D در پخش لنگر پس از آن وجود نداشته باشد. با این وجود، ضریب سختی CD باید تغییر کند تا این امر میسر شود زیرا دهانه CD پس از آن به مورد ۲ مربوط می‌شود که در آن تیر در C آزاد شده است و آزاد است تا در D دوران کند. بنابراین:

$$K_{CD} = K_{DC} = \frac{3EI}{L}$$

تمام بقیه دهانه ها به مورد ۱ مربوط می‌شوند که در آن، هنگامی که تیر را در یک تکیه‌گاه آزاد می‌کنیم، آن تکیه‌گاه یک تکیه‌گاه مفصلی است و تکیه‌گاه مجاورش گیردار است. بنابراین برای دهانه های AB و BC، ضرایب سختی برابر $4EI/L$ و ضرایب انتقال COF برابر ۰/۵ است.

ضرایب پخش یا DF از معادله ۱۶-۳۶ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\frac{4EI}{3}}{\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{2}} = 0.4$$

$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\frac{4EI}{2}}{\frac{4EI}{3}+\frac{4EI}{2}} = 0.6$$

$$DF_{CB}=\frac{K_{CB}}{K_{CB}+K_{CD}}=\frac{\frac{4EI}{2}}{\frac{4EI}{2}+\frac{3EI}{2}}=0.57$$

$$DF_{CD}=\frac{K_{CD}}{K_{CB}+K_{CD}}=\frac{\frac{3EI}{2}}{\frac{4EI}{2}+\frac{3EI}{2}}=0.43$$

توجه داشته باشید که جمع ضرایب توزیع در یک تکیه‌گاه باید همیشه برابر ۱ باشد زیرا آن ضرایب، کسرهایی از گشتاور خارج از بالانس هستند که در دهانه های همرس در آن تکیه‌گاه پخش شده‌اند. حال راه حل ما مانند آنچه در جدول ۱۶-۷ نشان داده شده است کامل شده است. توجه داشته باشید که همگرایی سریعی در پخش لنگر وجود دارد. به عنوان یک قانون اصلی مناسب است که روند را هنگامی که گشتاورهای پخش شده ۲ درصد لنگرگیرداری های اصلی هستند متوقف کنیم. در جدول، گشتاور آخر در C در CDبرابر *-0.02* است که برابر *0.75%* لنگرگیرداری اصلی است. در حالی که گشتاور آخر در B در BC برابر *+0.05* است که *0.65%* مقدار اصلی لنگر گیرداری است. بنابراین ما می‌توانیم روند را در حداقل یک قدم جلوتر پایان بدهیم و همچنان دقت مناسب را حفظ کنیم. عکس‌العمل‌های نهایی در تکیه‌گاه‌ها با استفاده از گشتاورهای نهایی تکیه‌گاه‌ها و عکس‌العمل‌های مربوط به بارهای واقعی محاسبه می‌شوند. یعنی عکس‌العمل‌های آزاد. به صورتیکه گویا هر دهانه دارای اتکای ساده است. روندها مشابه مثال ۱۶-۱۵ خواهد بود. به عنوان مثال در جدول ۱۶-۸ عکس‌العمل‌های گشتاور نهایی در AB تشکیل یک کوپل را می‌دهند تا گشتاور ساعتگرد *7.19-5.42=1.77 kN* اثر کننده بر AB را متعادل کنند. بنابراین در A عکس‌العمل برابر است با *1.77/3=0.6 kN* که به سمت پایین اثر می‌کند، در حالیکه در B در AB، عکس‌العمل برابر *0.6 kN* به سمت بالاست. عکس‌العمل‌های گشتاور نهایی باقیمانده به طریق مشابه محاسبه می‌شوند.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

	A	B		C		D
DFs	–	0.4	0.6	0.57	0.43	1.0
FEMs	−6.0	+6.0	−7.67	+7.67	−2.67	+2.67
تعادل D						−2.67
انتقال					−1.34	
تعادل		+0.67	+1.0	−2.09	−1.58	
انتقال	+0.34		−1.05	+0.5		
تعادل		+0.42	+0.63	−0.29	−0.21	
انتقال	+0.21		−0.15	+0.32		
تعادل		+0.06	+0.09	−0.18	−0.14	
انتقال	+0.03		−0.09	+0.05		
تعادل		+0.04	+0.05	−0.03	−0.02	
گشتاور نهایی	−5.42	+7.19	−7.19	+5.95	−5.95	0

جدول۱٦-۷

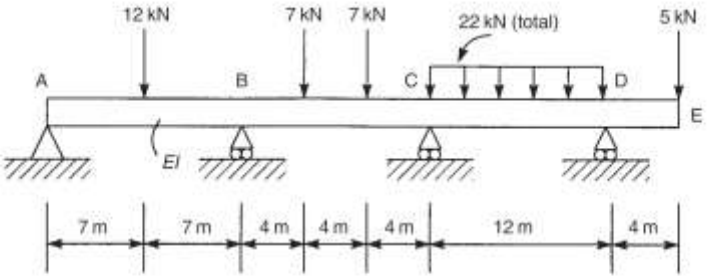
	A	B		C		D
عکس العمل های آزاد	↑12.0	12.0↑	↑18.0	18.0↑	↑8.0	8.0↑
عکس العمل های گشتاور نهایی	↓0.6	0.6↑	↑0.6	0.6↓	↑2.98	2.98↓
عکس العمل های نهایی (kN)	↑11.4	12.6↑	↑18.6	17.4↑	↑10.98	5.02↑

جدول۱٦-۸

در نهایت عکس‌العمل‌های کامل در هر یک از تکیه‌گاه‌ها برابر است با:

$$R_A = 11.4kN$$
$$R_B = 12.6 + 18.6 = 31.2kN$$
$$R_C = 17.4 + 10.98 = 28.38kN$$
$$R_D = 5.02kN$$

مثال ۱٦-۱۸) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل ۱٦-٤۰ محاسبه کنید. صلبیت خمشی در تمام تیر برابر EI است.



شکل۱٦-٤۰ تیر مثال ۱٦-۱۸

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

این مثال کمی با مثال ۱٦–۱۷ متفاوت است زیرا تکیه‌گاه گیرداری وجود ندارد و یک طره در انتهای سمت راست تیر آویزان است. بنابراین ما همان کاری را که روی تکیه‌گاه D در مثال قبل انجام دادیم بر روی تکیه‌گاه A در این مثال انجام می دهیم. اثر طره آویزان را می‌توان با مقدار گشتاور ناشی از آن یعنی $-5*4=-20kNm$ در نظر گرفت. بنابراین ما لنگرهای گیرداری $FEMs$، $M^F{}_{DE}(=-20kNm)$ و $M^F{}_{DC}$ را محاسبه می‌کنیم، تیر را در D متعادل می‌کنیم، به C منتقل می‌کنیم و سپس تیر را در D متعادل و مفصلی می‌کنیم. دوباره ضریب سختی K_{DC} تغییر می‌کند تا اجازه بدهد این امر میسر شود. (مورد ۲) دوباره لنگرهای گیرداری با استفاده از نتایج مناسب از جدول ۱٦–٦ محاسبه می‌شوند. بنابراین:

$$M^F_{AB} = -M^F_{BA} = -\frac{12\times 14}{8} = -21kN.m$$

$$M^F_{BC} = -M^F_{CB} = -\frac{7\times 4\times 8^2}{12^2} - \frac{7\times 8\times 4^2}{12^2} = -18.67kN.m$$

$$M^F_{CD} = -M^F_{DC} = -\frac{22\times 12}{12} = -22kN.m$$

$$M^F_{DE} = -5\times 4 = 20kN.m$$

ضرایب پخش به روش‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\frac{3EI}{14}}{\frac{3EI}{14}+\frac{4EI}{12}} = 0.39$$

$$DF_{BC} = 1-0.39 = 0.61$$

$$DF_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB}+K_{CD}} = \frac{\frac{4EI}{12}}{\frac{4EI}{12}+\frac{3EI}{12}} = 0.57$$

$$DF_{CD} = 1-0.57 = 0.43$$

راه حل به صورت زیر کامل می‌شود:

	A	B		C		D		E
DFs	1	0.39	0.61	0.57	0.43	1.0	0	–
FEMs	−21.0	+21.0	−18.67	+18.67	−22.0	+22.0	−20.0	0
تعادل A و D	+21.0					−2.0		
انتقال		+10.5			−1.0			
تعادل		−5.0	−7.83	+2.47	+1.86			
انتقال			+1.24	−3.92				
تعادل		−0.48	−0.76	+2.23	+1.69			
انتقال			+1.12	−0.38				
تعادل		−0.44	−0.68	+0.22	+0.16			
انتقال			+0.11	−0.34				
تعادل		−0.04	−0.07	+0.19	+0.15			
گشتاورهای نهایی	0	+25.54	−25.54	+19.14	−19.14	+20.0	−20.0	0

عکس‌العمل‌های تکیه‌گاه‌ها با روشی مشابه مثال ۱۶–۱۷ محاسبه می‌شوند و برابر هستند با:

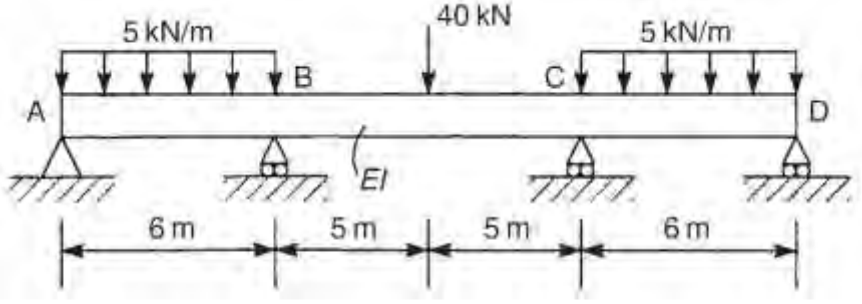
$R_A = 4.18kN$

$R_B = 15.35kN$

$R_C = 17.4kN$

$R_D = 16.07kN$

مثال ۱۶–۱۹) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر $ABCD$ شکل ۱۶–۴۱ محاسبه کنید. صلبیت خمشی در تمام تیر برابر EI است.



شکل ۱۶–۴۱ تیر متقارن مثال ۱۶–۱۹

تیر شکل ۱۶–۴۱ به صورت متقارن دارای تکیه‌گاه است و حول آکس خود به صورت متقارن بارگذاری شده است. بنابراین می‌توانیم از تقارن برای کاهش محاسبات بهره ببریم. در دهانه مرکزی یعنی BC، $M^F_{BC} = -M^F_{CB}$ و در طی پخش همینطور باقی خواهد ماند. این شرایط مربوط به مورد ۳ می‌شود، بنابراین اگر ما سختی K_{BC} در BC را به مقدار $2EI/L$ کاهش بدهیم انتقال گشتاوری از B به C (یا از C به B) وجود نخواهد داشت و می‌توانیم

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فقط نصف تیر را در نظر بگیریم. دقیقا همان کاری را با تکیه‌گاه بیرونی مفصلی در A، انجام می دهیم که با تکیه‌گاه‌های بیرونی مفصلی مثال های ۱۶–۱۷ و ۱۶–۱۸ انجام دادیم. لنگرهای گیرداری ($FEMs$) برابر هستند با:

$$M_{AB}^{F} = -M_{BA}^{F} = -\frac{5\times 6^2}{12} = -15kN.m$$

$$M_{BC}^{F} = -M_{CB}^{F} = -\frac{40\times 5}{8} = -25kN.m$$

ضرایب پخش (DFs) برابر هستند با:

$$DF_{AB} = \frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\frac{3EI}{6}}{\frac{3EI}{6}+\frac{2EI}{10}} = 0.71$$

که از آنجا خواهیم داشت:

$$DF_{BC} = 1-0.71 = 0.29$$

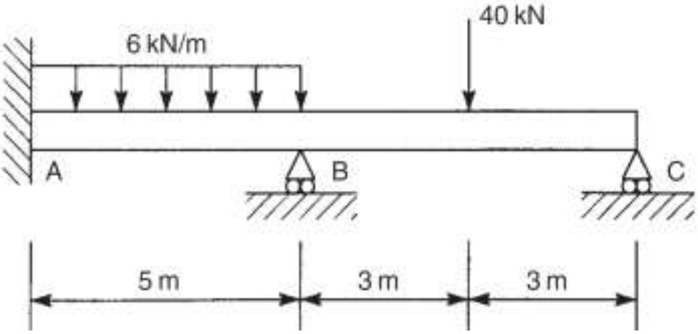
راه حل به صورت زیر کامل می‌شود:

		A	B	
DFs		1	0.71	0.29
FEMs		−15.0	+15.0	−25.0
تعادل	A	+15.0		
انتقال			+7.5	
تعادل	B		+1.78	+0.72
گشتاور نهایی		0	+24.28	−24.28

توجه داشته باشید که ما فقط یک بار احتیاج داریم تا تیر را در B متعادل کنیم. بنابراین استفاده از تقارن تیر به صورت تاثیرگذاری مقدار محاسبات را کاهش داد.

مثال ۱۶–۲۰) گشتاورهای انتهایی در تکیه‌گاه‌های تیر شکل ۱۶–۲۴ را محاسبه کنید. در شرایطی که تکیه‌گاه B دارای نشست ۱۲ میلی متر است. علاوه بر این گشتاور دوم سطح مقطع تیر $9*10^6\ mm^4$ در دهانه AB و $12*10^6\ mm^4$ در دهانه BC است، مدول یانگ E برابر $200000\ N/mm^2$ است.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



شکل۱٦-٤۲ تیر مثال۱٦-۲۰

در این مثال لنگرهای گیرداری ناشی از بارهای اعمالی با گشتاورهای افزونه تکیه‌گاه نشست کرده دچار تغییر می‌شوند. بنابراین با استفاده از جدول ۱٦-٦ داریم:

$$M^F_{AB} = -\frac{6\times 5^2}{12} - \frac{6\times 200000\times 9\times 10^6\times 12}{\left(5\times 10^3\right)^2\times 10^6} = -17.7kN.m$$

$$M^F_{BA} = +\frac{6\times 5^2}{12} - \frac{6\times 200000\times 9\times 10^6\times 12}{\left(5\times 10^3\right)^2\times 10^6} = +7.3kN.m$$

از آنجایی که تکیه‌گاه C، یک تکیه‌گاه مفصلی بیرونی است. به خاطر نشست B، اثر بر لنگرهای گیرداری در BC کاهش می یابد. (مورد آخر در جدول ۱٦-٦ را ببینید.)، بنابراین:

$$M^F_{BC} = -\frac{40\times 6}{8} + \frac{3\times 200000\times 12\times 10^6\times 12}{\left(6\times 10^3\right)^2\times 10^6} = -27.6kN.m$$

$$M^F_{CB} = +\frac{40\times 6}{8} = +30.0kN.m$$

ضرایب پخش DF برابر هستند با:

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\dfrac{3E\times 9\times 10^6}{5}}{\dfrac{3E\times 9\times 10^6}{5}+\dfrac{3E\times 12\times 10^6}{6}} = 0.55$$

که از آنجا:

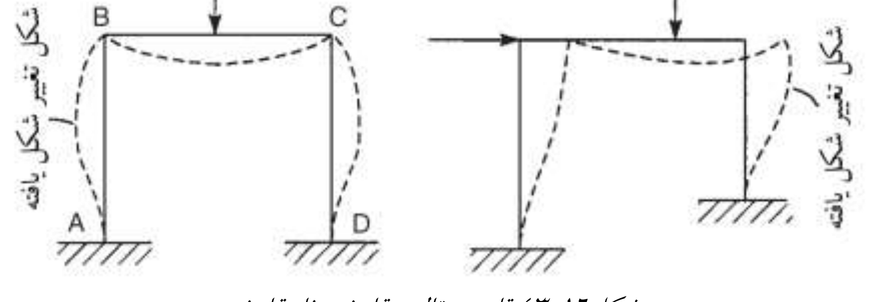
$$DF_{BC} = 1-0.55 = 0.45$$

	A	B		C
DFs	–	0.55	0.45	1.0
FEMs	−17.7	+7.3	−27.6	+30.0
تعادل C				−30.0
انتقال			−15.0	
تعادل B		+19.41	+15.89	
انتقال	+9.71			
گشتاور نهایی	−7.99	+26.71	−26.71	0

توجه داشته باشید که در این مثال، متعادل کردن تیر در B اثر مهمی در گشتاور گیردار کننده در A دارد. بنابراین ما بعد از انتقال به A، پخش را کامل می‌کنیم.

قاب های پرتال

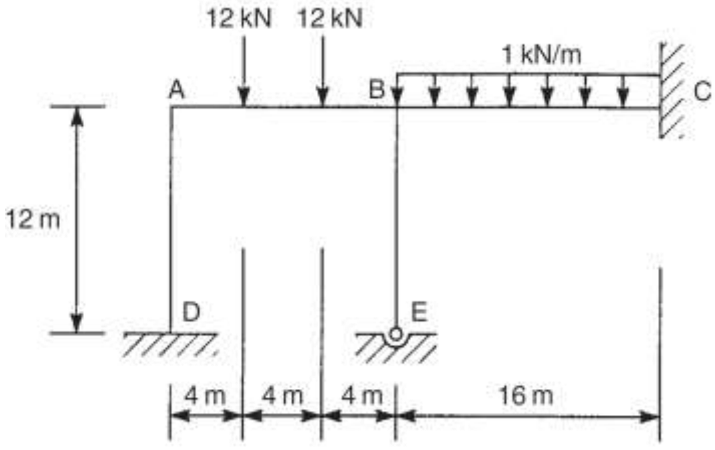
قاب های پرتال به دو دسته کاملاً متمایز تقسیم می‌شوند. دسته اول که مانند شکل ۱۶–۳۴الف هستند از نظر هندسی متقارن هستند و به صورت متقارن بارگذاری می‌شوند. در حالی که در شکل ۱۶–۳۴ ب، قاب ها نامتقارن هستند، هم به خاطر هندسه آنها، هم به خاطر بارگذاری و یا به خاطر هر دو مورد. تغییرمکان‌ها در قاب متقارن شکل ۱۶–۳۴الف به گونه‌ای هستند که گره‌ها در B و C در موقعیت های اصلی خود باقی می مانند (ما از تغییرمکان‌های محوری و برشی صرف نظر می‌کنیم و فرض می‌کنیم که اتصال ها صلب باقی می مانند به صورتیکه زاویه بین اعضای مجاور در یک اتصال بر اثر بارگذاری بدون تغییر باقی می ماند.)



شکل۱۶–۴۳ قاب پرتال متقارن و نامتقارن

در قاب نامتقارن، جابجایی‌های افزونه‌ای ناشی از انتقال جانبی وجود دارد. این انتقال های باعث گشتاورهای افزونه‌ای در انتهاهای اعضا می‌شود که باید در تحلیل در نظر گرفته شوند. در ابتدا قاب‌هایی که انتقال ندارند را مورد بررسی قرار می دهیم. تحلیل در این حالت همانند تیرهای سرتاسری است با این تفاوت که گاهی بیش از دو عضو در یک گره همرس می‌شوند.

مثال ۱۶–۲۱) دیاگرام گشتاور خمشی قاب شکل ۱۶–٤٤ را به دست آورید. برای تمام اعضا صلبیت خمشی برابر EI است.



شکل۱۶–٤٤ تیر مثال۱۶–۲۱

در این مثال تیر نامتقارن است اما انتقال توسط عضو BC که در C گیردار شده است بسته شده است. همچنین، عضو DA در D گیردار شده است و عضو EB در E مفصل شده است.

لنگرهای گیرداری $FEMs$ با استفاده از نتایج جدول ۱۶–٦ محاسبه شده‌اند و برابرند با:

$$M_{AD}^{F} = M_{DA}^{F} = 0$$

$$M_{BE}^{F} = M_{EB}^{F} = 0$$

$$M_{AB}^{F} = -M_{BA}^{F} = \frac{12\times4\times8^2}{12^2} - \frac{12\times8\times4^2}{12^2} = -32kN.m$$

$$M_{BC}^{F} = -M_{BC}^{F} = -\frac{1\times16^2}{12} = -21.3kN.m$$

از آنجایی که عضو عمودی EB در E مفصل شده است، گشتاور نهایی E برابر صفر است. بنابراین ما می‌توانیم E را به عنوان یک تکیه‌گاه مفصلی بیرونی در نظر بگیریم. E را متعادل

می‌کنیم و ضریب سختی K_{BE} را مانند قبل کاهش می دهیم. هر چند لنگر گیرداری FEMای در E وجود ندارد، بنابراین مسئله متعادل کردن E در ابتدا رخ نمی‌دهد. حال ضرایب پخش DF محاسبه می‌شوند:

$$DF_{AD} = \frac{K_{AD}}{K_{AD} + K_{AB}} = \frac{\frac{4EI}{12}}{\frac{4EI}{12} + \frac{4EI}{12}} = 0.5$$

که از آنجا:

$$DF_{AB} = 1 - 0.5 = 0.5$$

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BE}} = \frac{\frac{4EI}{12}}{\frac{4EI}{12} + \frac{3EI}{16} + \frac{3EI}{12}} = 0.4$$

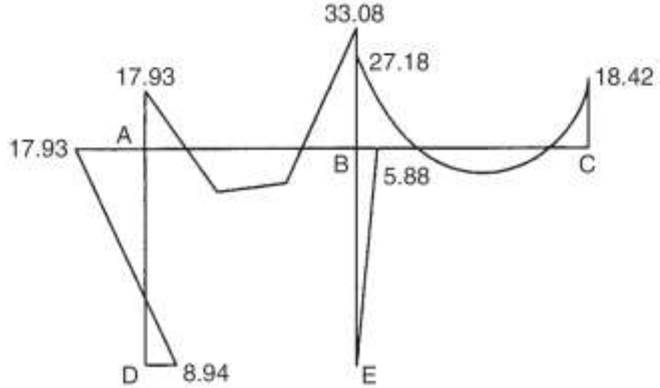
$$DF_{BC} = \frac{K_{BC}}{K_{BA} + K_{BC} + K_{BE}} = \frac{\frac{4EI}{16}}{\frac{4EI}{12} + \frac{3EI}{16} + \frac{3EI}{12}} = 0.3$$

و از آنجا خواهیم داشت:

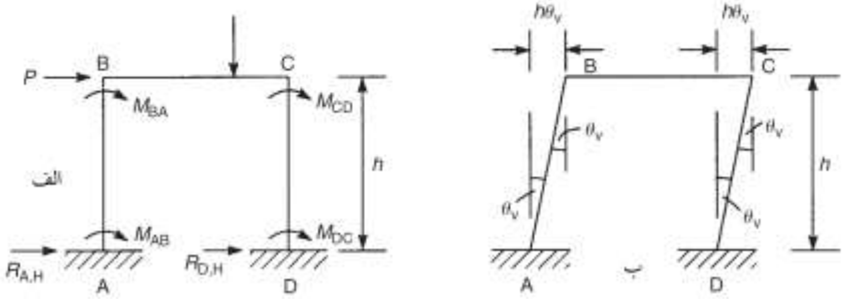
$$DF_{BE} = 1 - 0.4 - 0.3 = 0.3$$

حال، راه حل به صورت زیر کامل می‌شود:

Joint	D	A		B			C	E
Member	**DA**	**AD**	**AB**	**BA**	**BE**	**BC**	**CB**	**EB**
DFs	**–**	**0.5**	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.3**	**–**	**1.0**
FEMs	0	0	−32.0	+32.0	0	−21.3	+21.3	0
تعادل A و B		+16.0	+16.0	−4.3	−3.2	−3.2		
انتقال	+8.0		−2.15	+8.0			−1.6	
تعادل		+1.08	+1.08	−3.2	−2.4	−2.4		
انتقال	+0.54		−1.6	+0.54			−1.2	
تعادل		+0.8	+0.8	−0.22	−0.16	−0.16		
انتقال	+0.4		−0.11	+0.4			−0.08	
تعادل		+0.05	+0.06	−0.16	−0.12	−0.12		
گشتاور نهایی	+8.94	+17.93	−17.93	+33.08	−5.88	−27.18	+18.42	0



شکل۱۶-۴۵ دیاگرام گشتاور خمشی



شکل۱۶-۴۶ اثر انتقال در قاب پرتال

دیاگرام گشتاور خمشی در شکل ۱۶-۴۵ در سمت کششی هر عضو رسم شده است. توزیع گشتاور خمشی در اعضای AB و BC با اضافه شدن گشتاور گیرداری به دیاگرام گشتاور خمشی آزاد تعیین می‌شود. یعنی دیاگرام گشتاور خمشی با فرض اینکه AB و BC دارای اتکای ساده هستند به دست می آید. حال قاب‌هایی را بررسی می‌کنیم که در معرض انتقال قرار دارند. برای مثال قاب نشان داده شده در شکل ۱۶-۴۶الف، هر چند خود قاب متقارن است اما به صورت نامتقارن بارگذاری شده است و بنابراین انتقال خواهد داشت. فرض کنیم که گشتاورهای انتهایی نهایی اعضای قاب برابر M_{AB},M_{BA},M_{BC} و غیره هستند. از آنجایی که ما فرض می‌کنیم سیستم الاستیک خطی است می‌توانیم با فرض اینکه قاب انتقال ندارد گشتاورهای انتهایی ناشی از بارهای اعمالی را محاسبه کنیم و سپس گشتاورهای انتهایی ای که فقط از انتقال ناشی شده‌اند را محاسبه می‌کنیم و در نهایت این دو مورد را با هم جمع می‌کنیم، بنابراین:

$M_{AB}=M_{AB}^{NS}+M_{AB}^{S}$ $\qquad$ $M_{BA}=M_{BA}^{NS}+M_{BA}^{S}$

و به همین ترتیب. که در آنها M_{BA}^{NS} گشتاور انتهایی در A در عضو AB ناشی از بارهای اعمالی، با فرض عدم وجود انتقال است. M_{BA}^{S} گشتاور انتهایی در A در عضو AB ناشی از فقط انتقال است. همین روال برای M_{BA}، M_{BC} و غیره نیز صادق است. حال ما از اصل کار مجازی استفاده می‌کنیم (بخش ۱۵-۲) تا روابطی را بین گشتاورهای انتهایی نهایی اعضا و بارهای اعمالی بیابیم. بنابراین جابجایی کوچک مجازی ای را به قاب وارد می‌کنیم که شامل دوران θ_v اعضای AB و DC مانند آنچه در شکل ۱۶-۴۶ب می بینید نیز می‌شود. این جابجایی را نباید با انتقال قاب اشتباه گرفت، انتقال ممکن است بر اثر بارهای اعمالی مانند این جابجایی باشد یا نباشد. در شکل ۱۶-۴۶ب اعضا به عنوان لینک‌های صلب دوران می‌کنند و بدین ترتیب گشتاورهای داخلی اعضا کاری انجام نمی‌دهند. بنابراین کار مجازی نهایی فقط شامل کار مجازی خارجی است. (گشتاورهای انتهایی M_{AB},M_{BA} و غیره به صورت خارجی اعمال می‌شوند تا هر عضو قاب وصل شود.) بنابراین، از اصل کار مجازی داریم:

$$M_{AB}\theta_V+M_{BA}\theta_V+M_{CD}\theta_V+M_{DC}\theta_V+Ph\theta_V=0$$

که از آنجا:

$$M_{AB}+M_{BA}+M_{CD}+M_{DC}+Ph=0 \qquad (۱۶-۴۴)$$

توجه داشته باشید که در این مورد، عضو BC دوران نمی‌کند و بنابراین گشتاورهای انتهای M_{BC} و M_{CB} کار مجازی ای انجام نمی‌دهند. حال با جایگذاری M_{AB}، M_{BA} و غیره در معادله ۱۶-۴۴ خواهیم داشت:

$$M_{AB}^{NS}+M_{AB}^{S}+M_{BA}^{NS}+M_{BA}^{S}+M_{CD}^{NS}+M_{CD}^{S}+M_{DC}^{NS}+M_{DC}^{S}+Ph=0 \qquad (۱۶-۴۵)$$

که در آن گشتاورهای انتهایی بدون انتقال M_{AB}^{NS} و غیره با روشی مشابه قاب مثال ۱۶-۲۱ یافته می‌شوند. حال انتقالی دلخواه به قاب وارد می‌کنیم، این انتقال می‌تواند دارای هر بزرگی قراردادی ای باشد. انتقال دلخواه و گشتاورها M_{AB}^{AS} و M_{BA}^{AS} و غیره با استفاده از روش پخش لنگر محاسبه می‌شوند. البته با این تفاوت که لنگرهای گیرداری در این حالت فقط ناشی از جابجایی یک انتهای عضو نسبت به انتهای دیگر هستند. از آنجایی که سیستم، خطی است. عضو و گشتاورها به صورت مستقیم متناسب با انتقال هستند، بنابراین

گشتاورهای انتهایی مربوط به انتقال حقیقی به صورت مستقیم متناسب با گشتاورهای انتهایی ناشی از انتقال دلخواه هستند. بنابراین:

$$M_{AB}^{S} = kM_{AB}^{AS} \qquad M_{BA}^{S} = kM_{BA}^{AS}$$

و غیره. که k در آنها یک ثابت است. با جایگذاری M_{BA}^{S} و M_{AB}^{S} و غیره در معادله ۱۶-۴۵ به دست خواهیم آورد:

$$M_{AB}^{NS} + M_{BA}^{NS} + M_{CD}^{NS} + M_{DC}^{NS} + k\left(M_{AB}^{AS} + M_{BA}^{AS} + M_{CD}^{AS} + M_{DC}^{AS}\right) + Ph = 0 \qquad (۱۶-۴۶)$$

با جایگذاری مقادیر محاسبه شده M_{AB}^{AS}و M_{AB}^{AS} غیره در معادله ۱۶-۴۶، k به دست می‌آید. گشتاورهای انتقال حقیقی M_{AB}^{S} و غیره در گشتاورهای نهایی انتهایی خواهند آمد. به صورت زیر و مانند آن:

$$M_{AB}^{NS}$$

راهکار دیگر برای به دست آوردن معادله ۱۶-۴۴ این است که تعادل اعضای AB و DC را بررسی کنیم. بنابراین از شکل ۱۶-۴۶الف که در آن تعادل گشتاور عضو AB حول B را بررسی می‌کنیم خواهیم داشت:

$$R_{A,H}h - M_{AB} - M_{BA} = 0$$

که می‌دهد:

$$R_{A,H} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{h}$$

به صورت مشابه، با بررسی تعادل گشتاور DC حول C داریم:

$$R_{D,H} = \frac{M_{DC} + M_{CD}}{h}$$

حال از تعادل افقی قاب داریم:

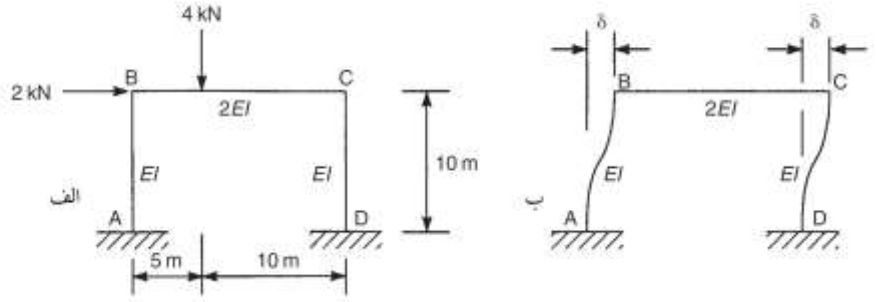
$$R_{A,H} + R_{D,H} + P = 0$$

بنابراین با جایگذاری $R_{A,H}$ و $R_{D,H}$ به دست خواهیم آورد:

$$M_{AB} + M_{BA} + M_{DC} + M_{CD} + Ph = 0$$

که معادله ۱۶-۴۴ است.

مثال ۱۶–۲۲) دیاگرام گشتاور خمشی را برای قاب پرتال شکل ۱۶–۴۷الف رسم کنید. صلبیت خمشی عضو افقی BC برابر $2EI$ است و در اعضای عمودی AB و CD این مقدار EI است.



شکل۱۶–۴۷ قاب پرتال مثال۱۶–۲۲

در ابتدا باید با فرض اینکه قاب انتقال ندارد گشتاورهای انتهایی را در اعضای آن حساب کنیم. لنگر گیرداری های مربوط با استفاده از نتایج جدول ۱۶–۶ محاسبه می‌شوند و به صورت زیر هستند:

$$M_{AB}^F = M_{BA}^F = M_{CD}^F = M_{DC}^F = 0$$

$$M_{BC}^F = -\frac{4\times 5\times 10^2}{15^2} = -8.89 kN.m$$

$$M_{CB}^F = +\frac{4\times 10\times 5^2}{15^2} = +4.44 kN.m$$

ضرایب پخش DF برابر هستند با:

$$DF_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}} = \frac{\frac{4EI}{10}}{\frac{4EI}{10}+\frac{4\times 2EI}{15}} = 0.43$$

از اینرو:

$$DF_{BC} = 1-0.43 = 0.57$$

از تقارن قاب داریم:

$DF_{CB} = 0.57$ و $DF_{CD} = 0.43$

گشتاورهای حالت بدون انتقال در جدول نشان داده شده‌اند. حال فرض می‌کنیم که قاب به اندازه دلخواه δ انتقال دارد، مانند شکل ۱۶–۴۷ب. از آنجایی که ما از اثر کرنش‌های

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

محوری صرف نظر می‌کنیم، حرکت های افقی B و C هر دو δ هستند. لنگرهای گیرداری مربوط به این انتقال طبق جدول ۱۶-۶ برابر است با:

$$M_{AB}^{F} = M_{BA}^{F} = -\frac{6EI\delta}{10^2} = M_{DC}^{F} = M_{CD}^{F}$$

$$M_{BC}^{F} = M_{CB}^{F} = 0$$

فرض کنید که:

$$\delta = \frac{100 \times 10^2}{6EI}$$

با این فرض:

$$M_{AB}^{F} = M_{BA}^{F} = M_{DC}^{F} = M_{CD}^{F} = -100\,kN.m$$

از آنجایی که ضرایب پخش توابعی از سختی اعضا هستند، ضرایب پخش اعضا مانند حالت بدون انتقال هستند. حال، ما گشتاورهای انتهای اعضا، مربوط به انتقال دلخواه را به دست می‌آوریم.

در حالت بدون انتقال جانبی

	A	B		C		D
DFs	–	0.43	0.57	0.57	0.43	–
FEMs	0	0	−8.89	+4.44	0	0
تعادل		+3.82	+5.07	−2.53	−1.91	
انتقال	+1.91		−1.26	+2.53		−0.95
تعادل		+0.54	+0.72	−1.44	−1.09	
انتقال	+0.27		−0.72	+0.36		−0.55
تعادل		+0.31	+0.41	−0.21	−0.15	
انتقال	+0.15		−0.11	+0.21		−0.08
تعادل		+0.05	+0.06	−0.12	−0.09	
انتقال	+0.03		−0.06	+0.03		−0.55
تعادل		+0.03	+0.03	−0.02	−0.01	
گشتاورهای نهایی (M^{NS})	+2.36	+4.75	−4.75	+3.25	−3.25	−1.63

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در حالت با انتقال جانبی

	A	B		C		D
DFs	–	0.43	0.57	0.57	0.43	–
FEMs	−100	−100	0	0	−100	−100
تعادل		+43	+57	+57	+43	
انتقال	+21.5		+28.5	+28.5		+21.5
تعادل		−12.3	−16.2	−16.2	−12.3	
انتقال	−6.2		−8.1	−8.1		−6.2
تعادل		+3.5	+4.6	+4.6	+3.5	
انتقال	+1.8		+2.3	+2.3		+1.8
تعادل		−1.0	−1.3	−1.3	−1.0	
گشتاورهای نهایی انتقال دلخواه (M^{AS})	−82.9	−66.8	+66.8	+66.8	−66.8	−82.9

با مقایسه قاب‌های نشان داده شده در شکل‌های ١٦–٤٧ و ١٦–٤٦ می‌بینیم که آنها مشابه هستند. بنابراین ما به صورت مستقیم می‌توانیم از معادله ١٦–٤٦ استفاده کنیم. بنابراین با جایگذاری گشتاورهای انتهایی در حالت های دارای انتقال دلخواه و بدون انتقال خواهیم داشت:

$$2.36 + 4.75 - 3.25 - 1.63 + k(-82.9 - 66.8 - 66.8 - 82.9) + 2 \times 10 = 0$$

که می‌دهد:

$$k = 0.074$$

سپس گشتاورهای انتقال برابرند با:

$$M_{AB}^{S} = kM_{AB}^{AS} = 0.074 \times (-82.9) = -6.14 kN.m$$

به صورت مشابهی:

$$M_{BA}^{S} = -4.94 kN.m$$
$$M_{BC}^{S} = 4.94 kN.m$$
$$M_{CB}^{S} = 4.94 kN.m$$
$$M_{CD}^{S} = -4.94 kN.m$$
$$M_{DC}^{S} = -6.14 kN.m$$

بدین ترتیب گشتاورهای انتهایی نهایی برابرند با:

$$M_{AB} = M_{AB}^{NS} + M_{AB}^{S} = 2.36 - 6.14 = -3.78 kN.m$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

به صورت مشابهی:

$M_{BA} = -0.19 kN.m$

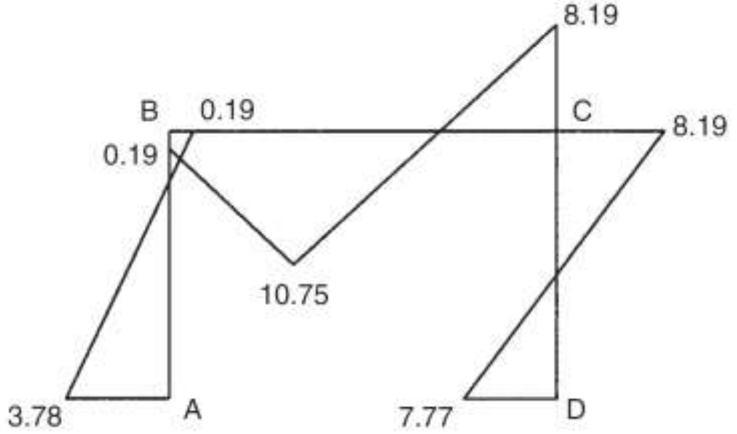
$M_{BC} = 0.19 kN.m$

$M_{CB} = 8.19 kN.m$

$M_{CD} = -8.19 kN.m$

$M_{DC} = -7.77 kN.m$

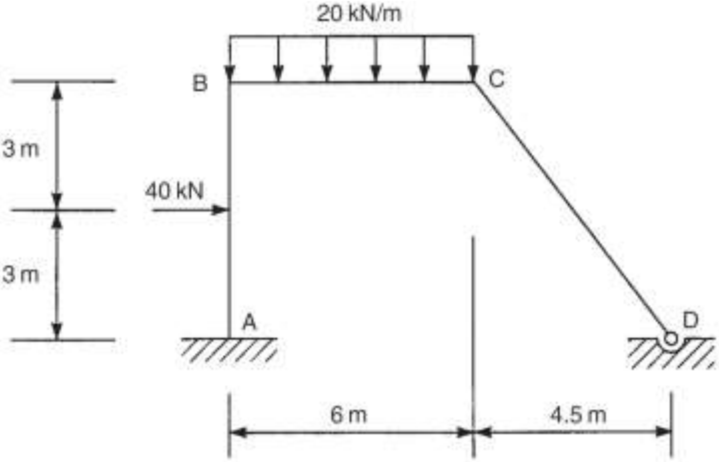
دیاگرام گشتاور خمشی در شکل ۱۶–۴۸ نشان داده شده است و در سمت کششی اعضا رسم شده است.



شکل ۱۶–۴۸ دیاگرام گشتاور خمشی قاب پرتال مثال ۱۶–۲۲

مثال ۱۶–۲۳) گشتاورهای انتهایی را در اعضای قاب شکل ۱۶–۴۹ محاسبه کنید. تمام اعضا دارای صلبیت خمشی یکسان EI هستند. توجه داشته باشید که عضو CD در نقطه D به فونداسیون مفصل شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۶-۴۹ قاب مثال۱۶-۲۳

در ابتدا، لنگرهای گیرداری ناشی از بارهای اعمالی را محاسبه می‌کنیم، بنابراین از جدول ۱۶-۶ داریم:

$$M_{BA}^{F}=-M_{AB}^{F}=-\frac{40\times 6}{8}=-30kN.m$$

$$M_{BC}^{F}=-M_{CB}^{F}=-\frac{20\times 6^{2}}{12}=-60kN.m$$

$$M_{CD}^{F}=M_{DC}^{F}=0$$

ضرایب پخش مانند قبل محاسبه می‌شوند. توجه داشته باشید که طول عضو CD برابر است با:

$$CD=\sqrt{6^{2}+4.5^{2}}=7.5m$$

$$DF_{BA}=\frac{K_{BA}}{K_{BA}+K_{BC}}=\frac{\frac{4EI}{6}}{\frac{4EI}{6}+\frac{4EI}{6}}=0.5$$

که از آنجا:

$$DF_{BC}=1-0.5=0.5$$

$$DF_{CB}=\frac{K_{CB}}{K_{CB}+K_{CD}}=\frac{\frac{4EI}{6}}{\frac{4EI}{6}+\frac{3EI}{7.5}}=0.625$$

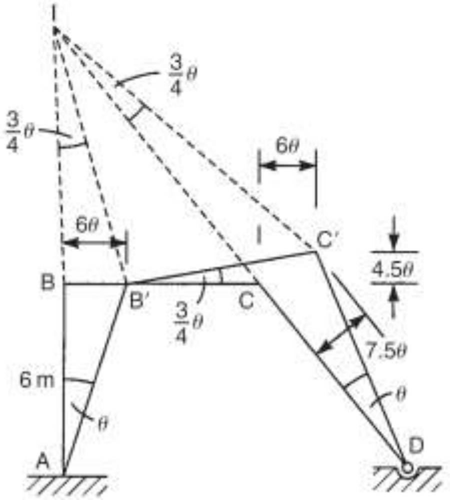
بنابراین:

$DF_{CD} = 1 - 0.625 = 0.375$

بدون انتقال جانبی

	A	B		C		D
DFs	–	0.5	0.5	0.625	0.375	1.0
FEMs	−30.0	+30.0	−60.0	+60.0	0	0
تعادل		+15.0	+15.0	−37.5	−22.5	
انتقال	+7.5		−18.8	+7.5		
تعادل		+9.4	+9.4	−4.7	−2.8	
انتقال	+4.7		−2.4	+4.7		
تعادل		+1.2	+1.2	−2.9	−1.8	
انتقال	+0.6		−1.5	+0.6		
تعادل		+0.75	+0.75	−0.38	−0.22	
گشتاور نهایی (M^{NS})	−17.2	+56.35	−56.35	+27.32	−27.32	0

بر خلاف قاب مثال ۱۶–۲۲، قاب به خودی خود در این مثال نامتقارن است. بنابراین هندسه قاب پس از اعمال یک انتقال دلخواه، دارای شکل ساده نشان داده شده در شکل ۱۶–۴۷ب نخواهد بود. علاوه بر این از آنجایی که عضو CD مایل است، انتقال دلخواه باعث جابجایی گره C نسبت به گره B خواهد شد. این امر بدان معناست که در کاربرد اصل کار مجازی، دوران مجازی عضو AB منجر به دوران عضو BC خواهد شد، بنابراین گشتاورهای انتهایی M_{BC} و M_{CB} کار انجام خواهند داد. بنابراین معادله ۱۶–۴۶ در این حالت کاربرد نخواهد داشت. در این شرایط پس از یک جابجایی مجازی دلخواه ما باید از هندسه مسئله استفاده کنیم تا جابجایی‌های نسبی گره‌ها، ناشی از انتقال دلخواه اعمال شده را به دست بیاوریم. لنگرهای گیرداری ناشی از انتقال دلخواه پس از این مرحله قابل محاسبه خواهند بود.



شکل۱۶-۵۰ انتقال دلخواه و هندسه جابجایی قاب مثال۱۶-۲۳

شکل ۱۶-۵۰ شکل تغییر شکل یافته قاب را پس از دوران θ عضو AB نشان می‌دهد. این دیاگرام همانطور که در بالا بیان شد برای به دست آوردن لنگرهای گیرداری ناشی از انتقال و همینطور برای تشکیل معادله کار مجازی مشابه معادله ۱۶-۴۶ مورد استفاده قرار می‌گیرد. سودمند است که هنگام محاسبه دورآنهای اعضای مختلف، یک مرکز آنی مانند I اختیار کنیم. این نقطه، نقطه‌ای است که حول آن مثلث IBC به عنوان یک جسم صلب به $IB'C'$ دوران می‌کند. بنابراین تمام اضلاع مثلث با زاویه یکسان دوران می‌کنند. از آنجایی که $BI=8m$ (از مثلث های متشابه AID و BIC به دست آمده است) مقدار زاویه برابر $3\theta/4$ است. پس جابجایی‌های نسبی گره‌ها به صورتی هستند که نشان داده شده است. لنگرهای گیرداری ناشی از انتقال دلخواه از جدول ۱۶-۶ و شکل ۱۶-۵۰ برابر هستند با:

$$M_{AB}^{F}=M_{BA}^{F}=-\frac{6EI(6\theta)}{6^2}=-EI\theta$$

$$M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=+\frac{6EI(4.5\theta)}{6^2}=+0.75EI\theta$$

$$M_{CD}^{F}=-\frac{3EI(7.5\theta)}{7.5^2}=-0.4EI\theta$$

اگر ما یک انتقال دلخواه مانند $EI\theta=100$ را وارد کنیم خواهیم داشت:

$$M_{AB}^{F}=M_{BA}^{F}=-100\,kN.m$$

$$M_{BC}^{F}=M_{CB}^{F}=+75kN.m$$

$M_{CD}^{F} = -40 kN.m$

حال با استفاده از اصل کار مجازی و با ارجاع به شکل ١٦-٥٠ خواهیم داشت:

$$M_{AB}\theta + M_{BA}\theta + M_{BC}\theta\left(\frac{-3\theta}{4}\right) + M_{CB}\left(\frac{-3\theta}{4}\right) + M_{CD}\theta + 40\left(\frac{6\theta}{2}\right) + 20\times 6\left(\frac{-4.5\theta}{2}\right) = 0$$

در حالت با انتقال

	A	B		C		D
DFs	–	0.5	0.5	0.625	0.375	1.0
FEMs	−100	−100	+75	+75	−40	0
تعادل		+12.5	+12.5	−21.9	−13.1	
انتقال	+6.3		−10.9	+6.3		
تعادل		+5.45	+5.45	−3.9	−2.4	
انتقال	+2.72		−1.95	+2.72		
تعادل		−0.97	+0.97	−1.7	−1.02	
انتقال	+0.49		−0.85	+0.49		
تعادل		+0.43	+0.43	−0.31	−0.18	
گشتاورهای نهایی دلخواه (M^{AS})	−90.49	−80.65	+80.65	+56.7	−56.7	

که از آنجا:

$$4(M_{AB} + M_{BA} + M_{CD}) - 3(M_{BC} + M_{CB}) - 600 = 0$$

حال با جایگزین کردن M_{AB} و غیره با $M_{AB}^{NS} + kM_{AB}^{AS}$ و غیره معادله فوق به صورت زیر خواهد شد:

$$4\left(M_{AB}^{NS} + M_{BA}^{NS} + M_{CD}^{NS}\right) - 3\left(M_{BC}^{NS} + M_{CB}^{NS}\right) + k\left[4\left(M_{AB}^{AS} + M_{BA}^{AS} + M_{CD}^{AS}\right)\right.$$
$$\left. - 3\left(M_{BC}^{AS} + M_{CB}^{AS}\right)\right] - 600 = 0$$

با جایگذاری مقادیر M_{AB}^{NS} و M_{AB}^{AS} و غیره خواهیم داشت:

$$4(-17.2 + 56.35 - 27.32) - 3(-56.35 + 27.32)$$
$$+ k[4(-90.49 - 80.65 - 56.7) - 3(80.65 + 56.7)] - 600 = 0$$

از آنجایی که $k = -0.352$ است. گشتاورهای انتهایی نهایی از رابطه زیر و مثل آن محاسبه می‌شوند و در زیر نشان داده شده‌اند:

$$M_{AB} = M_{AB}^{NS} - 0.352 M_{AB}^{AS}$$

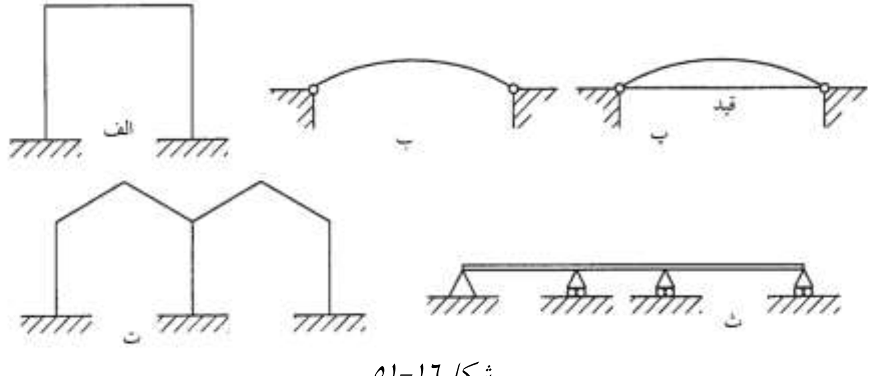
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

	AB	BA	BC	CB	CD	DC
گشتاورها در حالت عدم انتقال	−17.2	+56.4	−56.4	+27.3	−27.3	0
گشتاورها در حالت با انتقال	+31.9	+28.4	−28.4	−20.0	+20.0	0
گشتاورهای نهایی	+14.7	+84.8	−84.8	+7.3	−7.3	0

روش‌هایی که در این فصل توضیح داده شد روش‌های دستی تحلیل هستند، اما با این وجود این روش ها روش‌های اساسی و پایه‌ای برای محاسبات رایانه‌ای هستند، به خصوص روش شیب افت.

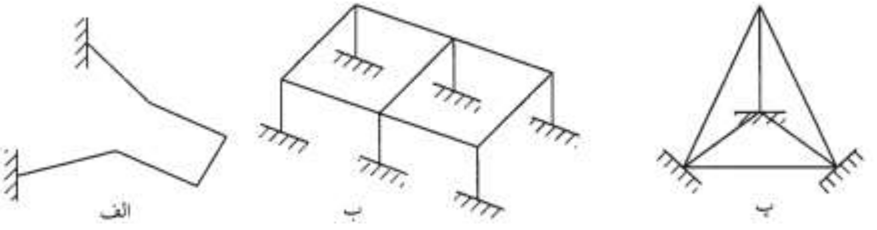
مسائل)

۱) درجات نامعینی استاتیکی و کینماتیکی سازه‌های مسطح نشان داده شده در شکل ۱۶-۵۱ را تعیین کنید.



شکل۱۶-۵۱

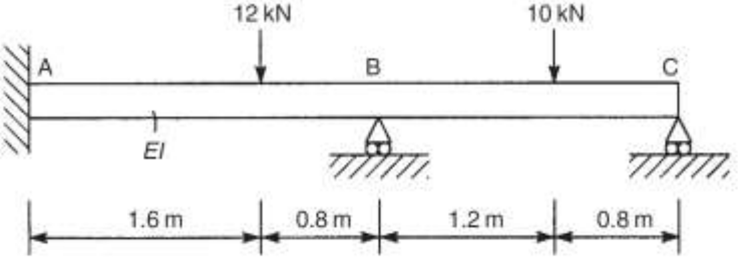
۲) درجات نامعینی استاتیکی و کینماتیکی را در قاب های فضایی شکل ۱۶-۵۲ تعیین کنید.



شکل۱۶-۵۲

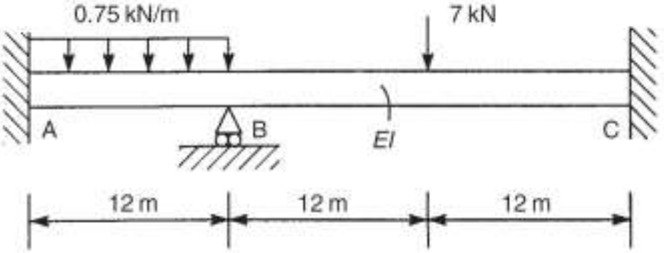
۳) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل ۱۶-۵۳ با استفاده از یکی از راهکارهای روش نرمی بیابید.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



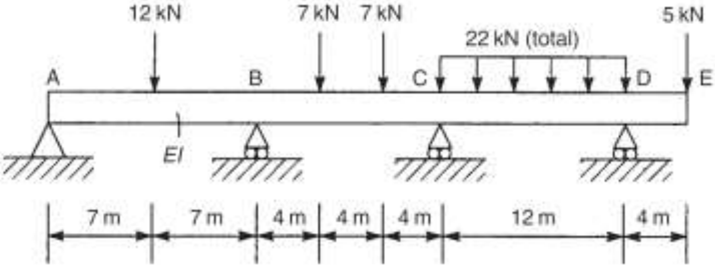
شکل ۱۶-۵۳

۴) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل ۱۶-۵۴ با استفاده از یکی از راهکارهای روش نرمی بیابید.



شکل ۱۶-۵۴

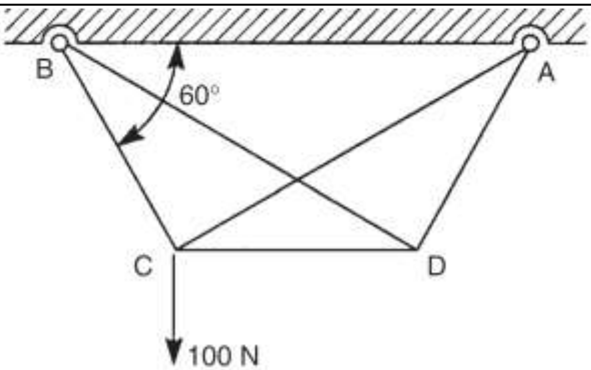
۵) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل۱۶-۵۵ با استفاده از یکی از راهکارهای روش نرمی بیابید. صلبیت خمشی EI در تمام تیر ثابت است.



شکل ۱۶-۵۵

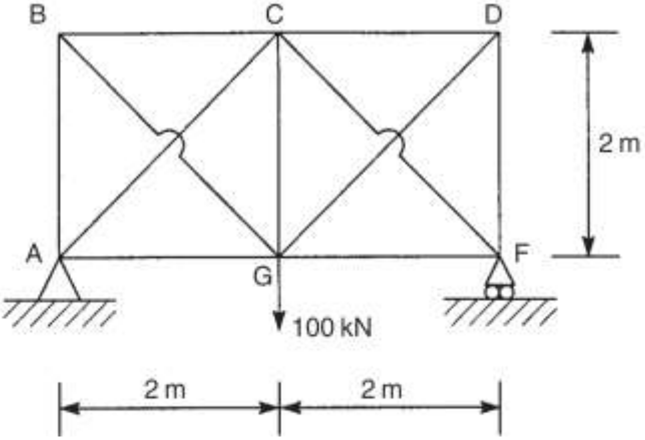
۶) نیروهای اعضای خرپای شکل ۱۶-۵۶ را محاسبه کنید. اعضای AC و BD دارای سطح مقطع ۳۰ میلی متر مربع هستند، بقیه اعضا دارای سطح مقطع ۲۰ میلی متر مربع هستند. اعضای AD,BC و DC هر کدام ۸۰۰ میلی متر طول دارند. $E=200000N/mm^2$

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com



شکل١٦-٥٦

٧) نیروهای اعضای خرپای شکل١٦-٥٧ را محاسبه کنید. مساحت سطح مقطع تمام اعضای افقی ٢٠٠ میلی متر مربع است، اعضای عمودی دارای سطح مقطع ١٠٠ میلی متر مربع هستند. اعضای قطری دارای سطح مقطع ٣٠٠ میلی متر مربع هستند. مقدار E ثابت است.

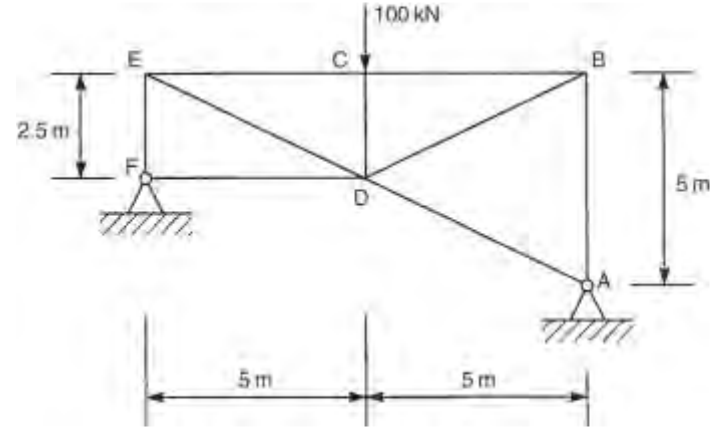


شکل١٦-٥٧

٨) نیروهای اعضای خرپای شکل١٦-٥٨ و مولفه‌های افقی و عمودی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی آن را محاسبه کنید. تمام اعضای خرپا داری سطح مقطع یکسان هستند.

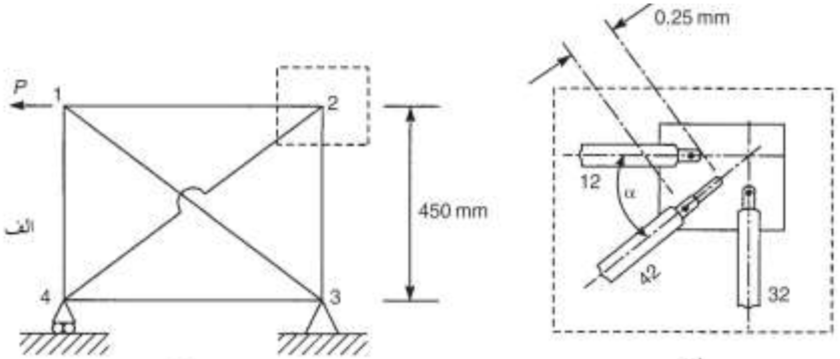
کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۶-۵۸

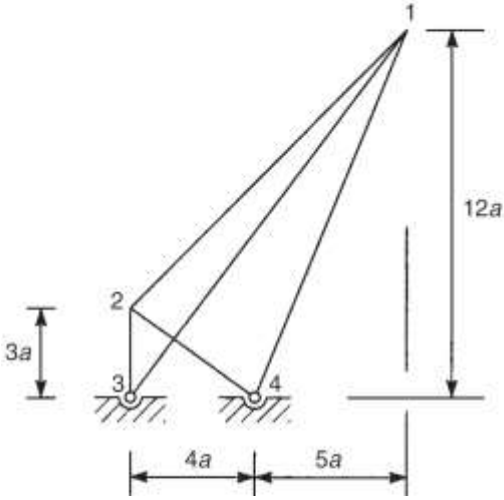
۹) خرپای مسطح شکل۱۶-۵۹الف دارای عضوی است (۴ ۲) که در گره ۲ به صورتی شل نصب شده است. بنابراین هنگامی که بارگذاری بر روی چارچوب انجام شود ممکن است حرکتی نسبی بین انتهای عضو و گره رخ دهد. بیشینه این حرکت ۰,۲۵ میلی متر است و فقط در جهت ۴ ۲ رخ می‌دهد. شکل ۱۶-۵۹ب گره ۲ را در زمانی که چارچوب بارگذاری نشده است با جزییات نشان می‌دهد. مقدار P که در آن عضو ۴ ۲ بخش مهمی از خرپا می‌شود را بیابید. همینطور بارها در تمام اعضا هنگامی که $P=10kN$ است را تعیین کنید. تمامی اعضا دارای مساحت سطح مقطع ۳۰۰ میلی متر مربع و مدول یانگ $70000N/mm^2$ هستند.



شکل۱۶-۵۹

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

۱۰) شکل۱۶-۶۰ خرپای مسطحی را نشان می‌دهد که به یک فونداسیون صلب مفصل شده است. تمامی اعضا دارای مدول یانگ $70000 N/mm^2$ و مساحت سطح مقطع یکسان A هستند، به غیر از عضو ۲ ۱ که مساحت سطح مقطعش $1.414A$ است.

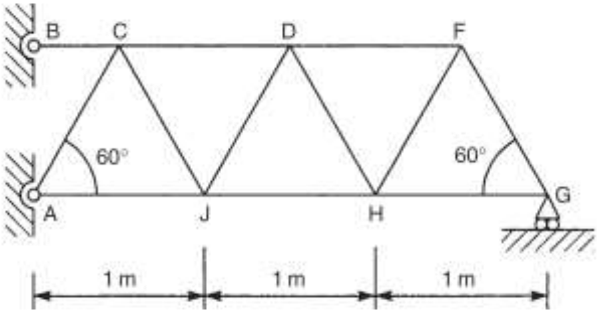


شکل۱۶-۶۰

تحت سیستم بارگذاری ای. عضو ٤ ۱ تنش کششی $0/7\ N/mm^2$ را حمل می‌کند. میزان تغییر دمایی را محاسبه کنید که اگر فقط به عضو ٤ ۱ اعمال شود باعث کاهش تنش به حدی خواهد شد که تنش در عضو صفر شود. ضریب انبساط خطی برابر است با:

$$\alpha = 2\times10^{-6}\frac{1}{C^\circ}$$

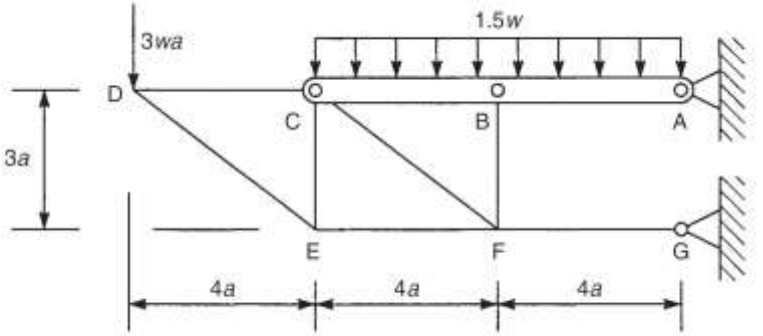
۱۱) خرپای شکل۱۶-۶۱ در نقاط A و B به فونداسیون مفصل شده است و به غلتک در G تکیه دارد. تمامی اعضای خرپا دارای صلبیت محوری $EA=2*10^9\ N$ هستند.



شکل۱۶-۶۱

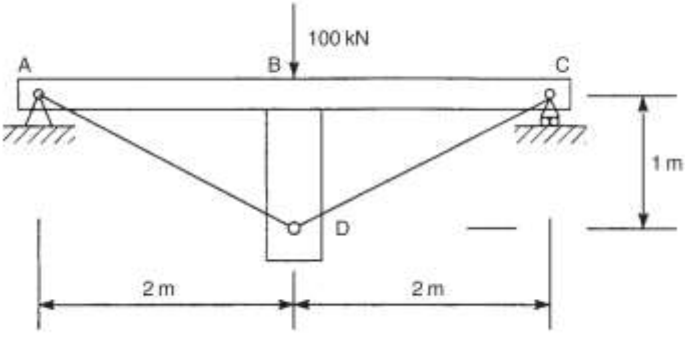
نیروها را در تمام اعضای خرپا با در نظر گرفتن نشست ۱۵ میلی متر در G محاسبه کنید.

۱۲) مساحت سطح مقطع تیر مهار بندی شده شکل١٦-٦٢ برابر $4A$ است و گشتاور دوم سطح برای خمش برابر $Aa^2/16$ است. بقیه اعضا همه دارای مساحت سطح مقطع A هستند، همه اعضا دارای مدول یانگ E هستند. جابجایی نقطه D تحت بارگذاری نشان داده شده زیر را بر حسب w,A,a,E به دست آورید.



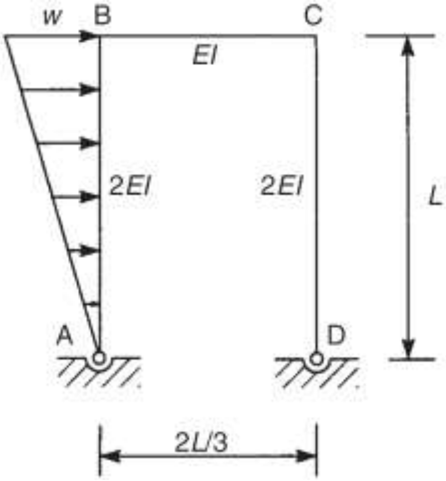
شکل١٦-٦٢

۱۳)نیرو را در عضو عمودی BD (شاه دیرک، شاه پایه) تیر خرپایی شده ABC شکل١٦-٦٣ تعیین کنید. مساحت سطح مقطع شاه پایه برابر ۲۰۰۰ میلی متر مربع است، مساحت سطح مقطع تیر برابر ۵۰۰۰ میلی متر مربع است و این مساحت برای اعضای AD و DC خرپا برابر ۲۰۰ میلی متر مربع است. گشتاور دوم سطح تیر برابر $4.2*10^6\ mm^4$ است. مدول یانگ برای تمام اعضا برابر E است.



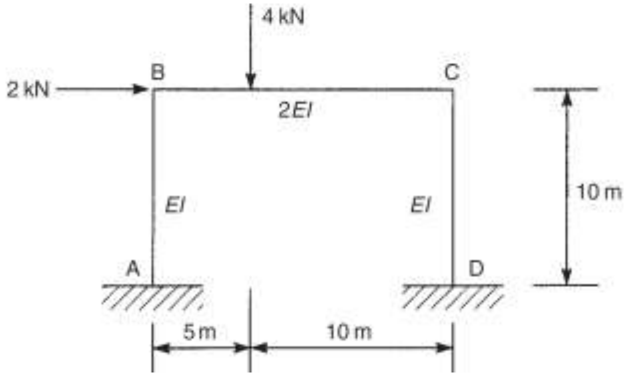
شکل١٦-٦٣

۱٤) توزیع گشتاور خمشی در قاب شکل١٦-٦٤ را تعیین کنید.



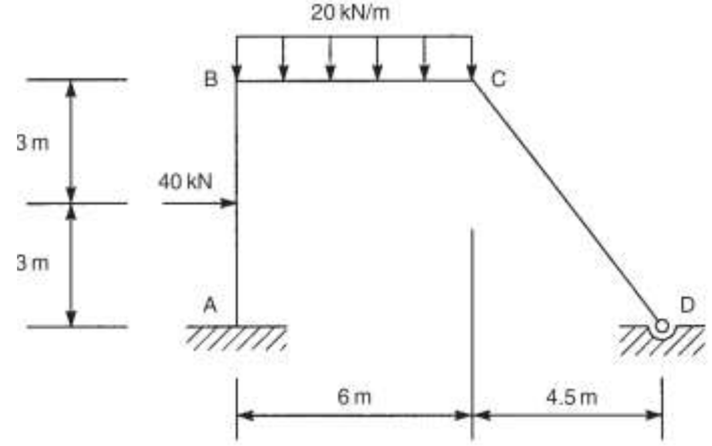
شکل۱٦-٦٤

۱۵) با استفاده از روش نرمی گشتاورهای انتهایی اعضای قاب پرتال شکل۱٦-٦۵ را تعیین کنید. صلبیت خمشی عضو افقی BC برابر $2EI$ است در حالیکه صلبیت خمشی اعضای عمودی AB و CD برابر EI است.



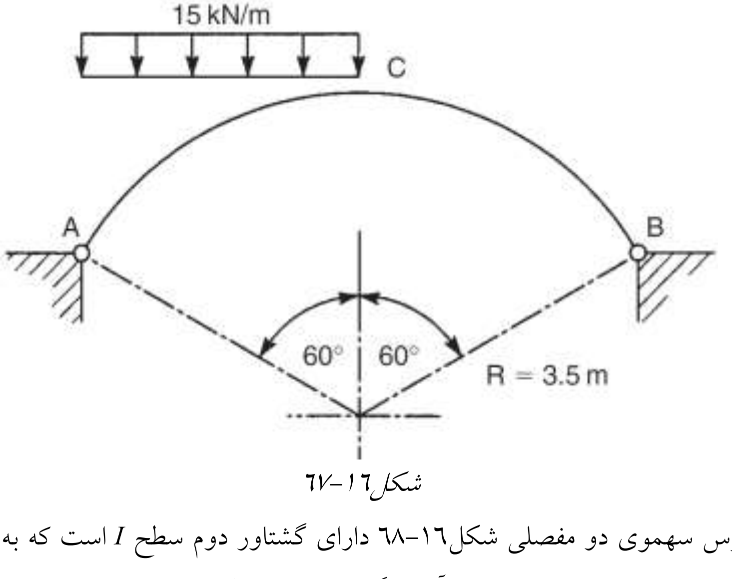
شکل۱٦-٦۵

۱٦) گشتاورهای انتهایی را در اعضای قاب شکل۱٦-٦٦ با استفاده از روش نرمی محاسبه کنید. تمامی اعضا دارای صلبیت خمشی EI هستند.



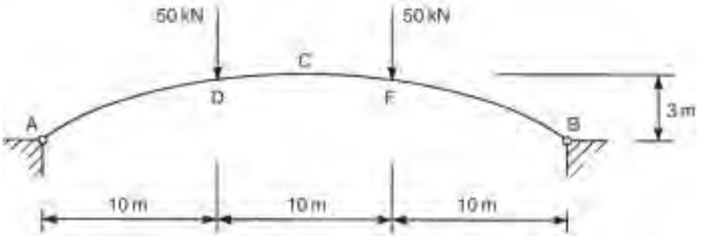
شکل۱۶-۶۶

۱۷) قوس دو مفصلی دایره‌ای شکل۱۶-۶۷ بار گسترده یکنواخت ۱۵ کیلونیوتن بر متر را در نیم دهانه AC حمل می‌کند. عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و گشتاور خمشی تاج C را محاسبه کنید.



شکل۱۶-۶۷

۱۸) قوس سهموی دو مفصلی شکل۱۶-۶۸ دارای گشتاور دوم سطح I است که به گونه‌ای تغییر می‌کند که $I=I_0 sec\theta$ است، در آن I_0 گشتاور دوم سطح در تاج قوس است و θ شیب مماس در هر نقطه است. نیروهای افقی را در تکیه‌گاه‌های قوس محاسبه کنید و گشتاور خمشی را در نقاط بارگذاری و بر روی تاج قوس محاسبه کنید.



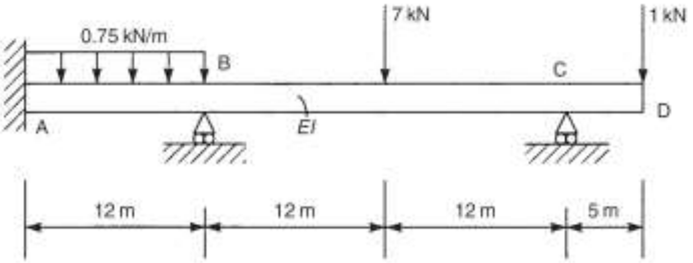
شکل۱۶-۶۸

۱۹) نشان بدهید که برای یک قوس سهموی دو مفصلی که بار گسترده یکنواخت را در تمام دهانه‌اش حمل می‌کند و گشتاور دوم سطح مقطعش طبق پنداشت سکانت تغییر می‌کند، گشتاور خمشی در تمام آن برابر صفر است.

۲۰) با استفاده از روش شیب افت مسئله های ۳ و ٤ را حل کنید.

۲۱) با استفاده از روش شیب افت گشتاورهای انتهایی اعضا را در قاب پرتال مثال ۱۶-۲۲ را به دست آورید.

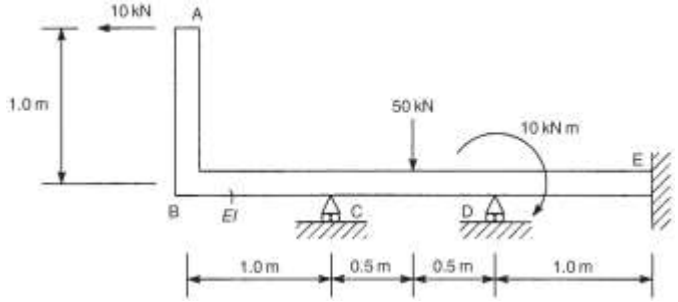
۲۲) عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر سرتاسری شکل۱۶-۶۹ را به وسیله روش پخش لنگر محاسبه کنید. صلبیت خمشی در تمام تیر برابر مقدار ثابت EI است.



شکل۱۶-۶۹

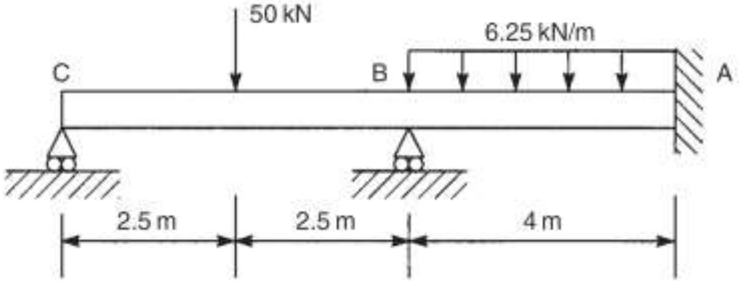
۲۳) به وسیله روش پخش لنگر، عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را در تیر شکل۱۶-۷۰ محاسبه کنید. صلبیت خمشی در تمام تیر برابر مقدار ثابت EI است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱٦-۷۰

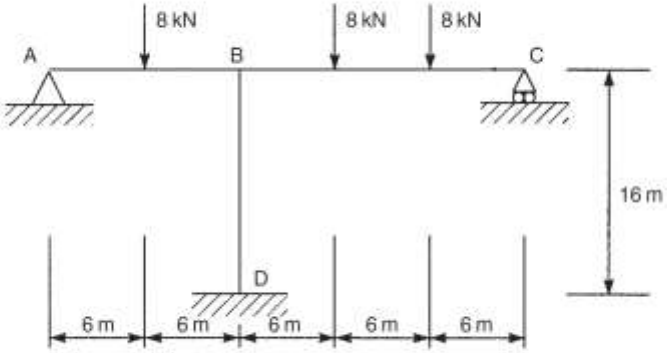
۲٤) در تیر ABC شکل۱٦-۷۱ تکیه‌گاه B هنگامی که بارها اعمال می‌شوند به اندازه ۱۰ میلی‌متر نشست می‌کند. اگر گشتاور دوم سطح دهانه های AB و BC به ترتیب برابر $83.40*10^6\ mm^4$ و $125.1*10^6\ mm^4$ باشد و مدول یانگ برای مصالح تیر $207000\ N/mm^2$ باشد عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را با استفاده از روش پخش لنگر بیابید.



شکل۱٦-۷۱

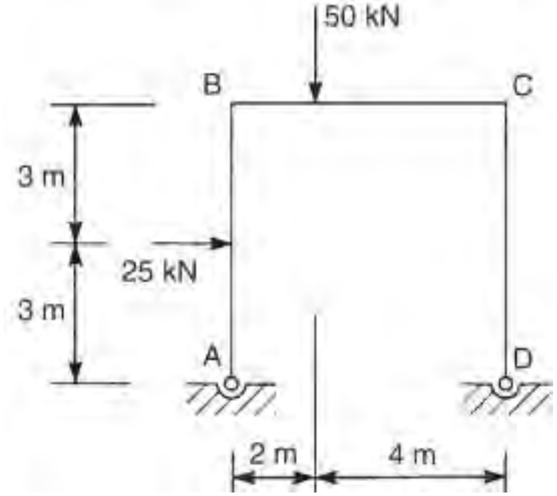
۲۵) با استفاده از روش پخش لنگر گشتاورهای انتهایی را در اعضای قاب شکل۱٦-۷۲ را محاسبه کنید. صلبیت خمشی اعضای AB,BC و BD به ترتیب برابر $2EI,3EI$ و EI است و سیستم تکیه‌گاه‌ها به گونه‌ای است که انتقال بسته شده است.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



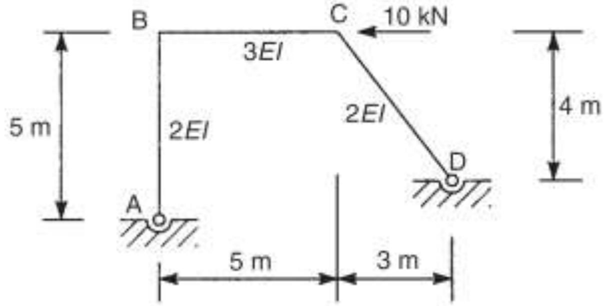
شکل۱۶-۷۲

۲۶) قاب شکل۱۶-۷۳ در A و D به فونداسیون مفصل شده است و دارای اعضایی است که صلبیت خمشی EI دارند. با استفاده از روش پخش لنگر گشتاورها را در اعضا محاسبه نمایید و دیاگرام گشتاور خمشی را رسم نمایید.



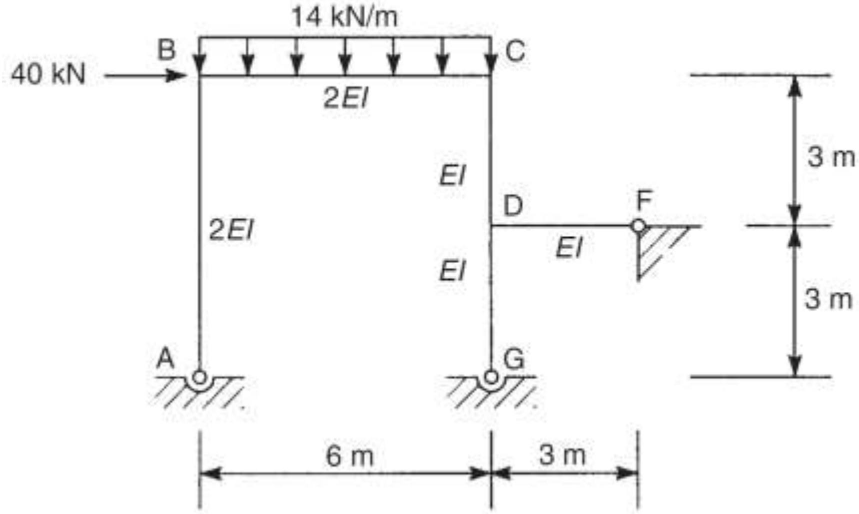
شکل۱۶-۷۳

۲۷) با استفاده از روش پخش لنگر گشتاورهای خمشی را در گره‌های قاب شکل۱۶-۷۴ محاسبه کنید و دیاگرام گشتاور خمشی را رسم نمایید.



شکل ۱۶-۷۴

۲۸) قاب شکل۱۶-۷۵ دارای اتصال های صلبی در B و C و D است و به فونداسیونش در A و G مفصل شده است. حرکت افقی در اتصال D به وسیله عضو DF که به تکیه‌گاه F مفصل شده است، بسته شده است. صلبیت خمشی اعضای AB و BC برابر $2EI$ است در حالی که برای بقیه اعضا این مقدار EI است. با استفاده از روش پخش لنگر گشتاورهای انتهایی را در اعضا محاسبه کنید.



شکل ۱۶-۷۵

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل هفدهم

روش تحلیل ماتریسی

مقدمه

روش‌های ارائه شده در فصل شانزدهم، روش‌های مناسبی برای تحلیل‌های دستی هستند. لیکن استفاده از این روش‌ها در صورتی که سازه دارای پیچیدگی باشد، بسیار وقت‌گیر است. در بین سال‌های ۱۹٤۰ تا ۱۹۵۰ روشی تحت عنوان روش ماتریسی[1] برای استفاده در کامپیوترهای پر سرعت دیجیتالی گسترش یافت. استفاده از این روش برای استفاده در تحلیل سازه‌هایی که دارای درجه نامعینی بالا هستند بسیار مناسب است. در فصل شانزدهم روش‌های نرمی و سختی[2] برای تحلیل سازه‌ها تشریح شد. در این روش‌ها معادلات نوشته شده، منجر به ایجاد دستگاه معادلاتی شده که بایستی به صورت همزمان حل شوند. استفاده از این روش معمولاً نیاز به حجم محاسباتی زیادی دارد. روش‌های ریاضی حل عددی اینگونه معادلات هر چند که شناخته شده هستند، لیکن حجم زیاد محاسبات و دقت مورد نیاز برای آنها، مشکل اساسی آنهاست. در بخش۱٦-۹ روش شیب افت[3] برای تحلیل تیر و قاب‌های نامعین ایستایی مورد بررسی قرار گرفت. همچنین مشاهده شد که این روش اساس و پایه روش پخش لنگر می‌باشد. به این روابط که جابجایی‌ها و دوران‌ها در گره‌های سازه مجهولات آن می‌باشند، روش‌های سختی با روش‌های جابجایی[4] گفته می‌شود. این نامگذاری به این دلیل است که در این روش‌ها جابجایی‌ها (شامل جابجایی انتقالی و دوران) مجهولات مسئله هستند. برای رابطه سازی روش‌های ماتریسی، می‌توان از روش‌های سازگاری و یا روش‌های تعادل استفاده نمود. این رابطه سازی هم به کمک معادلات بنیادی مکانیک سازه‌ها امکان‌پذیر است و هم می‌تواند توسط اصول انرژی انجام پذیرد.

[1] Matrix methods
[2] Flexibility and stiffness methods
[3] Slope–deflection method
[4] Displacement methods

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

موجودیت یافتن روش‌های کامپیوتری تحلیل سازه‌ها مدیون دو عامل مهمی می‌باشد که در طی دهه‌های ۱۹۵۵-۱۹۴۵ به وقوع پیوستند:

الف) نیاز روزافزون به روش های بهتر و مطلوب‌تر تحلیل سازه‌ها: طراحی‌های سازه‌ای در بسیاری از زمینه‌های مهندسی به حدی پیچیده شدند که روش‌های موجود ناکارایی خود را برای تحلیل آن سیستم‌های پیچیده به اثبات رساندند.

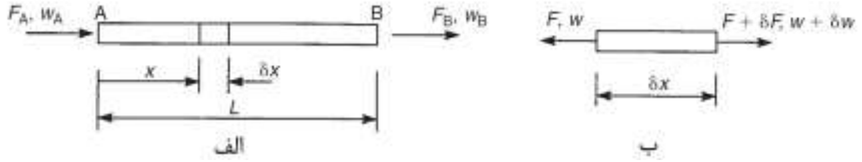
ب)پیدایش کامپیوترهای دیجیتالی (در اواخر دهه ۱۹۴۰)

- از طرف دیگر مدت‌های مدیدی بود که مفاهیم و سیستم علائم جبر ماتریسی به عنوان ابزارهای استاندارد تحلیلی در ریاضیات کاربردی مورد استفاده قرار می‌گرفتند. در سال‌های قبل از ۱۹۴۰ مقالاتی چند منتشر شدند که در آنها از مفاهیم مزبور در حل مسائل مربوط به سازه‌ها استفاده شده بود، ولی به علت عدم وجود کامپیوتر در آن زمان، این عمل از طرف مهندسین که در اثر پیدایش روش توزیع لنگر به تازگی از گرفتاری‌های محاسبات دستی کسل کننده رهایی یافته بودند، کمتر مورد استقبال قرار گرفت، زیرا احتیاج به عملیات ماتریسی زیاد و ماهرانه داشت. پیدایش کامپیوتر، معیارهای قضاوت درباره «**خوب**» یا «**بد**» بودن یک روش تحلیلی را تغییر داد. در مواجهه با یک روش تحلیلی، دیگر سئوال این نبود که «آیا این روش حجم عملیات عددی را به حداقل می‌رساند یا نه؟»، بلکه مسأله به این صورت در ذهن‌ها شکل گرفت که «آیا این روشی است که بتوان آن را به سادگی به صورت یک برنامه کامپیوتری تنظیم کرد یا خیر؟». حقیقت این است که روش‌های مبتنی بر جبر ماتریسی از این نظر در حد ایده ال هستند. روش های تحلیل ماتریسی سازه‌ها براین مفهوم بنا شده‌اند که سازه واقعی را با مدلی ریاضی، شامل اجزایی با خواص مشخص، که بتوان آنها را به فرم ماتریسی درآورد، جایگزین می‌نماییم. برای بیان روابط این بخش در ابتدا به بررسی المانی که تحت نیروی محوری قرار دارد می‌پردازیم.

۱۷-۱ المان‌های تحت نیروی محوری

عضو نشان داده شده در شکل۱۷-۱الف تحت نیروی محوری F_A، F_B بوده و جابجایی‌های دوسر آن برابر w_A و w_B می‌باشد. سطح مقطع و ضریب ارتجاعی آن به ترتیب برابر A و E می‌باشد. حال المانی به اندازه δx مطابق شکل۱۷-۱ب در نظر بگیرید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۷-۱ عضو با نیروی محوری

تغییر طول ایجاد شده در المان برابر $w+\delta w-w=\delta w$ می‌باشد. بنابراین طبق رابطه ۷-٤، کرنش ε ایجاد شده در المان به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\varepsilon=\frac{dw}{dx}$$

بعلاوه با استفاده از رابطه۷-۸ داریم:

$$\frac{F}{A}=E\frac{dw}{dx}$$

بنابراین:

$$dw=\frac{F}{AE}dx$$

همچنین جابجایی در مقطع x از A به صورت زیر خواهد بود:

$$w=\int_0^x\frac{F}{AE}dx$$

$$\Rightarrow w=\frac{F}{AE}x+C_1$$

که C_1 ثابت انتگرال‌گیری است. وقتی $x=0$ باشد، $w=w_A$ خواهد بود، بنابراین $C_1=w_A$ خواهد بود و در نتیجه مقدار w به صورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$w_B=\frac{F}{AE}x+w_A \qquad (۱-۱۷)$$

در صورتی که هیچ باری مابین A تا B اعمال نشده باشد، $F=F_B=-F_A$ خواهد بود و رابطه۱۷-۱ به صورت زیر خواهد شد:

$$w_B=\frac{F_B}{AE}x+w_A \qquad (۲-۱۷)$$

بنابراین وقتی $x=L$، $w=w_B$ خواهد بود، بنابراین با استفاده از رابطه۱۷-۲ داریم:

$$w_B=\frac{F_B}{AE}L+w_A$$

یا

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$F_B = \frac{AE}{L}\left(w_B - w_A\right) \quad (۱۷-۳)$$

بعلاوه از آنجایی که F_B=-F_A می‌باشد، با استفاده از رابطه۱۷-۳ داریم:

$$-F_A = \frac{AE}{L}\left(w_B - w_A\right)$$

یا

$$F_A = -\frac{AE}{L}\left(w_B - w_A\right) \quad (۱۷-٤)$$

روابط ۱۷-۳ و ۱۷-٤ را می‌توان به فرم ماتریسی بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & -\frac{AE}{L} \\ -\frac{AE}{L} & \frac{AE}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ w_B \end{Bmatrix}$$

یا

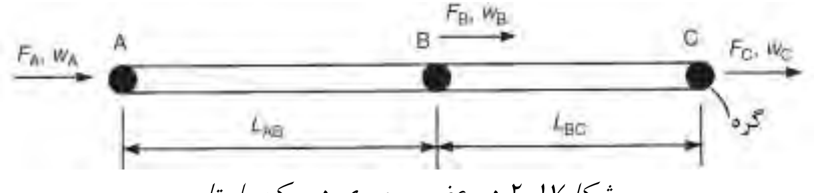
$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ w_B \end{Bmatrix} \quad (۱۷-٥)$$

رابطه ۱۷-٥ را می‌توان به فرم کلی زیر بازنویسی نمود:

$$\{F\} = [K_{AB}]\{w\} \quad (۱۷-٦)$$

که در آن $\{F\}$ نیروی تعمیم یافته[1]، $\{w\}$ ماتریس جابجایی و $[K_{AB}]$ ماتریس سختی عضو AB است.

حال فرض نمایید که دو عضو محوری AB و BC را در یک امتداد داشته باشیم و آنها توسط گره B مانند شکل۱۷-۲ به یکدیگر متصل شده باشند.



شکل۱۷-۲ دو عضو محوری در یک راستا

در شکل۱۷-۲ نیروی F_B شامل دو مولفه $F_{B,AB}$ به سبب تغییر طول میله AB و $F_{B,BC}$ به سبب تغییر طول میله BC است. بنابراین با استفاده از نتایج روابط ۱۷-۳ و ۱۷-٤ داریم:

[1] Generalized force

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$F_A = \frac{A_{AB}E_{AB}}{L_{AB}}\left(w_A - w_B\right) \qquad (۷-۱۷)$$

$$F_B = F_{B,AB} + F_{B,BC} = \frac{A_{AB}E_{AB}}{L_{AB}}\left(w_B - w_A\right) + \frac{A_{BC}E_{BC}}{L_{BC}}\left(w_B - w_C\right) \qquad (۸-۱۷)$$

$$F_C = \frac{A_{BC}E_{BC}}{L_{BC}}\left(w_C - w_B\right) \qquad (۹-۱۷)$$

که در آن A_{AB}، E_{AB} و L_{AB} به ترتیب سطح مقطع، ضریب ارتجاعی و طول عضو AB می‌باشند. به طور مشابه این پارامترها را نیز می‌توان برای عضو BC تعریف نمود. عبارت AE/L سختی محوری عضو می‌باشد و با حرف k نشان داده می‌شود. روابط۱۷-۷ تا ۱۷-۹ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود:

$$F_A = k_{AB}\left(w_A - w_B\right) \qquad (۱۰-۱۷)$$

$$F_B = -k_{AB}w_A + \left(k_{AB} + k_{BC}\right)w_B - k_{BC}w_C \qquad (۱۱-۱۷)$$

$$F_C = k_{BC}\left(w_C - w_B\right) \qquad (۱۲-۱۷)$$

روابط۱۷-۱۰ تا ۱۷-۱۲ را می‌توان به شکل ماتریسی نوشت:

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AB} & -k_{AB} & 0 \\ -k_{AB} & k_{AB}+k_{BC} & -k_{BC} \\ 0 & -k_{BC} & k_{BC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{Bmatrix} \qquad (۱۳-۱۷)$$

در رابطه۱۷-۳ ماتریس سختی به صورت یک ماتریس متقارن می‌باشد و به دلیل اینکه سه نیروی گرهی و به تبع آن سه جابجایی گره‌ای برای آن وجود دارد، به صورت یک ماتریس ۳×۳ نوشته می‌شود. همچنین در رابطه۱۷-۵ چون میله دو گره‌ای می‌باشد، به صورت یک ماتریس ۲×۲ می‌باشد. بنابراین می‌توان اینطور نتیجه گرفت که ماتریس سختی برای یک سازه‌ای که دارای n گره می‌باشد، به صورت یک ماتریس $n\times n$ خواهد بود. در بسیاری از حالات رابطه۱۷-۱۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$\left[K\right] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \qquad (۱۴-۱۷)$$

که در آن سختی k_{11} برابر است با مقدار نیروی موجود در گره ۱ نسبت به جابجایی گره ۱ می‌باشد و سختی k_{12} مقدار نیروی موجود در گره ۱ نسبت به جابجایی گره ۲ می‌باشد را نشان می‌دهد. حال برای عضوی که گره‌های ۱و۲ را به هم متصل می‌کند داریم:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$[K_{12}]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$$

و برای عضوی که گره‌های ۲و۳ را به هم متصل می‌کند داریم:

$$[K_{23}]=\begin{bmatrix} k_{22} & k_{23} \\ k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

عبارت k_{22} در هر دو ماتریس $[K_{23}]$ و $[K_{12}]$ ظاهر شده و سهمی از هر دو ماتریس دارد. با استفاده از رابطه۱۷-۵ داریم:

$$[K_{AB}]=\begin{bmatrix} k_{AB} & -k_{AB} \\ -k_{AB} & k_{AB} \end{bmatrix}$$

و

$$[K_{BC}]=\begin{bmatrix} k_{BC} & -k_{BC} \\ -k_{BC} & k_{BC} \end{bmatrix}$$

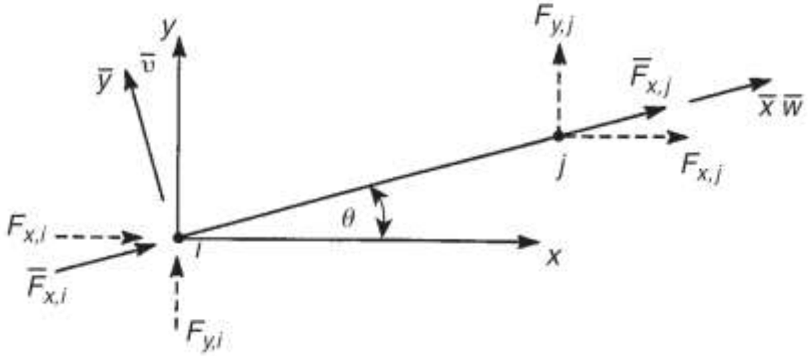
با جایگذاری این ماتریس‌ها در رابطه۱۷-۱٤ داریم:

$$[K_{ABC}]=\begin{bmatrix} k_{AB} & -k_{AB} & 0 \\ -k_{AB} & k_{AB}+k_{BC} & -k_{BC} \\ 0 & -k_{BC} & k_{BC} \end{bmatrix}$$

جمله k_{ii} در قطر اصلی شامل جمع ماتریس‌های اعضایی است که در گره I به هم متصل می‌شوند در حالی که سختی جملات غیرقطری k_{ij} برابر جمع تمام المان‌های متصل به گره‌های i و j هستند. رابطه۱۷-۱۳ را می‌توان برای شرایط مرزی مشخص حل نمود. به عنوان مثال در صورتی که عضو AB در در گره A به صورت گیردار باشد و بارهای F_B و F_C بر آن اعمال شوند. با توجه به گیرداری A، $w_A=0$ خواهد بود و F_A عکس‌العمل تکیه‌گاهی برای تکیه‌گاه A می‌باشد. در حالات عملی برخی از اعضای دو سر مفصل (خرپا) به صورت مورب می‌باشند که برای کامل نمودن ماتریس سختی می‌توان از سیستم مختصات کلی[1] استفاده نمود. با توجه به عضو نشان داده شده در شکل۱۷-۳، عضو نشان داده شده دارای زاویه θ نسبت به محورهای کلی xy می‌باشند.

[1] Global axis system

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۷-۳ موقعیت سیستم مختصات کلی برای یک عضو تحت نیروی محوری

گره‌های i و j در دو انتهای این میله قرار دارند دارند. محورهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ سیستم مختصات محلی عضو AB می‌باشند. نیروها و جابجایی‌های گرهی در مختصات محلی به ترتیب توسط $\bar{F}$ و $\bar{w}$ نشان داده شده است. بنابراین بر مبنای رابطه ۱۷-۵ می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{x,j} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{w}_j \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۱۵)$$

ماتریس سختی $\left[\bar{K}_{ij}\right]$ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود. در شکل۱۷-۳ نیروهای خارجی $\bar{F}_{x,i}$ و $\bar{F}_{x,j}$ در گره‌های i و j اعمال می‌شوند. به دلیل اینکه عضو نشان داده شده دو سر مفصل بوده (مانند عضو یک خرپا) و نیروها در محل مفصل‌ها اعمال می‌شوند، بنابراین $\bar{F}_{y,i}$ و $\bar{F}_{y,i}$برابر صفر می‌باشند. هر یک از دو نیروی $\bar{F}_{x,i}$ و $\bar{F}_{x,j}$ را می‌توان به دو مولفه $F_{x,i}$ و $F_{y,i}$ در گره i و F_{xj} و $F_{y,j}$ در گره j تجزیه نمود. در صورتی که از مختصات محلی میله استفاده نماییم دو نیروی گره‌ای و در صورتی که از مختصات کلی استفاده شود، چهار مولفه نیرو موجود می‌باشد. بنابراین در صورتی که بخواهیم مختصات محلی را به مختصات کلی منتقل نماییم، رابطه۱۷-۵ را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{x,i} \\ \bar{F}_{y,j} \\ \bar{F}_{x,j} \\ \bar{F}_{y,j} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{w}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{w}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۱۶)$$

با استفاده از شکل۱۷-۱۵ داریم:

$$\bar{F}_{x,i} = F_{x,i}\cos\theta + F_{y,i}\sin\theta$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\overline{F}_{y,i} = -F_{x,i}\sin\theta + F_{y,i}\cos\theta$$

و

$$\overline{F}_{x,j} = F_{x,j}\cos\theta + F_{y,j}\sin\theta$$

$$\overline{F}_{y,j} = -F_{x,j}\sin\theta + F_{y,j}\cos\theta$$

با نوشتن λ بجای $\cos\theta$ و μ بجای $\sin\theta$ می‌توان رابطه بالا را به شکل ماتریسی بیان نمود.

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{x,i} \\ \overline{F}_{y,j} \\ \overline{F}_{x,j} \\ \overline{F}_{y,j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,j} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \end{Bmatrix} \qquad (۱۷-۱۷)$$

و یا به شکل کوتاه زیر آن را بیان نمود:

$$\{\overline{F}\} = [T]\{F\} \qquad (۱۸-۱۷)$$

که در آن $[T]$ ماتریس انتقال[1] نامیده می‌شود. همچنین روابط مشابهی را می‌توان برای جابجایی گره‌ها نیز بیان نمود.

$$\{\overline{\delta}\} = [T]\{\delta\} \qquad (۱۹-۱۷)$$

که در آن $\{\overline{\delta}\}$ و $\{\delta\}$ به ترتیب جابجایی‌های تعمیم یافته در سیستم مختصات محلی و کلی می‌باشند. با جانشانی $\{\overline{F}\}$ و $\{\overline{\delta}\}$ در رابطه۱۷-۱۶ از رابطه۱۷-۱۸ و ۱۷-۱۹ داریم:

$$[T]\{F\} = [\overline{K}_{ij}][T]\{\delta\}$$

لذا:

$$\{F\} = [T^{-1}][\overline{K}_{ij}][T]\{\delta\} \qquad (۲۰-۱۷)$$

می‌توان نشان داد که معکوس ماتریس تبدیل با ترانهاده[2] آن برابر است.

$$[T^{-1}] = [T]^T$$

بنابراین با بازنویسی رابطه۱۷-۲۰ داریم:

$$\{F\} = [T]^T[\overline{K}_{ij}][T]\{\delta\} \qquad (۲۱-۱۷)$$

نیروهای گره‌ای در سیستم کلی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

---

[1] Transformation matrix

[2] Transpose

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\{F\}=\left[K_{ij}\right]\{\delta\} \qquad (۲۲-۱۷)$$

که در آن $\left[K_{ij}\right]$ ماتریس سختی در مختصات کلی می‌باشد. با مقایسه روابط۱۷-۲۱ و ۱۷-۲۲ می‌توان نشان داد:

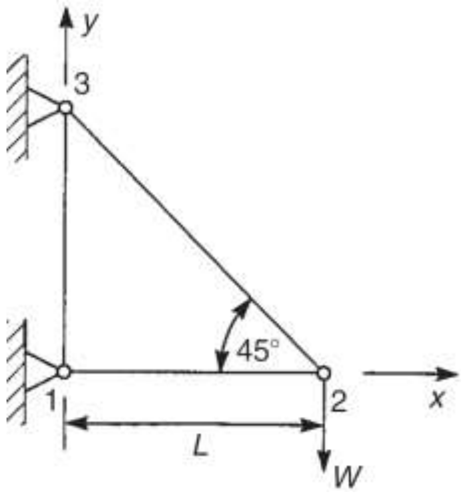
$$\left[K_{ij}\right]=[T]^T\left[\overline{K}_{ij}\right][T]$$

با جانشانی $[T]$ از رابطه۱۷-۱۷ و $\left[\overline{K}_{ij}\right]$ از رابطه۱۷-١٦ داریم:

$$\left[K_{ij}\right]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}\lambda^2 & \lambda\mu & -\lambda^2 & -\lambda\mu\\ \lambda\mu & \mu^2 & -\lambda\mu & -\mu^2\\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & \lambda^2 & \lambda\mu\\ -\lambda\mu & -\mu^2 & \lambda\mu & \mu^2\end{bmatrix} \qquad (۲۳-۱۷)$$

با استفاده از رابطه۱۷-۲۳ می‌توان ماتریس سختی یک میله مایل از یک سیستم سازه‌ای را بدست آورد.

مثال۱۷-۱) مقدار مولفه جابجایی در جهت افقی و قائم گره شماره ۲ از خرپای نشان داده شده در شکل۱۷-٤ را تعیین نمایید. مقدار AE برای تمام اعضا ثابت می‌باشد.



شکل۱۷-٤ خرپای مثال۱۷-۱

با توجه به شکل۱۷-٤ دیده می‌شود که گره‌های ۱و۳ توسط مفصل به تکیه‌گاه متصل بوده و جابجایی آنها مقید می‌باشد. بنابراین براحتی می‌توان نشان داد:

$$w_1=v_1=w_3=v_3=0$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

نیروی اعمال شده در گره۲ درجهت قائم بوده، بنابراین $F_{x,2}=0$ و $F_{y,2}=-W$ بوده و نیروهای ایجاد شده در گره‌های ۱و ۳ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی خرپا می‌باشند. با استفاده از رابطه۱۷-۲۳ می‌توان ماتریس سختی را در مختصات کلی به صورت زیر بیان نمود. مقدار کسینوس زاویه بین میله‌ها و محور مختصات کلی، منجر به مقادیر متفاوتی می‌شود. بنابراین زاویه θ در جهت ساعتگرد از جهت مثبت محور xها در نظر گرفته می‌شود. در نتیجه:

عضو	θ بر حسب درجه	λ	μ
12	0	1	0
13	90	0	1
23	135	-0.707	0.707

ماتریس سختی اعضا به صورت زیر خواهد بود:

$$[K_{12}]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$[K_{13}]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]=\frac{AE}{1.414L}\begin{bmatrix}0.5&-0.5&-0.5&0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\\-0.5&0.5&0.5&-0.5\\0.5&-0.5&-0.5&0.5\end{bmatrix} \quad \text{الف}$$

به دلیل آنکه سیستم مورد اشاره دارای سه گره می‌باشد و هر گره دارای دو نیروی است، بنابراین شش جابجایی گره‌ای خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix}F_{x,1}\\F_{y,1}\\F_{x,2}\\F_{y,2}\\F_{x,3}\\F_{y,3}\end{Bmatrix}=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1&0&-1&0&0&0\\0&1&0&0&0&-1\\-1&0&1.354&-0.354&-0.354&0.354\\0&0&-0.354&0.354&0.354&-0.354\\0&0&-0.354&0.354&0.354&-0.354\\0&-1&0.354&-0.354&-0.354&1.354\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1=0\\v_1=0\\w_2\\v_2\\w_3=0\\v_3=0\end{Bmatrix} \quad \text{ب}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

با حذف سطر و ستون‌های ماتریس سختی که دارای جابجایی صفر می‌باشند می‌توان جابجایی‌های w_3 و v_2 را تعیین نمود.

$$\begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1.354 & -0.354 \\ -0.354 & 0.354 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \qquad \text{پ}$$

با معکوس نمودن رابطه (پ) داریم:

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3.828 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix} \qquad \text{ت}$$

$$w_2 = \frac{L}{AE}\left(F_{x,2} + F_{y,2}\right) = \frac{-WL}{AE}$$

$$v_2 = \frac{L}{AE}\left(F_{x,2} + 3.828F_{y,2}\right) = \frac{-3.828WL}{AE}$$

حال با جانشانی روابط (ت) در (ب) مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی گره‌های ۱ و ۳ بدست می‌آید.

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.354 & 0.354 \\ 0.354 & -0.354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3.828 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_{x,2} \\ F_{y,2} \end{Bmatrix}$$

به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$F_{x,1} = -F_{x,2} - F_{y,2} = W$$

$$F_{y,1} = 0$$

$$F_{x,3} = F_{y,2} = -W$$

$$F_{y,3} = W$$

نیروی داخلی در هر یک از اعضا را می‌توان با استفاده از جابجایی نسبی گره‌های متصل به آن عضو تعیین نمود. بنابراین برای عضو ij، نیروی داخلی F_{ij} به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$F_{ij} = \frac{AE}{L}\left(\overline{w}_j - \overline{w}_i\right) \qquad \text{ث}$$

در حالی که،

$$\overline{w}_j = \lambda w_j + \mu v_j$$

$$\overline{w}_i = \lambda w_i + \mu v_i$$

از آنجایی که

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\overline{w}_j - \overline{w}_i = \lambda(w_j - w_i) + \mu(v_j - v_i)$$

با جایگذاری رابطه (ث) و نوشتن ماتریس به فرم زیر داریم:

$$F_{ij} = \frac{AE}{L}[\lambda \quad \mu]\begin{Bmatrix} w_j - w_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \qquad \text{ج}$$

بنابراین برای عضوهای سیستم داریم:

$$F_{12} = \frac{AE}{L}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} \dfrac{-WL}{AE} - 0 \\ \dfrac{-3.828WL}{AE} - 0 \end{Bmatrix} = -W \text{ (فشاری)}$$

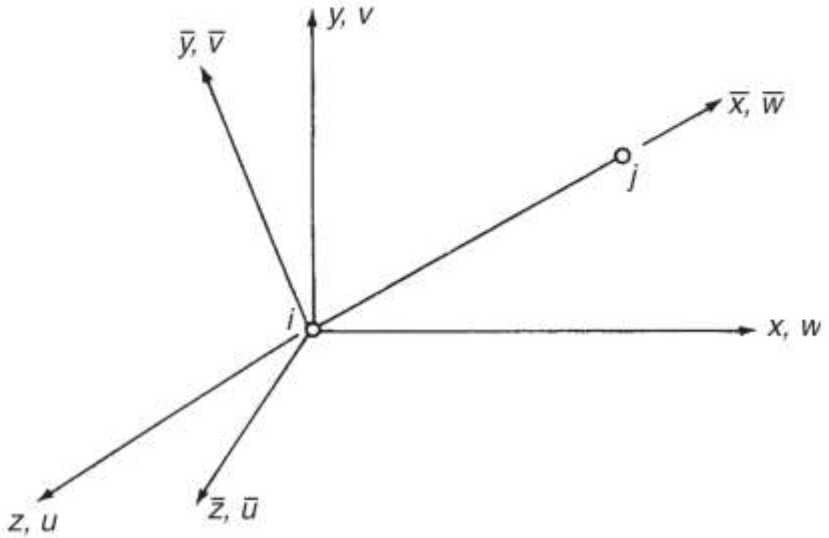
$$F_{13} = \frac{AE}{L}[1 \quad 0]\begin{Bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \end{Bmatrix} = 0$$

$$F_{23} = \frac{AE}{L}[-0.707 \quad 0.707]\begin{Bmatrix} 0 + \dfrac{WL}{AE} \\ 0 + \dfrac{3.828WL}{AE} \end{Bmatrix} = 1.414W \text{ (کششی)}$$

روش ماتریسی ارائه شده در مثال۱۷-۱ که یک سازه معین ایستایی بود به پایان رسید. روش ارائه شده در فوق برای سازه‌های نامعین نیز صادق بوده لیکن به علت تعداد بیشتر اعضا، تعداد آرایه‌های ماتریس سختی افزایش می‌یابد که برای حل آن استفاده از کامپیوتر اجتناب ناپذیر است.

روش تحلیل ماتریسی برای خرپاهای فضایی[1] نیز مانند خرپاهای صفحه‌ای[2] است. اختلاف عمده در تحلیل ماتریسی این سازه‌ها در تبدیل سیستم مختصات محلی به مختصات کلی می‌باشد. در شکل۱۷-۵ نیروهای گره‌ای محوری $\overline{F}_{x,i}$ و $\overline{F}_{x,j}$ در محور محلی عضو ij می‌باشند. سه مولفه نیرو در مختصات کلی $F_{x,i}$، $F_{y,i}$، $F_{z,i}$ و $F_{x,j}$، $F_{y,j}$، $F_{z,j}$ را در نظر بگیرید. ماتریس سختی عضو در مختصات کلی از درجه 6×6 می‌باشد، بنابراین $[K_{ij}]$ در رابطه۱۷-۱۵ به صورت زیر بسط داده می‌شود.

1 Space trusses
2 Plane trusses



شکل۱۷-۵ مختصات محلی و کلی برای یک عضو

$$\left[\overline{K}_{ij}\right]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \overline{w}_i & \overline{v}_i & \overline{u}_i & \overline{w}_j & \overline{v}_j & \overline{u}_j \end{matrix} \qquad (۱۷-۲٤)$$

در شکل۱۷-۵، عضو ij دارای طول L، سطح مقطع A و مدول الاستیسیته E می‌باشد. فرض کنید که

$\theta_{x\bar{x}} =$ زاویه بین x و $\bar{x}$ باشد

$\theta_{x\bar{y}} =$ زاویه بین x و $\bar{y}$ باشد

.

.

.

$\theta_{z\bar{y}} =$ زاویه بین z و $\bar{y}$ باشد

بنابراین نیروی گرهی متناظر در دو سیستم را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\left.\begin{aligned}\overline{F}_x &= F_x\cos\theta_{x\bar{x}} + F_y\cos\theta_{x\bar{y}} + F_z\cos\theta_{x\bar{z}}\\ \overline{F}_y &= F_x\cos\theta_{y\bar{x}} + F_y\cos\theta_{y\bar{y}} + F_z\cos\theta_{y\bar{z}}\\ \overline{F}_z &= F_x\cos\theta_{z\bar{x}} + F_y\cos\theta_{z\bar{y}} + F_z\cos\theta_{z\bar{z}}\end{aligned}\right\} \qquad (۱۷-۲۵)$$

و با نوشتن

$$\left.\begin{matrix}\lambda_{\bar{x}} = \cos\theta_{x\bar{x}} & \lambda_{\bar{y}} = \cos\theta_{x\bar{y}} & \lambda_{\bar{z}} = \cos\theta_{x\bar{z}}\\ \mu_{\bar{x}} = \cos\theta_{y\bar{x}} & \mu_{\bar{y}} = \cos\theta_{y\bar{y}} & \mu_{\bar{z}} = \cos\theta_{y\bar{z}}\\ \nu_{\bar{x}} = \cos\theta_{z\bar{x}} & \nu_{\bar{y}} = \cos\theta_{z\bar{y}} & \nu_{\bar{z}} = \cos\theta_{z\bar{z}}\end{matrix}\right\} \qquad (۱۷-۲۶)$$

رابطه‌۱۷-۲۵ را می‌توان به فرم ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\overline{F}_{x,i}\\ \overline{F}_{y,i}\\ \overline{F}_{z,i}\\ \overline{F}_{x,j}\\ \overline{F}_{y,j}\\ \overline{F}_{z,j}\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}} & 0 & 0 & 0\\ \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}} & 0 & 0 & 0\\ \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{y}} & \mu_{\bar{y}} & \nu_{\bar{y}}\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{\bar{z}} & \mu_{\bar{z}} & \nu_{\bar{z}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_{x,i}\\ F_{y,i}\\ F_{z,i}\\ F_{x,j}\\ F_{y,j}\\ F_{z,j}\end{Bmatrix} \qquad (۱۷-۲۷)$$

و یا به صورت خلاصه

$$\{\overline{F}\} = [T]\{F\}$$

ماتریس سختی $[K_{ij}]$ برای خرپای فضایی، مانند خرپای صفحه‌ای می‌باشد. بنابراین مانند قبل می‌توان روابط زیر را تکرار نمود:

$$[K_{ij}] = [T]^T[\overline{K}_{ij}][T]$$

با جانشانی $[T]$ و $[\overline{K}_{ij}]$ از روابط‌۱۷-۲۷ و ۱۷-۲۴ داریم:

$$[K_{ij}] = \frac{AE}{L}\begin{bmatrix}\lambda_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}}\\ \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}^2 & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}}\\ \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\nu_{\bar{x}}^2\\ -\lambda_{\bar{x}}^2 & -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}}\\ -\lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}^2 & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \lambda_{\bar{x}}\mu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}^2 & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}}\\ -\lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & -\nu_{\bar{x}}^2 & \lambda_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \mu_{\bar{x}}\nu_{\bar{x}} & \nu_{\bar{x}}^2\end{bmatrix} \qquad (۱۷-۲۸)$$

تمام اندیس‌های ارائه شده در رابطه‌۱۷-۲۸ به صورت $\bar{x}$ می‌باشد، بنابراین می‌توان رابطه فوق را به صورت ساده نوشت:

$$\left[K_{ij}\right]=\frac{AE}{L}\begin{bmatrix} \lambda^2 & & & \vdots & & & \textbf{SYM} \\ \lambda\mu & \mu^2 & & \vdots & & & \\ \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 & \vdots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & -\lambda\nu & \vdots & \lambda^2 & & \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & -\mu\nu & \vdots & \lambda\mu & \mu^2 & \\ -\lambda\nu & -\mu\nu & -\nu^2 & \vdots & \lambda\nu & \mu\nu & \nu^2 \end{bmatrix} \qquad (۲۹-۱۷)$$

که در روابط فوق λ، μ و ν بترتیب، کسینوس‌های هادی بین محورهای x، y و z و محورهای $\bar{x}$ می‌باشد.

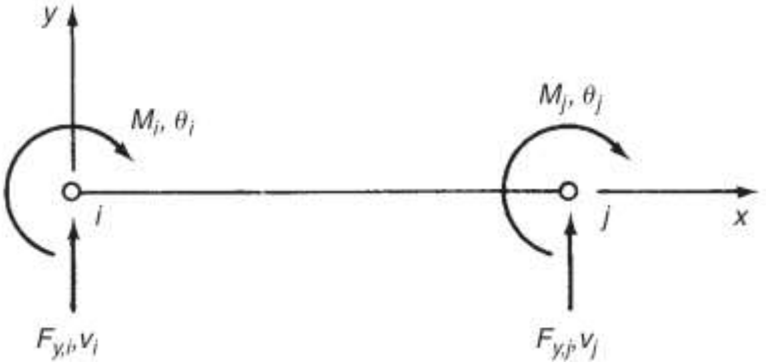
۲-۱۷ ماتریس سختی برای یک تیر با مقطع ثابت

بحث ما تا اینجا محدود به اعضایی بود که تنها تحت نیروهای محوری قرار داشتند. لیکن بسیاری از اعضا در سازه‌ها مانند تیرهای باربر همواره تحت بارهایی عمود بر محور طولی خود قرار می‌گیرند که باعث ایجاد لنگر خمشی، نیروی محوری و نیروی برشی در آنها می‌شود. شکل۱۷-۶ یک تیر با مقطع ثابت ij به سختی خمشی EI و به طول L که تحت نیروهای گرهی $F_{y,i}$ و $F_{y,j}$ و لنگرهای گرهی M_i و M_j در صفحه xy می‌باشد را نشان می‌دهد. جابجایی‌ها و دوران‌های گرهی ایجاد شده در تیر برابر v_i,v_j و θ_i,θ_j می‌باشد. به دلیل اینکه اثر نیروی محوری در بخش مربوط به خرپاها مورد بحث قرار گرفت، در اینجا اثر نیروی محوری در نظر گرفته نشده است. ماتریس سختی $\left[K_{ij}\right]$ را می‌توان به صورت مستقیم با استفاده از رابطه شیب افت ارائه شده در معادله۱۶-۲۷ بدست آورد. جهت‌های نشان داده شده برای دوران گره‌ها در شکل۱۷-۶، معرف جهت‌های مثبت می‌باشند.

$$M_i=-\frac{6EI}{L^2}v_i+\frac{4EI}{L}\theta_i+\frac{6EI}{L^2}v_j+\frac{2EI}{L}\theta_j$$
$$M_j=-\frac{6EI}{L^2}v_i+\frac{2EI}{L}\theta_i+\frac{6EI}{L^2}v_j+\frac{4EI}{L}\theta_j$$

همچنین

$$-F_{y,i}=F_{y,j}=-\frac{12EI}{L^3}v_i+\frac{6EI}{L^2}\theta_i+\frac{12EI}{L^3}v_j+\frac{6EI}{L^2}\theta_j \qquad (۳۰-۱۷)$$



شکل۱۷-۶ نیروها و لنگرهای بر روی المان یک تیر

روابط فوق را می‌توان به فرم ماتریسی نمایش داد:

$$\begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ M_i \\ F_{y,j} \\ M_j \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} \qquad (۱۷-۳۱)$$

و یا به فرم کوتاه زیر:

$$\{F\} = [K_{ij}]\{\delta\}$$

که در آن $[K_{ij}]$ ماتریس سختی تیر می‌باشد. رابطه۱۷-۳۱ را می‌توان به صورت زیر نیز بیان نمود.

$$\begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ \frac{M_i}{L} \\ F_{y,j} \\ \frac{M_j}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i L \\ v_i \\ \theta_i L \end{Bmatrix}$$

رابطه۱۷-۳۱ ماتریس سختی تیر را در حالتی که محور تیر در امتداد محور xها می‌باشد، را نشان می‌دهد. لیکن در حالتی که بخواهیم ماتریس سختی را در مختصات محلی بیان کنیم می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$[\overline{K}_{ij}]=EI\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & \frac{6}{L} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} w_i & v_i & \theta_i & w_j & v_j & \theta_j \end{matrix} \qquad (۳۲-۱۷)$$

می‌توان از ماتریس تبدیل رابطه۱۷-۱۷، رابطه زیر را نوشت:

$$[T]=\begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۳۳-۱۷)$$

که در رابطه فوق λ و μ مطابق تعریف قبلی هستند. بنابراین:

$$[K_{ij}]=[T]^T[\overline{K}_{ij}][T]$$

از رابطه‌های۱۷-۳۲ و ۱۷-۳۳ داریم:

$$[K_{ij}]=EI\begin{bmatrix} \frac{12\mu^2}{L^3} & & & & & \textbf{SYM} \\ \frac{-12\lambda\mu}{L^3} & \frac{12\lambda^2}{L^3} & & & & \\ \frac{6\mu}{L^2} & \frac{-6\lambda}{L^2} & \frac{4}{L} & & & \\ \frac{-12\mu^2}{L^3} & \frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{-6\mu}{L^2} & \frac{12\mu^2}{L^3} & & \\ \frac{12\lambda\mu}{L^3} & \frac{-12\lambda^2}{L^3} & \frac{6\lambda}{L^2} & \frac{-12\lambda\mu}{L^3} & \frac{12\lambda^2}{L^3} & \\ \frac{6\mu}{L^2} & \frac{-6\lambda}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{6\mu}{L^2} & \frac{6\lambda}{L^2} & \frac{4\lambda}{L} \end{bmatrix} \qquad (۳۴-۱۷)$$

مقدار برش و لنگر داخلی ایجاد شده در یک تیر را می‌توان توسط جابجایی گرهی آن تعیین نمود. بنابراین برای یک تیر با گره‌های i و j بایستی مقدار جابجایی گرهی v_i,θ_i و v_j,θ_j

آن را تعیین نماییم. مقدار نیروهای گرهی $F_{y,i}$ و M_i با استفاده از رابطه۱۷-۳۱ بدست می‌آیند. در صورتی که تیر در امتداد محور xها باشد، داریم:

$$\left.\begin{aligned} F_{y,i} &= EI\left(\frac{12}{L^3}v_i - \frac{6}{L^2}\theta_i - \frac{12}{L^3}v_j - \frac{6}{L^2}\theta_j\right) \\ M_i &= EI\left(-\frac{6}{L^2}v_i + \frac{4}{L}\theta_i + \frac{6}{L^2}v_j + \frac{2}{L}\theta_j\right) \end{aligned}\right\} \quad (۱۷-۳۵)$$

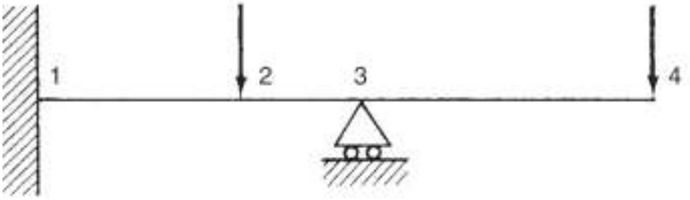
به طور مشابه می‌توان نیروها در گره j را نیز تعیین نمود. با استفاده از شکل۱۷-۶ می‌توان دید که نیروی برشی S_y و لنگر خمشی M را می‌توان به صورت زیر تعیین نمود:

$$\left.\begin{aligned} S_y &= F_{y,i} \\ M &= F_{y,i}x + M_i \end{aligned}\right\} \quad (۱۷-۳۶)$$

با جایگذاری رابطه۱۷-۳۵ در ۱۷-۳۶ و بیان آن به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} S_y \\ M \end{Bmatrix} = EI\begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L} & -\frac{12}{L^3}x + \frac{6}{L^2} & -\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (۱۷-۳۷)$$

حالتی از تحلیل تیر که در شکل۱۷-۶ نشان داده شد، برای شرایطی بود که در وسط تیر نیرویی اعمال نمیشود. لیکن در بسیاری از حالات عملی در وسط تیر و مابین تکیه‌گاه‌ها سازه دارای تکیه‌گاه‌هایی است. در این حالت لازم است تیر در محل اعمال بارها به عضوهای جدیدی تقسیم شود.

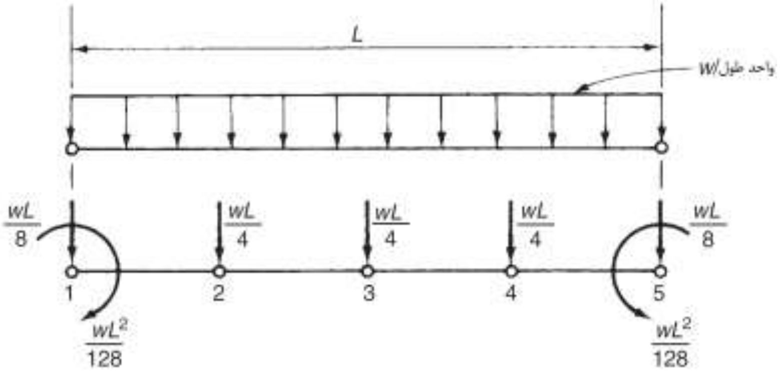


شکل۱۷-۷ تیر ایده‌آل شده

در این حالت، در زیر هر بار یک گره در نظر گرفته می‌شود. به عنوان مثال در شکل۱۷-۷ یک تیر به صورت ایده‌آل که به سه قطعه، ۱-۲، ۲-۳ و ۳-۴ تقسیم شده نشان داده می‌شود. جابجایی‌های گرهی مجهول شامل: v_4, v_2, θ_3 و θ_4 می‌باشند.($v_1 = \theta_1 = v_3 = 0$)

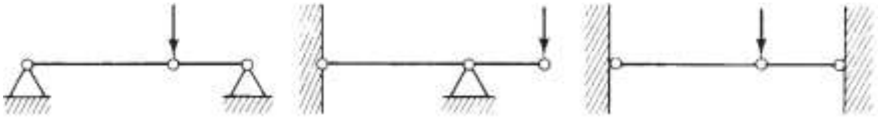
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در حالتی که توزیع بار بر روی تیر به صورت گسترده باشد، رفتار تیر به صورت حالت ویژه‌ای می‌باشد که می‌توان بارهای اعمال شده بر روی آن را به صورت مجموعه‌ای از بارهای استاتیکی که بر روی چند نقطه به صورت متمرکز قرار گرفته‌اند در نظر گرفت. در صورتی که این نقاط زیاد انتخاب شوند، دقت حل مسئله بالا می‌رود ولی در عوض زمان انجام تحلیل بالا می‌رود.



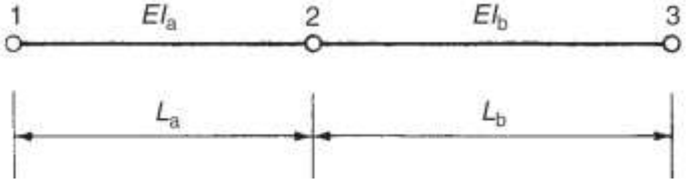
شکل۱۷-۸ تیر ایده‌آل شده تحت بار گسترده خطی

شکل۱۷-۸ یک تیر که تحت بار گسترده می‌باشد را نشان داده که برای تحلیل به چند قطعه تقسیم شده است.



شکل۱۷-۹ایده‌آل نمودن تیر به المان‌های تیر

بسیاری از تیرها را می‌توان به دو تیر و سه گره تبدیل نمود. شکل۱۷-۹ چند نمونه از تیرهای دو المانی را نشان می‌دهد. در صورتی که تیر از دو قطعه تشکیل شده باشد بایستی ماتریس سختی مرکب بدست آید. در شکل۱۷-۱۰ یک تیر دو المانی را نشان میدهد که از المان‌های ۱-۲ و ۲-۳ تشکیل شده است.



شکل۱۷-۱۰

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

برای تشکیل ماتریس سختی می‌توان از رابطه۱۷-۳۱ استفاده نمود:

$$\begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_2 & \theta_2 \end{matrix}$$

$$\left[K_{12}\right]=EI_a\begin{bmatrix} \underset{k_{11}}{\begin{bmatrix} \frac{12}{L_a^3} & \frac{-6}{L_a^2} \\ \frac{-6}{L_a^2} & \frac{4}{L_a} \end{bmatrix}} & \underset{k_{12}}{\begin{bmatrix} \frac{-12}{L_a^3} & \frac{-6}{L_a^2} \\ \frac{6}{L_a^2} & \frac{2}{L_a} \end{bmatrix}} \\ \underset{k_{21}}{\begin{bmatrix} \frac{-12}{L_a^3} & \frac{6}{L_a^2} \\ \frac{-6}{L_a^2} & \frac{2}{L_a} \end{bmatrix}} & \underset{k_{22}}{\begin{bmatrix} \frac{12}{L_a^3} & \frac{6}{L_a^2} \\ \frac{6}{L_a^2} & \frac{4}{L_a} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \qquad (۱۷-۳۸)$$

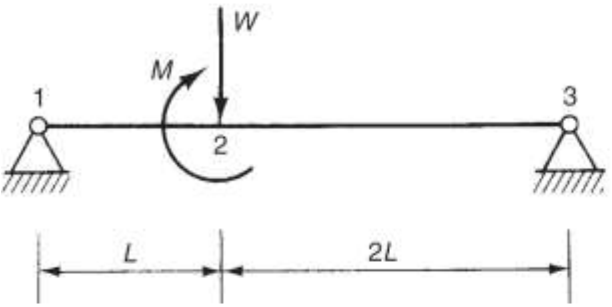
$$\begin{matrix} v_1 & \theta_1 & v_3 & \theta_3 \end{matrix}$$

$$\left[K_{23}\right]=EI_b\begin{bmatrix} \underset{k_{22}}{\begin{bmatrix} \frac{12}{L_b^3} & \frac{-6}{L_b^2} \\ \frac{-6}{L_b^2} & \frac{4}{L_b} \end{bmatrix}} & \underset{k_{23}}{\begin{bmatrix} \frac{-12}{L_b^3} & \frac{-6}{L_b^2} \\ \frac{6}{L_b^2} & \frac{2}{L_b} \end{bmatrix}} \\ \underset{k_{32}}{\begin{bmatrix} \frac{-12}{L_b^3} & \frac{6}{L_b^2} \\ \frac{-6}{L_b^2} & \frac{2}{L_b} \end{bmatrix}} & \underset{k_{22}}{\begin{bmatrix} \frac{12}{L_b^3} & \frac{6}{L_b^2} \\ \frac{6}{L_a^2} & \frac{4}{L_b} \end{bmatrix}} \end{bmatrix} \qquad (۱۷-۳۹)$$

اگر $[K_{12}]$ و $[K_{23}]$ ماتریس سختی کل حاصل می‌شود:

$$[K]=E\begin{bmatrix} \frac{12I_a}{L_a^3} & \frac{-6I_a}{L_a^2} & \frac{-12I_a}{L_a^3} & \frac{-6I_a}{L_a^2} & 0 & 0 \\ \frac{-6I_a}{L_a^2} & \frac{4I_a}{L_a} & \frac{6I_a}{L_a^2} & \frac{2I_a}{L_a} & 0 & 0 \\ \frac{-12I_a}{L_a^3} & \frac{6I_a}{L_a^2} & 12\left(\frac{I_a}{L_a^2}+\frac{I_b}{L_b^2}\right) & 6\left(\frac{I_a}{L_a^2}-\frac{I_b}{L_b^2}\right) & \frac{-12I_b}{L_b^3} & \frac{6I_b}{L_b^2} \\ \frac{-6I_a}{L_a^2} & \frac{2I_a}{L_a} & 6\left(\frac{I_a}{L_a^2}-\frac{I_b}{L_b^2}\right) & 4\left(\frac{I_a}{L_a^2}+\frac{I_b}{L_b^2}\right) & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{2I_b}{L_b} \\ 0 & 0 & \frac{-12I_b}{L_b^3} & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{12I_b}{L_b^3} & \frac{6I_b}{L_b^2} \\ 0 & 0 & \frac{-6I_b}{L_b^2} & \frac{2I_b}{L_b} & \frac{6I_b}{L_b^2} & \frac{4I_b}{L_b} \end{bmatrix} \qquad (۱۷-۴۰)$$

مثال۱۷-۲) در تیر نشان داده شده در شکل۱۷-۱۱ مقدار جابجایی گره‌ها و نیروهای متناظر در آنها را در اثر بار اعمال شده تعیین نمایید. مقطع تیر ثابت می‌باشد.



شکل۱۷-۱۱ تیر مثال ۱۷-۲

حل) برای حل می‌توان تیر را به دو قسمت ۱-۲ و ۲-۳ تقسیم نمود. با توجه به شکل۱۷-۱۱ مقدار $v_1 = v_3 = 0$ ، $F_{y,2} = -W$ و $M_2 = +M$ می‌باشد. بنابراین با حذف سطرها و ستون‌های مربوط به جابجایی‌های صفر با استفاده از رابطه۱۷-٤۰ داریم:

الف

$$\begin{Bmatrix} F_{y,2} = -W \\ M_2 = M \\ M_1 = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} \frac{27}{2L^3} & \frac{9}{2L^2} & \frac{6}{L^2} & \frac{-3}{2L^2} \\ \frac{9}{2L^2} & \frac{6}{L} & \frac{2}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & \frac{4}{L} & 0 \\ \frac{-3}{2L^2} & \frac{1}{L} & 0 & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ \theta_1 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

با بازنویسی رابطه(الف) به صورت زیر داریم:

ب

$$\begin{Bmatrix} F_{y,2} = W \\ M_2 = M/L \\ M_1 = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \begin{bmatrix} 27 & 9 & 12 & -3 \\ 9 & 12 & 4 & 2 \\ 12 & 4 & 8 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \\ \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix}$$

با بسط رابطه (ب) و ضرب ماتریسی داریم:

پ

$$\begin{Bmatrix} W \\ M/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \left(\begin{bmatrix} 27 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \right)$$

و همچنین

ت

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{2L^3} \left(\begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \right)$$

با حل رابطه (ت) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \theta_1 L \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \qquad \text{ث}$$

با جانشانی رابطه (ث) در رابطه (پ) داریم:

$$\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} = \frac{L^3}{9EI} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -W \\ M/L \end{Bmatrix} \qquad \text{ج}$$

در نتیجه مقادیر جابجایی‌ها در گره ۲ به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$v_2 = -\frac{4}{9}\frac{WL^3}{EI} - \frac{2}{9}\frac{ML^2}{EI}$$

$$\theta_2 = \frac{2}{9}\frac{WL^2}{EI} + \frac{1}{9}\frac{ML}{EI}$$

همچنین با استفاده از رابطه (ث) داریم:

$$\theta_1 = \frac{5}{9}\frac{WL^2}{EI} + \frac{1}{6}\frac{ML}{EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{4}{9}\frac{WL^2}{EI} - \frac{1}{3}\frac{ML}{EI}$$

نیروی داخلی برشی و لنگر خمشی را نیز می‌توان توسط رابطه۱۷-۳۷ برای المان تیر۱-۲ به صورت زیر نوشت:

$$S_{y,12} = EI\left(\frac{12}{L^3}v_1 - \frac{6}{L^2}\theta_1 - \frac{12}{L^3}v_2 - \frac{6}{L^2}\theta_2\right)$$

$$S_{y,12} = \frac{2}{3}W - \frac{1}{3}\frac{M}{L}$$

و

$$M_{12} = EI\left[\left(\frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2}\right)v_1 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{4}{L}\right)\theta_1 + \left(\frac{12}{L^3}x - \frac{6}{L^2}\right)v_2 + \left(-\frac{6}{L^2}x + \frac{2}{L}\right)\theta_2\right]$$

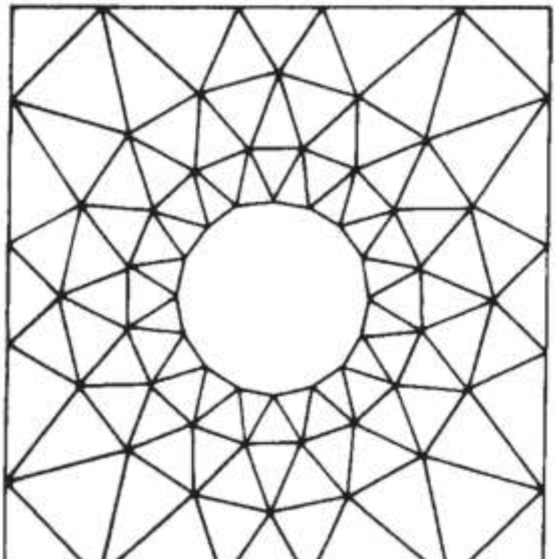
که می‌توان آن را به صورت زیر خلاصه نمود:

$$M_{12} = \left(\frac{2}{3}W - \frac{1}{3}\frac{M}{L}\right)x$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۱۷-۳ روش المان محدود برای سازه‌های پوسته‌ای

در بخش قبل روش ماتریس را برای المان‌هایی که توسط نقاط گرهی به یکدیگر مرتبط شده بودند را مورد بحث قرار دادیم. برای سازه‌های اسکلتی[1] که شامل چیدمانی از تیرها می‌باشند، نقاط گرهی در محل اتصال تیرها و محل اعمال بارهای متمرکز می‌باشد. سازه‌های پیوسته‌ای مانند صفحه‌های تخت، بدنه هواپیماها، پوسته‌ها و غیره را نمی‌توان توسط روش‌ها تحلیل ماتریس به قطعه‌های کوچک‌تر تقسیم نمود. با استفاده از روش المان محدود[2] می‌توان این سازه‌ها را به صورت دو یا سه بعدی تحلیل نمود. تحلیل دو بعدی بیشتر رایج بوده و استفاده از تحلیل‌های کامپیوتری در این زمینه اجتناب ناپذیر می‌باشد. در صورتی که از تحلیل دو بعدی استفاده شود، معمولاً از المان‌هایی به شکل سه‌گوش یا چهارگوش[3] استفاده می‌شود.



شکل ۱۷-۱۲ ایده‌آل نمودن صفحه با یک سوراخ به صورت المان محدود

نحوه استفاده از المان‌ها و اندازه آنها به عوامل مختلفی همچون میزان دقت مورد نیاز، نوع مسئله و هزینه‌های تحلیل بستگی دارد.

---

[1] Skeletal structures
[2] Finite Element Analysis (FEA)
[3] Triangular and quadrilateral shaped elements

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

در صورت ایده‌آل سازی با المان‌های بزرگ جواب‌ها به صورت تقریبی بدست خواهند آمد ولی اگر ایده‌آل سازی خوب با المان‌های کوچک داشته باشیم، جواب‌ها به سمت جواب دقیق همگرا شده و زمان تحلیل بالا می‌رود. در صورتی در نقاطی از سازه جواب‌ها دارای اهمیت باشند می‌توان المان‌های آن ناحیه را ریزتر در نظر گرفت. به عنوان مثال در شکل١٧-١٢ یک صفحه‌ای را نشان می‌دهد که در وسط آن سوراخی وجود دارد. در صورتی که این صفحه تحت کشش قرار گیرد، در محل سوراخ تمرکز تنش خواهیم داشت. لذا المان‌های این قسمت کوچکتر از بقیه قسمت‌ها انتخاب شده است.

گرچه المان‌ها در مرز مابین خود در بینهایت نقطه، با هم مرتبط می‌باشند، لیکن در تحلیل فرض می‌شود که آنها تنها در محل نقاط گرهی به هم مرتبط هستند. در روش المان محدود، الگوی جابجایی گره‌ها با توجه به شرایط سازگاری آنها تعیین می‌شود. برای شروع بایستی در محل اعمال نیروهای متمرکز یک گره در نظر گرفته شود. در صورتی که سازه تحت بارهای گسترده قرار گرفته بایستی آن را به صورت مجموعه‌ای از بارهای معادل متمرکز که هر یک بر روی یک گره قرار دارد در نظر گرفت. روند حل برای سازه‌های اسکلتی مانند روش ارائه شده در قبل می‌باشد. از المان یک بعدی تیر نشان داده شده در شکل١٧-٦ برای توضیح این روش استفاده می‌نماییم.

ماتریس سختی برای المان تیر

گام ابتدایی انتخاب یک سیستم مختصات مناسب، شماره گذاری گره‌ها و تعریف بردار جابجایی گره‌ای $\{\delta^e\}$ و بردار بار گره‌ای $\{F^e\}$ می‌باشد. از بالانویس e برای بردار المان استفاده می‌شود. بنابراین برای المان تیر شکل١٧-٦ داریم:

$$\{F^e\}=\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \qquad \{F^e\}=\begin{Bmatrix} F_{y,i} \\ M_i \\ F_{y,j} \\ M_j \end{Bmatrix}$$

چون هر یک از بردارها دارای چهار جمله می‌باشند، ماتریس سختی $[K^e]$ از مرتبه 4×4 خواهد بود.

گام دوم تعریف تابع جابجایی برای تیر می‌باشد که جابجایی‌های تمام نقاط در المان تیر را شامل شود. این تابع را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای با چهار ثابت دلخواه مطابق با چهار درجه آزادی[1] (برای هر جسم صلب در فضا می‌توان سه حرکت دورانی و سه حرکت انتقالی در نظر گرفت. به هر یک از این شش حرکت، یک درجه آزادی گفته می‌شود) موجود در گره‌های تیر در نظر گرفت. بنابراین:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \tag{٤١-١٧}$$

رابطه ١٧-٤١ را می‌توان به فرم زیر نیز بازنویسی نمود:

$$\{v(x)\} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

و یا به فرم کوتاه زیر نوشت:

$$\{v(x)\} = [f(x)]\{\alpha\} \tag{٤٢-١٧}$$

مقدار دوران θ در هر مقطع از تیر توسط $\partial v/\partial x$ بدست می‌آید. بنابراین:

$$\theta = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2 \tag{٤٣-١٧}$$

با استفاده از رابطه ١٧-٤١ و ١٧-٤٢ می‌توان جابجایی‌های گره‌ای v_i,θ_i و v_j,θ_j در $x=0$ و $x=L$ را به صورت زیر نوشت.

$$\left.\begin{aligned} v_i &= \alpha_1 \\ \theta_i &= \alpha_2 \\ v_j &= \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 \\ \theta_j &= \alpha_2 + 2\alpha_3 L + 3\alpha_4 L^2 \end{aligned}\right\} \tag{٤٤-١٧}$$

با بازنویسی رابطه١٧-٤٤ ماتریس به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} v_i \\ \theta_i \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{٤٥-١٧}$$

یا

[1] Degree Of Freedom (DOF)

$$\left\{\delta^e\right\}=[A]\{\alpha\} \qquad (۴۶-۱۷)$$

گام سوم، استفاده از روابط۱۷-۴۵ و ۱۷-۴۲ و بیان جابجایی هر نقطه از المان تیر توسط جابجایی گره‌های آن می‌باشد. با استفاده از رابطه۱۷-۴۶ داریم:

$$\{\alpha\}=\left[A^{-1}\right]\left\{\delta^e\right\} \qquad (۴۷-۱۷)$$

با جایگذاری در رابطه۱۷-۴۲ خواهیم داشت:

$$\{v(x)\}=[f(x)]\left[A^{-1}\right]\left\{\delta^e\right\} \qquad (۴۸-۱۷)$$

مقدار $\left[A^{-1}\right]$ را می‌توان با معکوس نمودن $[A]$ در رابطه۱۷-۴۵ بدست آورد.

$$\left[A^{-1}\right]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^2} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \qquad (۴۹-۱۷)$$

در گام چهارم، مقدار کرنش $\{\varepsilon(x)\}$ در هر نقطهx بر روی تیر را با استفاده از بردار جابجایی $\{v(x)\}$ می‌توان بدست آورد. با استفاده از رابطه۱۷-۴۱ داریم:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=2\alpha_3+6\alpha_4 x \qquad (۵۰-۱۷)$$

و یا به فرم ماتریسی

$$\varepsilon=\begin{bmatrix}0 & 0 & 2 & 6x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{Bmatrix} \qquad (۵۱-۱۷)$$

که می‌توان به فرم ساده زیر خلاصه نمود:

$$\{\varepsilon\}=[C]\{\alpha\} \qquad (۵۲-۱۷)$$

با جایگذاری $\{\alpha\}$ از رابطه۱۷-۵۲ در رابطه۱۷-۴۷ داریم:

$$\{\varepsilon\}=[C]\left[A^{-1}\right]\left\{\delta^e\right\} \qquad (۵۳-۱۷)$$

گام پنجم، برقراری ارتباط بین تنش‌های داخلی در المان با کرنش‌های $\{\varepsilon\}$با استفاده از رابطه ۱۷-۵۳ می‌باشد. در این تیر مقدار تنش موجود در سرتاسر آن به مقدار گشتاور خمشی در در آن مقطع از تیر بستگی دارد. بنابراین ما می‌توانیم حالت تنش $\{\sigma\}$ در هر نقطه‌ای از تیر تحت گشتاور خمشی M را به صورت ساده زیر بیان نماییم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$M = -EI\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

یا

$$\{\sigma\} = [EI]\{\varepsilon\} \quad (٥٤-١٧)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (٥٥-١٧)$$

ماتریس $[D]$ در رابطه۱۷-۵۵ ماتریس الاستیسیته[1] می‌باشد که تنش و کرنش را به یکدیگر مرتبط می‌کند. در اینجا، $[D]$ شامل یک مقدار است که به آن سختی خمشی EI تیر گویند. با جایگذاری $\{\varepsilon\}$ از رابطه ۱۷-۵۳ در رابطه۱۷-۵۵ می‌توانیم تنش را بر حسب جابجایی‌های گرهی آن بدست آوریم.

$$\{\sigma\} = [D][C][A^{-1}]\{\delta^e\} \quad (٥٦-١٧)$$

در نهایت ماتریس سختی المان در گام ششم بدست می‌آید. با جایگذاری تنش داخلی $\{\sigma\}$ توسط یک سیستم بار معادل گرهی $\{F^e\}$ با استفاده از رابطه۱۷-۵٦ و تعریف ماتریس سختی المان $[K^e]$ و با فرض U به عنوان انرژی کرنش داخلی و V به عنوان انرژی پتانسیل داریم:

$$U + V = \frac{1}{2}\int_{vol}\{\varepsilon\}^T\{\sigma\}d(\text{حجم}) - \{\delta^e\}^T\{F^e\} \quad (٥٧-١٧)$$

با جانشانی $\{\varepsilon\}$ از رابطه۱۷-۵۷ در رابطه۱۷-۵۳ و همچنین با جانشانی $\{\sigma\}$ از رابطه ۱۷-۵٦ داریم:

$$U + V = \frac{1}{2}\int_{vol}\{\delta^e\}^T[A^{-1}]^T[C]^T[D][C][A^{-1}]\{\delta^e\}d(\text{حجم}) - \{\delta^e\}^T\{F^e\} \quad (٥٨-١٧)$$

انرژی پتانسیل کل در تیر نسبت به جابجایی‌های گرهی $\{\delta^e\}$ مقدار ثابتی می‌باشد. بنابراین با استفاده از رابطه۱۷-۵۸ داریم:

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial\{\delta^e\}^T} = \int_{vol}[A^{-1}]^T[C]^T[D][C][A^{-1}]\{\delta^e\}d(\text{حجم})\{F^e\} = 0 \quad (٥٩-١٧)$$

بنابراین

$$\{F^e\} = \left\lfloor\int_{vol}[C]^T[A^{-1}][D][C][A^{-1}]d(\text{حجم})\right]\{\delta^e\} \quad (٦٠-١٧)$$

در صورتی که $[C]^T[A^{-1}]$ را با ماتریس $[B]$ نمایش دهیم:

---

[1] Elasticity matrix

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\{F^e\}=\left\lfloor \int_{vol}[B]^T[D][B]d(\text{حجم})\right\rfloor\{\delta^e\} \qquad (١٧-٦١)$$

بنابراین برای المان، ماتریس سختی به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\{K^e\}=\left\lfloor \int_{vol}[B]^T[D][B]d(\text{حجم})\right] \qquad (١٧-٦٢)$$

از روابط ١٧-٤٩ و ١٧-٥١ داریم:

$$[B]=[C][A^{-1}]=[0\quad 0\quad 2\quad 6x]\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\frac{-3}{L^2}&\frac{-2}{L}&\frac{3}{L^2}&\frac{-1}{L}\\\frac{2}{L^3}&\frac{1}{L^2}&\frac{-2}{L^3}&\frac{1}{L^2}\end{bmatrix}$$

یا

$$[B]^T=\begin{bmatrix}-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\\-\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\\\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\\-\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\end{bmatrix} \qquad (١٧-٦٣)$$

بنابراین

$$[K^e]=\int_0^L\begin{bmatrix}-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\\-\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\\\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\\-\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\end{bmatrix}EI\left[-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3}\quad -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2}\quad \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3}\quad -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right]dx$$

در نتیجه

$$[K^e]=\frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix}12&-6L&-12&-6L\\-6L&4L^2&6L&2L^2\\-12&6L&12&6L\\-6L&2L^2&6L&4L^2\end{bmatrix} \qquad (١٧-٦٤)$$

مقدار ماتریس سختی بدست آمده از رابطه١٧-٦٤، با مقدار ماتریس سختی حاصل شده در رابطه ١٧-٣١ برای تیر یکنواخت برابر می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در نهایت در گام هفتم، تنش‌های داخلی $\{\sigma\}$ در المان با جابجایی گره‌ای $\{\delta^e\}$ ربط داده می‌شوند.

$$\{\sigma\}=[D][C][A^{-1}]\{\delta^e\}$$

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta^e\} \tag{۱۷-٦٥}$$

رابطه۱۷-٦٥ را می‌توان به صورت زیر نیز بازنویسی نمود:

$$\{\sigma\}=[H]\{\delta^e\} \tag{۱۷-٦٦}$$

که در آن $[H]=[D][B]$ ماتریس تنش-جابجایی می‌باشد. در این حالت $[D]=EI$ و $[B]$ توسط رابطه ۱۷-٦۳ تعریف می‌شود.

$$[H]=EI\begin{bmatrix}-\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3} & -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2} & \frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3} & -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\end{bmatrix} \tag{۱۷-٦۷}$$

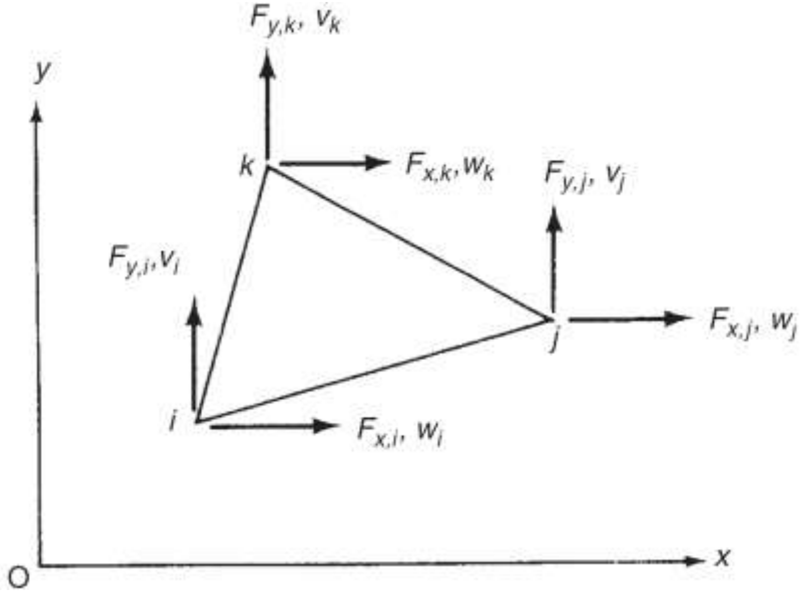
ماتریس سختی برای المان مثلثی

المان‌های محدود مثلثی برای مسائل تنش صفحه‌ای و کرنش صفحه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله مزایای این المان شکل آن می‌باشد که می‌توان شرایط مرزی با شکل‌های نامنظم را پوشش دهد. همچنین درک این المان ساده‌تر می‌باشد. برای استخراج ماتریس سختی این المان بایستی تمام گام‌های ارائه شده در مثال قبلی را دنبال نماییم.

در گام نخست یک سیستم مختصات مناسب و سیستم شماره‌گذاری برای المان‌ها را تعریف نموده و سپس جابجایی و بردار نیروهای گره‌ای تعریف می‌شوند. شکل۱۷-۱۳ یک المان مثلثی را نشان می‌دهد که در صفحه مختصات Oxy قرار دارد. المان مذکور دارای گره‌های i، j و k می‌باشد. که به صورت پاد ساعتگرد شماره‌گذاری شده‌اند.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱۷-۱۳ المان مثلثی برای مسائل صفحه‌ای

هر یک از گره‌ها دو درجه آزادی دارند. بنابراین کل المان دارای شش درجه آزادی می‌باشد و مرتبه ماتریس سختی به صورت $[K^e]$ می‌باشد. بردار نیروهای گره‌ای و جابجایی‌های گره‌ای در زیر نشان داده شده‌اند.

$$\{\delta^e\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ v_i \\ w_j \\ v_j \\ w_k \\ v_k \end{Bmatrix} \qquad \{F^e\}=\begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ F_{x,k} \\ F_{y,k} \end{Bmatrix} \tag{۱۷-۶۸}$$

در اینجا یک تابع جابجایی برای المان که شرایط مرزی آن را ارضا نماید را انتخاب می‌نماییم. هر یک از گره‌ها دارای دو درجه آزادی می‌باشند، بنابراین برای استفاده آن در الگوریتم‌ها می‌توان برای راحتی از یک چند جمله‌ای استفاده نمود تا محاسبات آن توسط کامپیوتر راحت‌تر انجام شود. از طرفی کل درجات آزادی المان شش می‌باشد، بنابراین تعداد ضرائب چند جمله‌ای شش می‌باشند. فرض کنید تابع جابجایی به صورت زیر باشد:

$$\left.\begin{aligned} w(x,y)&=\alpha_1+\alpha_2 x+\alpha_3 y \\ v(x,y)&=\alpha_4+\alpha_5 x+\alpha_6 y \end{aligned}\right\} \tag{۱۷-۶۹}$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

ضرائب α_1 و α_4 نشان دهنده حرکت درون صفحه‌ای المان به صورت جسم صلب می‌باشد. با بازنویسی رابطه۱۷–٦۹ به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad (۷۰-۱۷)$$

با مقایسه رابطه۱۷–۷۰ با رابطه۱۷–٤۲ می‌توان به صورت زیر آن را بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{\alpha\} \qquad (۷۱-۱۷)$$

با جایگذاری مختصات نقاط و جابجایی‌های گره‌ای در رابطه۱۷–۷۱ برای گره i داریم:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ v_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \end{bmatrix} \{\alpha\}$$

بطور مشابه می‌توان برای گره‌های j و k نیز روابط مشابهی استخراج نمود:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ v_i \\ w_j \\ v_j \\ w_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \qquad (۷۲-۱۷)$$

از رابطه۱۷–٦۸ و با مقایسه روابط۱۷–٤٥ و ۱۷–٤٦ می‌توان رابطه۱۷–۷۲ را به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$

از گام سوم داریم:

$$\{\alpha\} = [A^{-1}]\{\delta^e\}$$

با جانشانی $\{\alpha\}$ از رابطه فوق در رابطه۱۷–۷۱ داریم:

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)][A^{-1}]\{\delta^e\} \qquad (۷۳-۱۷)$$

مقدار کرنش در المان برابر است با:

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (٧٤-١٧)$$

$$\varepsilon_x=\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (٧٥-١٧)$$

با جایگذاری w و v از رابطه‌۱۷-٦۹ در رابطه‌۱۷-۷۵ داریم:

$$\varepsilon_x=\alpha_2$$

$$\varepsilon_y=\alpha_6$$

$$\gamma_{xy}=\alpha_3+\alpha_5$$

و یا به فرم ماتریسی داریم:

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\\ \alpha_5\\ \alpha_6\end{Bmatrix} \qquad (٧٦-١٧)$$

و یا به فرم زیر

$$\{\varepsilon\}=[C]\{\alpha\}$$

با جانشانی $\{\alpha\}=[A^{-1}]\{\delta^e\}$ داریم:

$$\{\varepsilon\}=[C][A^{-1}]\{\delta^e\}$$

یا

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta^e\}$$

که $[C]$ در رابطه‌۱۷-۷٦ تعریف شده است. در گام پنجم تنش‌های داخلی $\{\sigma\}$ و کرنش $\{\varepsilon\}$ به هم مربوط می‌شوند. برای حالت تنش صفحه‌ای داریم:

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (٧٧-١٧)$$

و

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E}\\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E}\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}$$

(فصل هفتم در جلد اول کتاب را مشاهده نمایید)

بنابراین به فرم ماتریسی داریم:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix}1 & -\nu & 0\\ -\nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۷۸-۱۷)$$

و همچنین می‌توان نشان داد:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu}\begin{bmatrix}1 & \nu & 0\\ \nu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۷۹-۱۷)$$

از رابطه۱۷-۵۵ می‌توان تنش را به فرم ماتریسی زیر نیز بیان نمود:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}$$

با جانشانی $\{\varepsilon\}$ بر حسب جابجایی گره‌ای $\{\delta^e\}$ داریم:

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta^e\}$$

در حالت کرنش صفحه‌ای، ماتریس الاستیسیته $[D]$ از روش دیگری بدست می‌آید. برای این مسائل داریم:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_z}{E}\\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E} - \frac{\nu\sigma_x}{E} - \frac{\nu\sigma_y}{E} = 0\\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\end{aligned}$$

با حذف σ_z و حل σ_x, σ_y و τ_{xy} داریم:

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0\\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0\\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۸۰-۱۷)$$

در گام ششم تنش‌های داخلی $\{\sigma\}$ با بارهای معادل گره‌ای $\{F^e\}$، روند حل مانند روش شرح داده شده برای المان تیر می‌باشد.

$$\{F^e\}=\left[\int_{vol}[B]^T[D][B]d(\text{حجم})\right]\{\delta^e\}$$

در عبارت فوق $[B]=[C][A^{-1}]$ می‌باشد، همچنین ماتریس $[A]$ در رابطه۱۷-۷۲ و $[C]$ در رابطه۱۷-۷٦ تعریف شدند. ماتریس الاستیسیته $[D]$ برای مسائل تنش صفحه‌ای در رابطه۱۷-۷۹ و برای مسائل کرنش صفحه‌ای در رابطه۱۷-۸۰ تعریف شده است. بایستی توجه داشت که ماتریس‌های $[C]$،$[A]$ (بنابراین $[B]$) و $[D]$ شامل جمله‌های ثابتی هستند. بنابراین می‌توان آنها را از انتگرال مربوط به $[K^e]$ بیرون آورد، که در اینصورت عبارت $\int d(\text{حجم})$ برابر با مساحت A المان ضرب در ضخامت آن t می‌باشد. در نتیجه:

$$[K^e]=[[B]^T[D][B]At] \qquad (۸۱-۱۷)$$

در نهایت تنش‌های موجود در المان با استفاده از رابطه۱۷-٦٦ به صورت زیر خواهد بود:

$$\{\sigma\}=[H]\{\delta^e\}$$

که در آن $[H]=[D][B]$ و ماتریس‌های $[D]$ و $[B]$ در قبل تعریف شده‌اند. المان‌های مثلثی را می‌توان برای سازه‌های صفحه‌ای دو بعدی و سازه‌های سه بعدی پوسته‌ای مورد استفاده قرار داد.

مثال۱۷-۳) مختصات گوشه‌های یک المان مثلثی با کرنش ثابت به صورت *1(0,0)*، *2(4,0)* و *3(2,2)* در یک سیستم مختصات کارتزین مفروض است. همچنین این المان دارای ضخامت واحد است. در صورتی که اعضای ماتریس الاستیسیته $[D]$ این المان به صورت $D_{11}=D_{22}=a$ ،$D_{12}=D_{21}=b$ ، $D_{13}=D_{23}=D_{31}=D_{32}=0$ و $D_{33}=c$ باشد، ماتریس سختی این المان را تعیین نمایید.

حل) با استفاده از رابطه۱۷-٦۹ داریم:

$$w_1=\alpha_1+\alpha_2(0)+\alpha_3(0)$$

$$w_1=\alpha_1$$ الف

$$w_2=\alpha_1+\alpha_2(4)+\alpha_3(0)$$

$$w_2=\alpha_1+4\alpha_2$$ ب

$$w_3=\alpha_1+\alpha_2(2)+\alpha_3(2)$$

$$w_3=\alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3$$ پ

با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$\alpha_1=w_1$$ ت

و همچنین با استفاده از روابط (ب) و (پ) نیز خواهیم داشت:

$$\alpha_2=\frac{w_2-w_1}{4}$$ ث

و از روابط (پ) و (ث) داریم:

$$\alpha_3=\frac{2w_3-w_1-w_2}{4}$$ ج

با جانشانی α_1، α_2 و α_3 در رابطه۱۷-٦۹ خواهیم داشت:

$$w=w_1+\left(\frac{w_2-w_1}{4}\right)x+\left(\frac{2w_3-w_1-w_2}{4}\right)y$$

یا

$$w=\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right)w_1+\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right)w_2+\frac{y}{2}w_3$$ ح

به طور مشابه

$$v=\left(1-\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right)v_1+\left(\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right)v_2+\frac{y}{2}v_3$$ خ

حال با استفاده از رابطه۱۷-۷۵ داریم:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{w_1}{4}+\frac{w_2}{4}$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{v_1}{4}-\frac{v_2}{4}+\frac{v_3}{2}$$

و

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{w_1}{4}-\frac{w_2}{4}+\frac{w_3}{2}-\frac{v_1}{4}+\frac{v_2}{4}$$

بنابراین

د

$$[B]\{\delta^e\}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1&0&1&0&0&0\\0&-1&0&-1&0&2\\-1&-1&-1&1&2&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\v_1\\w_2\\v_2\\w_3\\v_3\end{Bmatrix}$$

همچنین

$$[D]=\begin{bmatrix}a&b&0\\b&a&0\\0&0&c\end{bmatrix}$$

$$[D][B]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-a&-b&a&-b&0&2b\\-b&-a&b&-a&0&2a\\-c&-c&-c&c&2c&0\end{bmatrix}$$

$$[B]^T[D][B]=\frac{1}{16}\begin{bmatrix}a+c&b+c&-a+c&b-c&-2c&-2b\\b+c&a+c&-b+c&a-c&-2c&-2a\\-a+c&-b+c&a+c&-b-c&-2c&2b\\b-c&a-c&-b-c&a+c&2c&-2a\\-2c&-2c&-2c&2c&4c&0\\-2b&-2a&2b&-2a&0&4a\end{bmatrix}$$

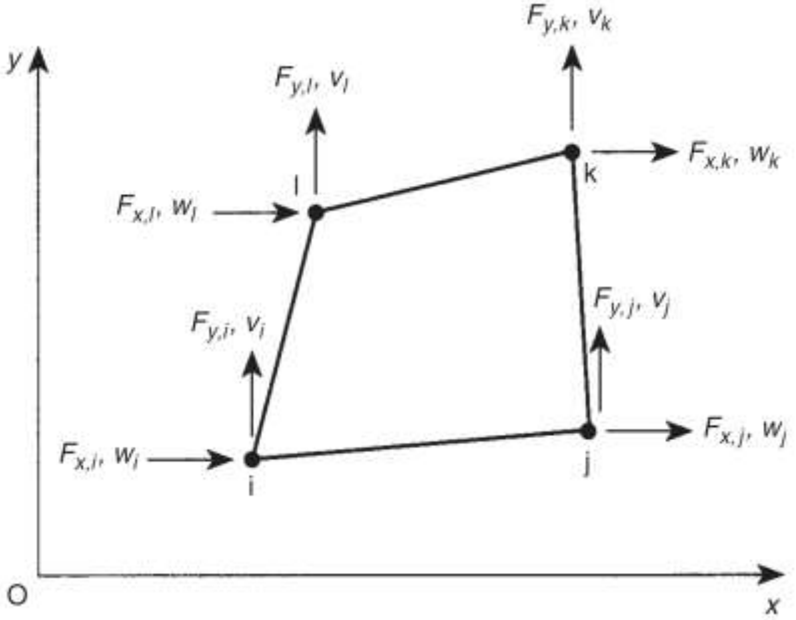
با استفاده از رابطه ۱۷-۸۱ داریم:

$$[K^e]=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}a+c&b+c&-a+c&b-c&-2c&-2b\\b+c&a+c&-b+c&a-c&-2c&-2a\\-a+c&-b+c&a+c&-b-c&-2c&2b\\b-c&a-c&-b-c&a+c&2c&-2a\\-2c&-2c&-2c&2c&4c&0\\-2b&-2a&2b&-2a&0&4a\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی برای المان مربعی

ماتریس‌های مربعی نیز به یکی از المان‌هایی است که با ترکیب با المان‌های مثلثی مورد استفاده قرار می‌گیرند. شکل۱۷-۱٤ یک المان مربعی در صفحه مختصات Oxy را نشان می‌دهد که i، j، k و l گوشه این المان می‌باشند. بارهای گرهی و جابجایی‌های گرهی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\{\delta^e\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ v_i \\ w_j \\ v_j \\ w_k \\ v_k \\ w_l \\ v_l \end{Bmatrix} \qquad \{F^e\} = \begin{Bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{x,j} \\ F_{y,j} \\ F_{x,k} \\ F_{y,k} \\ F_{x,l} \\ F_{x,l} \end{Bmatrix} \tag{۸۲-۱۷}$$



شکل۱۷-۱۴ المان مربعی

به مانند روش ارائه شده برای المان مثلثی شکل، در اینجا نیز با انتخاب یک تابع جابجایی کار را ادامه می‌دهیم. تابع انتخاب شده بایستی شرایط مرزی برای هر یک از هشت درجه آزادی را ارضا نمایند. تابع را به صورت یک عبارت چند جمله‌ای با هشت ضریب در نظر می‌گیریم:

$$\left.\begin{aligned} w(x,y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x,y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned}\right\} \tag{۸۳-۱۷}$$

جملات ثابت α_1 و α_5 حرکت صلب داخل صفحه المان را نشان می‌دهند. با بازنویسی۱۷–۸۳ به فرم ماتریسی داریم:

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \qquad (۸٤–۱۷)$$

یا

$$\begin{Bmatrix} w(x,y) \\ v(x,y) \end{Bmatrix} = [f(x,y)]\{\alpha\} \qquad (۸۵–۱۷)$$

با جانشانی مختصات و جابجایی‌های نقاط داریم:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ v_i \\ w_j \\ v_j \\ w_k \\ v_k \\ w_l \\ v_l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i & x_i y_i \\ 1 & x_j & y_j & x_j y_j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j & x_j y_j \\ 1 & x_k & y_k & x_k y_k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k & x_k y_k \\ 1 & x_l & y_l & x_l y_l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_l & y_l & x_l y_l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \qquad (۸٦–۱۷)$$

و به فرم ماتریسی به صورت زیر داریم:

$$\{\delta^e\} = [A]\{\alpha\}$$
$$\{\alpha\} = [A^{-1}]\{\delta^e\} \qquad (۸۷–۱۷)$$

معکوس ماتریس $[A]$ در مثال۱۷–٤ توضیح داده شد.

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}0&1&0&y&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&x\\0&0&1&x&0&1&0&y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\\\alpha_7\\\alpha_8\end{Bmatrix} \quad (۸۸-۱۷)$$

مثال۱۷-٤) المان مستطیلی برای حالت تنش صفحه‌ای را در نظر بگیرید که در صفحه *Oxy* قرار داشته و مختصات گوشته‌ها آن به صورت *1(-2,-1)*، *2(2,-1)*، *3(2,1)* و *4(-2,1)* می‌باشد. (ابعاد بر حسب متر می‌باشد). جابجایی گره‌ها به صورت زیر می‌باشد:

$w_1=0.001 \qquad w_2=0.003 \qquad w_3=-0.003 \qquad w_4=0$

$v_1=-0.004 \qquad v_2=-0.002 \qquad v_3=0.001 \qquad v_4=0.001$

در صورتی که مدول یانگ برابر $200000N/mm^2$ و نسبت پواسون برابر *0.3* باشد، مقدار تنش در مرکز المان را بدست آورید:

حل) با استفاده از رابطه۱۷-۸۳ داریم:

الف $w_1=\alpha_1-2\alpha_2-\alpha_3+2\alpha_4=0.001$

ب $w_2=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_4=0.003$

پ $w_3=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4=-0.003$

ت $w_4=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3-2\alpha_4=0$

با جانشانی رابطه (ب) در (الف) داریم:

ث $\alpha_2-\alpha_4=0.0005$

حال با جانشانی (ت) در (پ) داریم:

ج $\alpha_2+\alpha_4=-0.00075$

با جانشانی (ج) در (ث) داریم:

ح $\alpha_4=-0.000625$

در نتیجه از هر دو رابطه (ث) و (ج) داریم:

خ $\alpha_2=-0.000125$

با جمع روابط (الف) و (ب) داریم:

$$\alpha_1 - \alpha_3 = 0.002 \qquad \text{د}$$

با جمع روابط (پ) و (ت) داریم:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = -0.0015 \qquad \text{ذ}$$

حال با جمع دو رابطه (د) و (ذ) داریم:

$$\alpha_3 = -0.00175 \qquad \text{ر}$$

با استفاده رابطه۱۷-۸۳ داریم:

$$\alpha_5 = -0.001$$

$$\alpha_6 = 0.00025$$

$$\alpha_7 = 0.002$$

$$\alpha_8 = -0.00025$$

حال با جانشانی برای α_1، α_2، ....، α_8 در رابطه۱۷-۸۳ داریم:

$$w_i = 0.00025 - 0.000125\,x - 0.00175\,y - 0.000625\,xy$$

و

$$v_i = -0.001 + 0.00025\,x + 0.002\,y - 0.00025\,xy$$

و همچنین با استفاده از رابطه۱۷-۷۵ داریم:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x} = -0.000125 - 0.000625y$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.002 - 0.00025x$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -0.0015 - 0.000625x - 0.00025y$$

در مرکز المان داریم: $x=0$ و $y=0$

$$\varepsilon_x = -0.000125$$

$$\varepsilon_y = 0.002$$

$$\gamma_{xy} = -0.0015$$

بنابراین با استفاده از رابطه۱۷-۷۹ داریم:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right) = \frac{200000}{1-0.3^2}\left(-0.000125 + \left(0.3 \times 0.002\right)\right)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\Rightarrow \qquad \sigma_x = 104.4\frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right) = \frac{200000}{1-0.3^2}\left(0.002 + \left(0.3\times 0.000125\right)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_y = 431.3\frac{N}{mm^2}$$

و

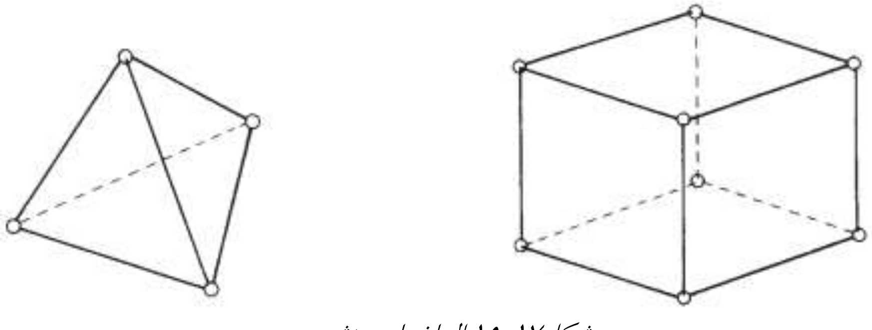
$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\nu^2}\times\frac{1}{2}\left(1-\nu\right)\gamma_{xy} = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\gamma_{xy}$$

بنابراین

$$\tau_{xy} = \frac{200000}{2\left(1+0.3\right)}\times\left(-0.0015\right)$$

$$\tau_{xy} = -115.4\frac{N}{mm^2}$$

در حالات سه بعدی معمولاً از المان‌های منشوری استفاده می‌شود. دو نمونه از این المان‌ها در شکل۱۷-۱۵ نشان داده شده است.



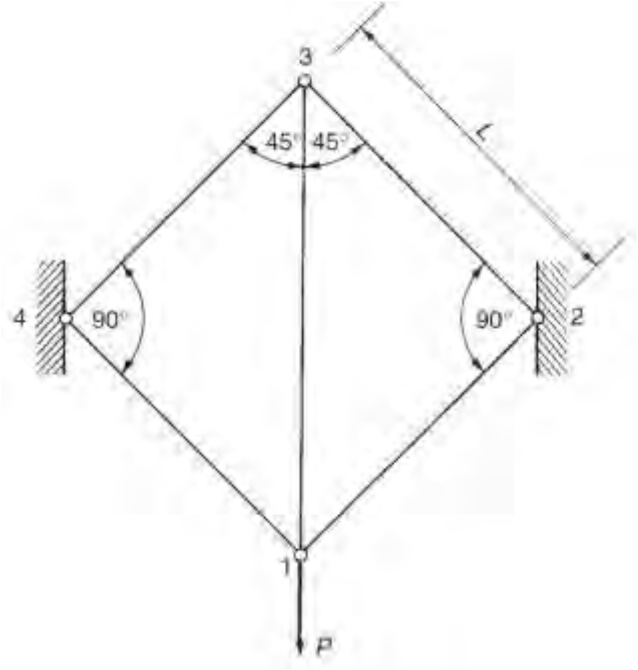
شکل۱۷-۱۵ المان‌های منشوری

به عنوان مثال المان مکعبی دارای ۸ گره می‌باشد که هر گره دارای ۳ درجه آزادی بوده و کل درجات آزادی آن برابر ۲۴ می‌باشد. از نظر عددی روابط حاکم بر شبکه یا مش المان محدود به صورت دستگاه معادلات جبری بیان می‌گردد که با حل آن مجهولات گرهی به دست می‌آیند. با دانستن میدان فرض شده برای هر المان و نیز مجهولات گرهی تغییرات مکانی متغییر حالت (مجهول) در هر المان بدست می‌آید. بنابراین تغییرات برای کل سازه به صورت المان به المان حاصل می‌شود. نکته قابل توجه این است که روش المان محدود یک روش تقریبی است و نه یک روش دقیق. (مانند سایر روش‌های عددی)

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

مسائل

۱) شکل زیر یک خرپای متقارن به صورت مربعی را نشان می‌دهد که گره‌های آن با شماره‌های ۱۲۳٤ نامگذاری شده‌اند. سختی محوری برای تمام اعضا برابر EA بوده و در گره‌های ۲و٤ دارای تکیه‌گاه می‌باشد. با استفاده از روش سختی، جابجایی در گره‌های ۱و ۳ و همچنین مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی و نیروهای داخلی را تعیین کنید.



شکل۱۷-۱٦ تیر مسئله۱

حل) با توجه به شکل فوق و شکل۱۷-۳ داریم:

عضو	12	23	34	41	13
طول	L	L	L	L	$\sqrt{2}L$
$\lambda(\cos\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
$\mu(\sin\theta)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1

ماتریس سختی برای هر یک از اعضا توسط رابطه۱۷-۲۳ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

Web: www.M-Alirezaei.com　　استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$[K_{12}]=\frac{AE}{2L}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]=\frac{AE}{2L}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[K_{34}]=\frac{AE}{2L}\begin{bmatrix}1&1&-1&-1\\1&1&-1&-1\\-1&-1&1&1\\-1&-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$[K_{41}]=\frac{AE}{2L}\begin{bmatrix}1&-1&-1&1\\-1&1&1&-1\\-1&1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$[K_{13}]=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}$$

با استفاده از روش ارائه شده در رابطه۱۷-٤، ماتریس سختی بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix}F_{x,1}\\F_{y,1}\\F_{x,2}\\F_{y,2}\\F_{x,3}\\F_{y,3}\\F_{x,4}\\F_{y,4}\end{Bmatrix}=\frac{AE}{2L}\begin{bmatrix}2&0&-1&-1&0&0&-1&1\\0&2+\sqrt{2}&-1&-1&0&-\sqrt{2}&1&-1\\-1&-1&2&0&-1&1&0&0\\-1&-1&0&2&1&-1&0&0\\0&0&-1&1&2&0&-1&-1\\0&-\sqrt{2}&1&-1&0&2+\sqrt{2}&-1&-1\\-1&1&0&0&-1&-1&2&0\\1&-1&0&0&-1&-1&0&2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1=0\\v_1\\u_2=0\\v_2=0\\u_3=0\\v_3\\u_4=0\\v_4=0\end{Bmatrix}\qquad \text{الف}$$

در رابطه (الف) داریم:

$$F_{y,1}=-P \quad , \quad F_{x,1}=F_{x,3}=F_{y,3}=0$$

بنابراین

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel　　کانال تلگرام:

ب $$F_{y,1}=-P=\frac{AE}{2L}\left[\left(2+\sqrt{2}\right)v_1-\sqrt{2}v_3\right]$$

پ $$F_{y,3}=0=\frac{AE}{2L}\left[-\sqrt{2}v_1+\left(2+\sqrt{2}\right)v_3\right]$$

با استفاده از رابطه (پ) داریم:

ت $$v_1=\left(1+\sqrt{2}\right)v_3$$

با جایگذاری v_1 در رابطه (ب) داریم:

$$v_3=-\frac{0.293PL}{AE}$$

از رابطه (ت) داریم:

$$v_1=-\frac{0.707PL}{AE}$$

در نتیجه

$$F_{12}=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ 0+\dfrac{0.707PL}{AE}\end{Bmatrix}=\frac{P}{2}=F_{14}\quad \text{از تقارن}$$

$$F_{13}=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ -\dfrac{0.293PL}{AE}+\dfrac{0.707PL}{AE}\end{Bmatrix}=0.293P$$

$$F_{23}=\frac{AE}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ -\dfrac{0.293PL}{AE}-0\end{Bmatrix}=-0.207P=F_{43}\quad \text{از تقارن}$$

با استفاده از رابطه (الف) مقدار عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها برابر است با:

$$F_{x,2}=\frac{AE}{2L}\left(-v_1+v_3\right)=0.207P$$

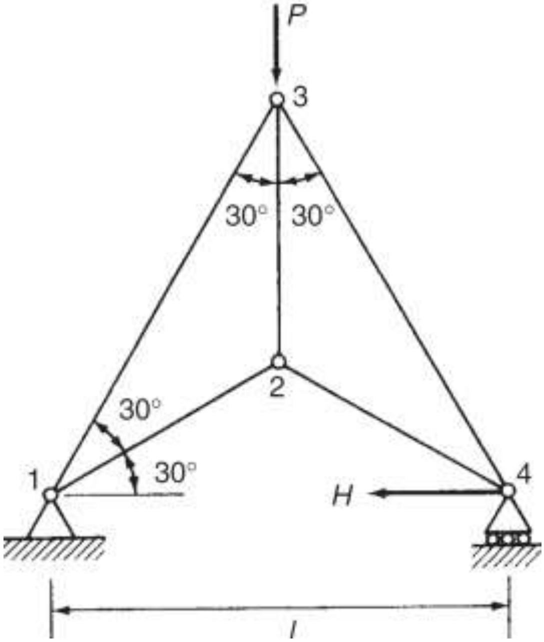
$$F_{y,2}=\frac{AE}{2L}\left(-v_1-v_3\right)=0.5P$$

$$F_{x,4}=\frac{AE}{2L}\left(v_1-v_3\right)=-0.207P$$

$$F_{y,4}=\frac{AE}{2L}\left(-v_1-v_3\right)=0.5P$$

۲) در صورتی که بخواهیم در شکل۱۷-۱۷، جابجایی افقی گره٤ برابر صفر باشد، نسبت H/P و همچنین مقدار جابجایی‌های گره‌های ۲ و۳ را تعیین کنید. سختی محوری برای تمام اعضا برابر EA می‌باشد.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۷-۱۷ تیر مسئله ۲

حل) با توجه به شکل فوق و شکل۱۷-۳ داریم:

عضو	12	23	34	31	24
طول	$\frac{l}{\sqrt{3}}$	$\frac{l}{\sqrt{3}}$	l	l	$\frac{l}{\sqrt{3}}$
$\lambda(\cos\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\mu(\sin\theta)$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$

ماتریس سختی برای هر یک از اعضا توسط رابطه۱۷-۲۳ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$[K_{12}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$[K_{34}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{31}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{24}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\\ -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ F_{x,4} \\ F_{y,4} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \frac{1+3\sqrt{3}}{4} & \frac{3+3\sqrt{3}}{4} & \frac{-3\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 \\ \frac{3+3\sqrt{3}}{4} & \frac{3+3\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & 0 \\ \frac{-3\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{-3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{3\sqrt{3}}{2} & 0 & -\sqrt{3} & \frac{3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-1}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \frac{3}{2}+\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{-3\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1+3\sqrt{3}}{4} & \frac{-3+\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{-\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{-3+\sqrt{3}}{4} & \frac{3+\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1=0 \\ v_1=0 \\ u_2=0 \\ v_2 \\ u_3=0 \\ v_3 \\ u_4=0 \\ v_4=0 \end{Bmatrix} \qquad \text{الف}$$

در رابطه (الف) داریم:

$$F_{x,2} = F_{y,2} = 0 \quad , \quad F_{x,3} = 0 \quad , \quad F_{y,3} = -P \quad , \quad F_{x,3} = -H$$

بنابراین

$$F_{y,2} = 0 = \frac{AE}{l}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}v_2 - \sqrt{3}v_3\right) \qquad \text{ب}$$

$$F_{y,3} = -P = \frac{AE}{l}\left[-\sqrt{3}v_2 + \left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)v_3\right] \qquad \text{پ}$$

با استفاده از رابطه (ب) داریم:

$$v_2 = \frac{2}{3}v_3 \qquad \text{ت}$$

با جایگذاری v_2 در رابطه (پ) داریم:

$$-\frac{Pl}{AE} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}v_3 + \frac{3}{2}v_3 + \sqrt{3}v_3$$

بنابراین:

$$v_3 = -\frac{6Pl}{\left(9+2\sqrt{3}\right)AE}$$

از رابطه (ت) داریم:

$$v_2 = -\frac{4Pl}{\left(9+2\sqrt{3}\right)AE}$$

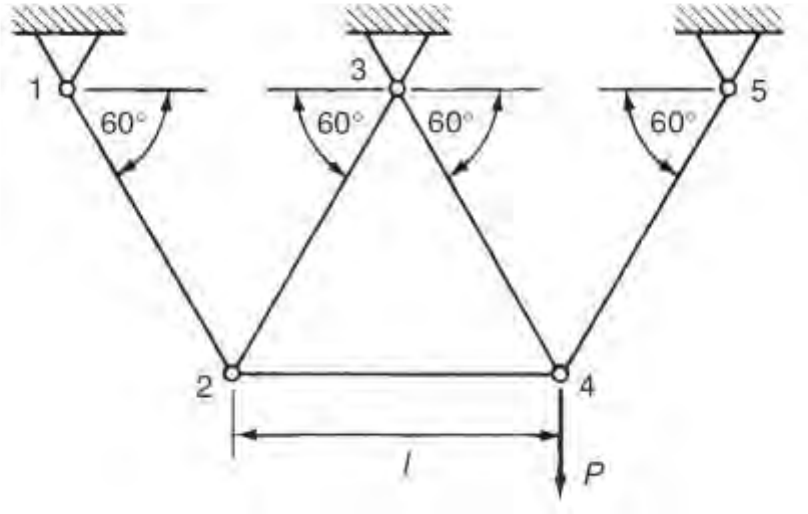
با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$F_{x,4} = -H = \frac{AE}{2l}\left(\frac{3}{4}v_2 + \frac{\sqrt{3}}{4}v_3\right)$$

با جایگذاری v_2 و v_3 داریم:

$$H = 0.449P$$

۳) خرپای صفحه‌ای نشان داده شده در شکل۱۷–۱۸ را در نظر بگیرید. مقدار نیروی داخلی ایجاد شده در عضو۲٤ را تعیین کنید.



شکل۱۷–۱۸ تیر مسئله ۳

حل) با توجه به شکل فوق و شکل۱۷–۳ داریم:

عضو	12	23	34	45	24
طول	l	l	l	l	l
$\lambda(\cos\theta)$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\mu(\sin\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0

ماتریس سختی برای هر یک از اعضا توسط رابطه۱۷–۲۳ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$[K_{12}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{34}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{45}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\ -\frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

$$[K_{24}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ماتریس سختی به صورت زیر بدست خواهد آمد:

الف

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ F_{y,1} \\ F_{x,2} \\ F_{y,2} \\ F_{x,3} \\ F_{y,3} \\ F_{x,4} \\ F_{y,4} \\ F_{x,5} \\ F_{y,5} \end{Bmatrix} = \frac{AE}{4l} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 3 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & -4 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & -\sqrt{3} & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 2 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 & \sqrt{3} & 6 & 0 & -1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & -3 & 0 & 6 & -\sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{3} & -3 & \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 = 0 \\ v_5 = 0 \end{Bmatrix}$$

در رابطه (الف) داریم:

$$F_{x,2} = F_{y,2} = 0 \quad , \quad F_{x,4} = 0 \quad , \quad F_{y,4} = -P$$

بنابراین

ب $$F_{x,2} = 0 = \frac{AE}{4l}\left(6u_2 - 4u_4\right)$$

پ $$F_{y,2} = 0 = \frac{AE}{l}\left(6v_2\right)$$

ت $$F_{x,4} = 0 = \frac{AE}{4l}\left(-4u_2 + 6u_4\right)$$

ث $$F_{y,4} = -P = \frac{AE}{4l}\left(6v_4\right)$$

با استفاده از رابطه (ث) داریم:

ت $$v_4 = -\frac{2Pl}{3AE}$$

با استفاده از رابطه (پ) داریم:

$$v_2 = 0$$

بنابراین:

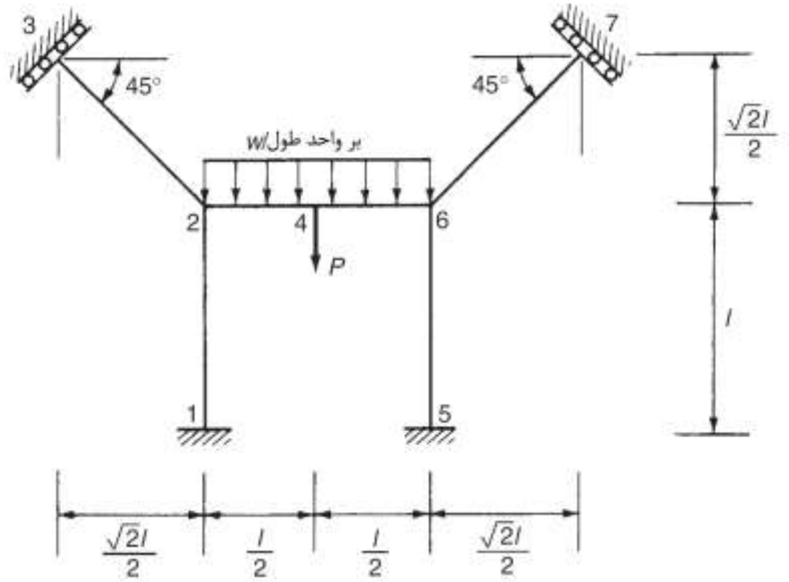
$$u_2 = u_4 = 0$$

در نتیجه

$$F_{24} = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0-0 \\ \dfrac{-2Pl}{3AE} - 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_{24} = 0$$

٤) قاب شکل١٧-١٩ که به صورت متقارن با گره‌های ١-٢-٣-٤-٥-٦-٧ را در نظر بگیرید. سازه در گره‌های ١و ٥ به صورت گیردار و در گره‌های ٣ و٧ به صورت هدایت شونده با زاویه ٤٥ می‌باشد. بار متمرکز به میزان P در گره ٤ و یک بار گسترده خطی به شدت w در طول ٦-٢ اثر می‌کند. فرض کنید سختی خمشی برای کل سازه برابر EI می‌باشد. جابجایی گره‌های سازه را تعیین نمایید و همچنین توضیح دهید نیروی اعضا چگونه محاسبه می‌شوند.



شکل١٧-١٩ تیر مسئله٤

حل) بار گسترده اعمال شده در طول ٦-٢ را می‌توان به دو بار متمرکز به میزان $wl/4$ بر روی گره‌های ٢و٦ و یک بار متمرکز به میزان $wl/2$ بر روی گره ٤ در نظر گرفت. با توجه به شکل فوق و شکل١٧-٣ داریم:

عضو	12	23	24	46	56	67
طول	l	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{2}$	l	l
$\lambda(\cos\theta)$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
$\mu(\sin\theta)$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

ماتریس سختی برای هر یک از اعضا توسط رابطه۱۷-۲۳ به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$[K_{12}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & & & & & \mathbf{SYM}\\ 0 & 0 & & & & \\ 6 & 0 & 4 & & & \\ -12 & 0 & -6 & 12 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$[K_{23}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}6 & & & & & \mathbf{SYM}\\ 6 & 6 & & & & \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & 4 & & & \\ 6 & 6 & -\frac{6}{\sqrt{2}} & 6 & & \\ -6 & -6 & -\frac{6}{\sqrt{2}} & 6 & 6 & \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{4}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$[K_{24}]=[K_{46}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}0 & & & & & \mathbf{SYM}\\ 0 & 96 & & & & \\ 0 & -24 & 8 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & -96 & 24 & 0 & 96 & \\ 0 & -24 & 4 & 0 & 24 & 8\end{bmatrix}$$

$$[K_{56}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & & & & & \mathbf{SYM}\\ 0 & 0 & & & & \\ 6 & 0 & 4 & & & \\ -12 & 0 & -6 & 12 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

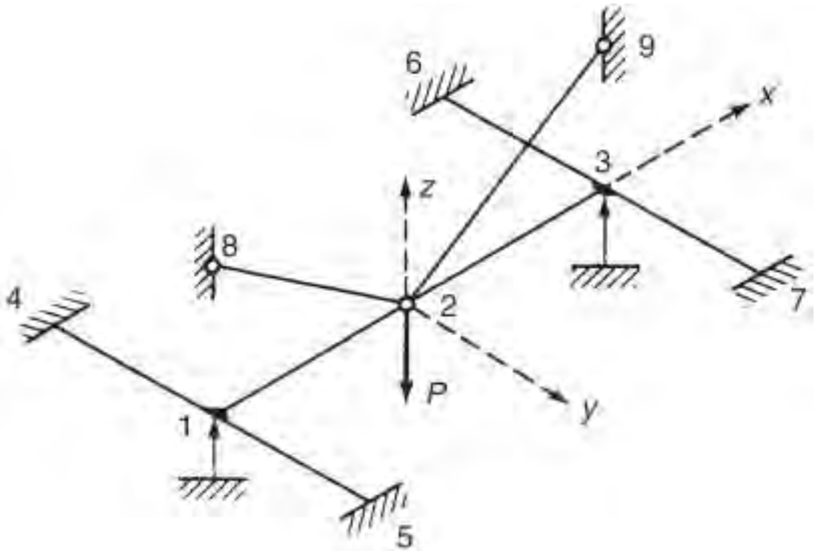
$$[K_{67}]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6 & & & & & \text{SYM} \\ -6 & 6 & & & & \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} & 4 & & & \\ -6 & 6 & -\frac{6}{\sqrt{2}} & 6 & & \\ 6 & -6 & \frac{6}{\sqrt{2}} & -6 & 6 & \\ \frac{6}{\sqrt{2}} & -\frac{6}{\sqrt{2}} & 2 & \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{6}{\sqrt{2}} & \frac{4}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

ماتریس سختی توسط روش شرح داده از ترکیب ماتریس‌های فوق بدست می‌آید که به صورت یک ماتریس 21×21 می‌باشد. جابجایی‌های معلوم گره‌ها به صورت زیر می‌باشند.

$$u_1=v_1=\theta_1=u_5=v_5=\theta_5=u_2=u_4=u_6=\theta_3=\theta_7=0$$

همچنین با استفاده از رابطه $\{F\}=[K]\{\delta\}$ عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی تعیین می‌شوند.

۵) سازه شکل زیر را در نظر بگیرید که در صفحه‌های xz و yz متقارن می‌باشد. مختصات نقاط گرهی برای یک چهارم سازه در جدول الف آورده شده است. سختی هر یک از اعضای سازه به علت نیروی محوری، لنگر خمشی و پیچش در جدول (ب) داده شده است.



شکل۱۷-۲۰ تیر مسئله۵

جدول الف

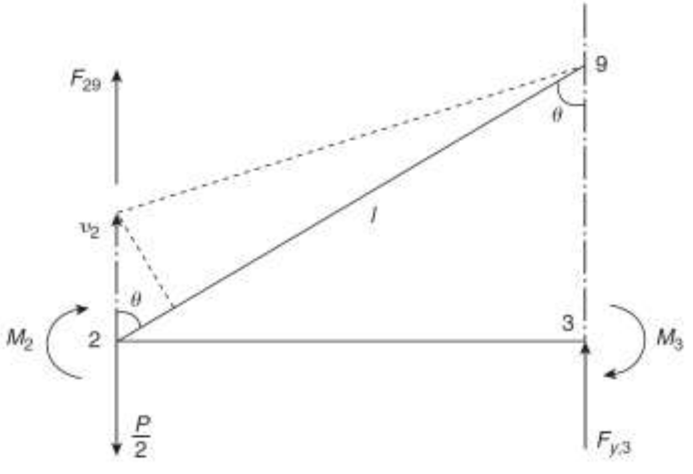
گره	x	y	z
2	0	0	0
3	L	0	0
7	L	0.8L	0
9	L	0	L

جدول ب

	اثر		
عضو	محوری	خمشی	پیچشی
23	-	EI	_
7	L	0.8L	0
9	L	0	L

با استفاده از روش سختی مستقیم، نیروی موجود در هر یک از اعضا را تعیین نمایید. همچنین دیاگرام برش و لنگر خمشی برای عضو ۱۲۳ را ترسیم نمایید.

حل) با توجه به شکل۱۷-۲۰، به علت تقارن $u_2 = 0$ می‌باشد. عضو۲۳ در شکل۱۷-۲۱ نمایش داده شده است.



شکل۱۷-۲۱

$$F_{29} = -\frac{\left(AEv_2 \cos^2 \theta\right)}{l}$$

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$AE = \frac{6\sqrt{2}EI}{L^2} \quad , \quad \theta = 45^\circ \quad , \quad l = \sqrt{2}L$$

$$F_{29} = -\frac{3EI}{L^3}v_2$$

$$F_{y,2} = -\frac{P}{2} - \frac{3EI}{L^3}v_2 \qquad \text{الف}$$

با استفاده از رابطه۱۱–۲۶ داریم:

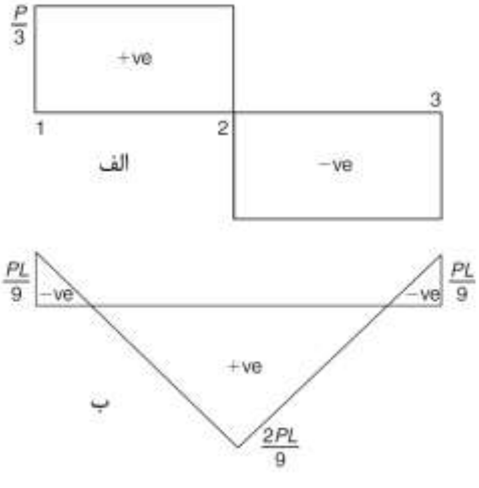
$$M_3 = GJ\frac{d\theta}{dz} = -2\times 0.8EI\frac{\theta_3}{0.8L} = -\frac{2EI}{L}\theta_3 \qquad \text{ب}$$

همچنین با استفاده از رابطه۱۷–۳۱ برای المان ۲۳ داریم

$$\begin{Bmatrix} F_{y,2} \\ \frac{M_2}{L} \\ F_{y,3} \\ \frac{M_3}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \qquad \text{پ}$$

با استفاده از روابط (الف) و (پ) داریم:

$$F_{y,2} = -\frac{P}{2} - \frac{3EI}{L^3}v_2 = \frac{12EI}{L^3}v_2 - \frac{6EI}{L^2}\theta_3$$



شکل۱۷–۲۲

$$15v_2 - 6\theta_3 L = -\frac{PL^3}{2EI} \qquad \text{ت}$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

با استفاده از روابط (ب) و (پ) داریم:

$$\frac{M_3}{L} = -\frac{2EI}{L^2}\theta_3 = -\frac{6EI}{L^3}v_2 + \frac{4EI}{L^2}\theta_3$$

که در آن $\theta_3 = \frac{v_2}{L}$ می‌باشد. با جانشانی θ_3 در رابطه (ت) داریم:

$$v_2 = -\frac{PL^3}{18EI}$$

$$\theta_3 = -\frac{PL^2}{18EI}$$

با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$F_{y,2} = -\frac{P}{2} + \frac{3EI}{L^3}\frac{PL^3}{18EI} = -\frac{P}{3}$$

و همچنین با استفاده از رابطه (ب) داریم:

$$M_3 = \frac{2EI}{L}\frac{PL^2}{18EI} = \frac{PL}{9} = -M_1$$

حال با استفاده از رابطه (پ) داریم:

$$\frac{M_2}{L} = -\frac{EI}{L^3}6v_2 + \frac{2EI}{L^3}\theta_3 L = \frac{2P}{9}$$

$$F_{y,3} = -\frac{12EI}{L^3}v_2 + \frac{6EI}{L^3}\theta_3 L = \frac{P}{3}$$

مقدار نیرو در عضو ۲۹ برابر $\frac{F_{29}}{\cos\theta} = \sqrt{2}F_{29}$ می‌باشد. بنابراین:

$$F_{29} = F_{28} = \sqrt{2}\frac{3EI}{L^3}\frac{PL^3}{18EI} = \frac{\sqrt{2}P}{6}$$ کششی

دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی برای عضو ۱۲۳ در شکل۱۷-۲۲ نشان داده شده است.

$$M_{36} = M_{37} = \frac{PL}{18}$$

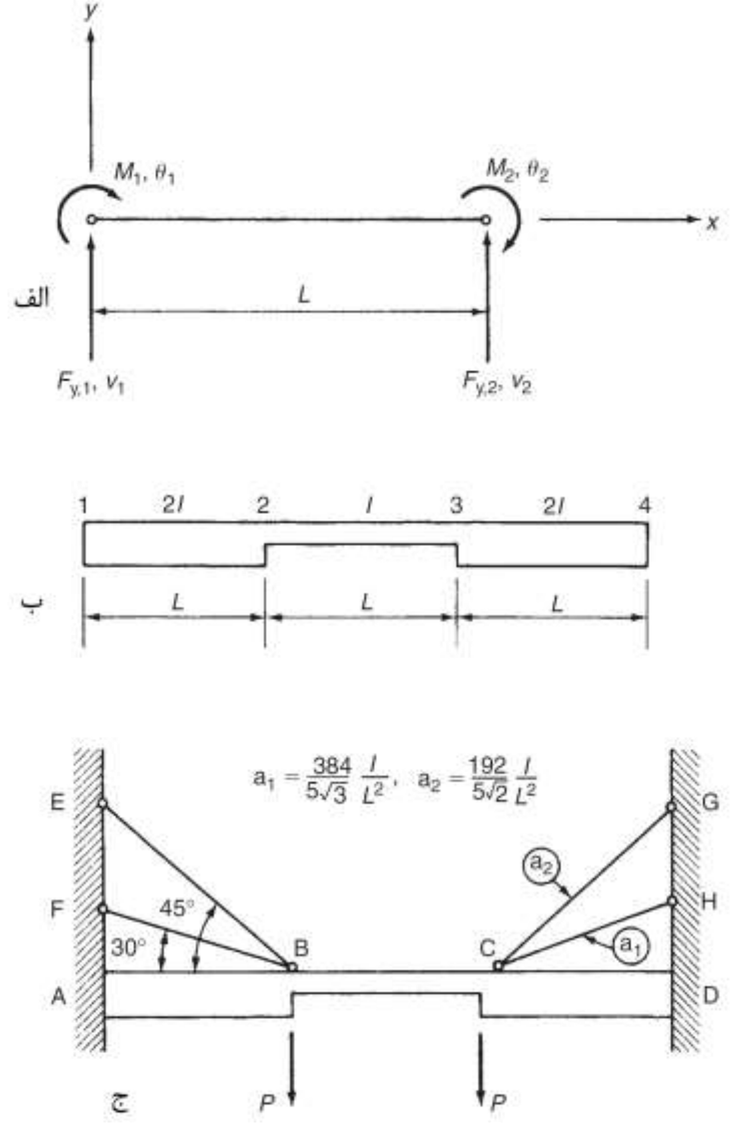
٦) برای تیر نشان داده در شکل۱۷-۲۳الف رابطه بین ماتریس سختی و نیرو- جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\begin{Bmatrix} F_{y,1} \\ \dfrac{M_1}{L} \\ F_{y,2} \\ \dfrac{M_2}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix}$$

برای تیر نشان داده شده در شکل۱۷–۲۳ب رابطه بین ماتریس سختی و نیرو–جابجایی را تعیین کنید. همچنین تیر بارگذاری شده مانند شکل۱۷–۲۳ج را در نظر بگیرید. عضوهای FB و CH دارای سطح مقطع a_1 و عضوهای EB و CG دارای سطح مقطع a_2 می‌باشند. دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر را ترسیم نمایید. از اثر محوری تیر صرف نظر کنید. مصالح استفاده شده در تمام سازه یکی می‌باشد.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۷-۲۳ سازه مسئله۶

حل) ماتریس سختی و رابطه بین نیرو–جابجایی برای تیر به صورت زیر خواهد بود:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\begin{Bmatrix} F_{x,1} \\ \frac{M_1}{L} \\ F_{y,2} \\ \frac{M_2}{L} \\ F_{y,3} \\ \frac{M_3}{L} \\ F_{y,4} \\ \frac{M_4}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 24 & -12 & -24 & -12 & & & & \\ -12 & 8 & 12 & 4 & & & & \\ -24 & 12 & 36 & 6 & -12 & -6 & & \\ -12 & 4 & 6 & 12 & 6 & 2 & & \\ & & -12 & 6 & 36 & -24 & -24 & -12 \\ & & -6 & 2 & -6 & 12 & 12 & 4 \\ & & & & -24 & 12 & 24 & 12 \\ & & & & -12 & 4 & 12 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 \\ \theta_3 L \\ v_4 \\ \theta_4 L \end{Bmatrix} \quad \text{الف}$$

$$F_2 = -\left(\frac{a_1 E \cos^2 60^\circ}{\frac{2L}{\sqrt{3}}} + \frac{a_2 E \cos^2 45^\circ}{\sqrt{2}L} \right) v_2$$

اما $a_1 = \frac{384I}{5\sqrt{3}L^2}$ و $a_2 = \frac{192I}{5\sqrt{2}L^2}$ بنابراین:

$$F_2 = -\frac{96EI}{5L^3} v_2$$

به طور مشابه

$$F_3 = -\frac{96EI}{5L^3} v_3$$

$$F_{y,2} = -P - \frac{96EI}{5L^3} v_2$$

$$F_{y,3} = -P - \frac{96EI}{5L^3} v_3$$

در رابطه (الف) $v_1 = \theta_1 = v_4 = \theta_4 = 0$ و $M_2 = M_3 = 0$ همچنین با استفاده از تقارن $v_2 = v_3$ و $\theta_2 = -\theta_3$، بنابراین با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$M_2 = 0 = 6v_2 + 12\theta_2 L + 6v_3 + 2\theta_3 L$$

$$12v_2 + 10\theta_2 L = 0$$

$$\Rightarrow \theta_2 = -\frac{6}{5L} v_2$$

همچنین با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$F_{y,2} = -P - \frac{96EI}{5L^3} v_2 = \frac{EI}{L^3}\left(36v_2 + 6\theta_2 L - 12v_3 - 6\theta_3 L\right) - P - \frac{96EI}{5L^3} v_2$$

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\Rightarrow F_{y,2}=\frac{48EI}{5L^3}v_2$$

$$v_2=-\frac{5PL^3}{144EI}=v_3$$

و

$$\theta_2=\frac{PL^2}{24EI}=-\theta_3$$

$$F_{y,1}=\frac{EI}{L^3}\left(-24v_2-12\theta_2L\right)=\frac{P}{3}=F_{y,4}$$

$$M_1=\frac{EI}{L^2}\left(12v_2+4\theta_2L\right)=-\frac{PL}{4}=-M_4$$

همچنین

$$F_2=F_3=\frac{96EI}{5L^3}\frac{5PL^3}{144EI}=\frac{2P}{3}$$

نیروهای اعمال شده بر تیر در شکل۱۷-۲۴ الف نشان داده شده است. همچنین دیاگرام نیروی برشی و گشتاور خمشی در شکل۱۷-۲۴ب ترسیم شده است.

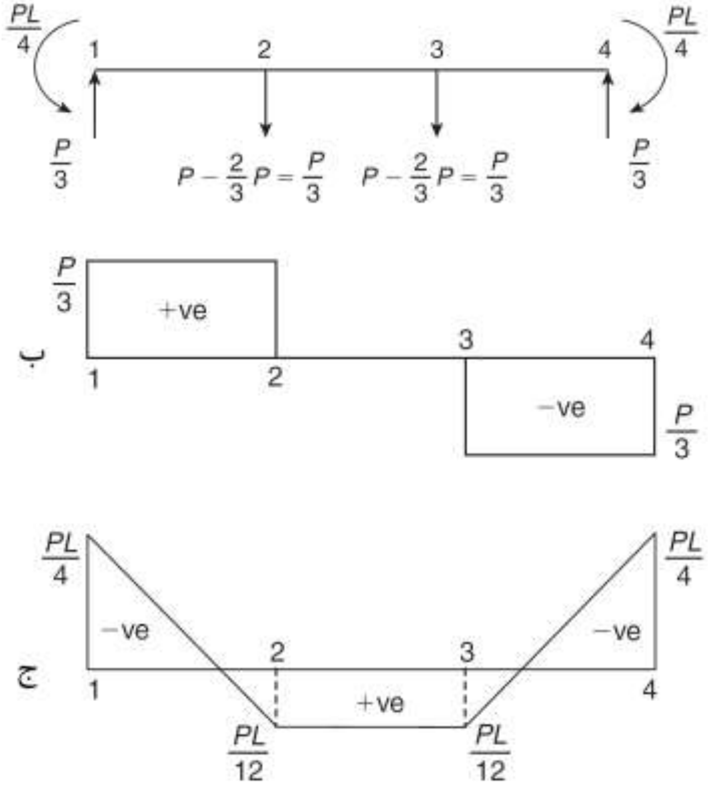
$$F_{BF}=F_{CH}=\frac{a_1E}{\frac{2L}{\sqrt{3}}}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ v_2-0\end{Bmatrix}$$

$$F_{BF}=F_{CH}=\frac{384EI\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\times 2L^3}\frac{1}{2}\frac{5PL^3}{144EI}=\frac{2}{3}P$$

$$F_{BE}=F_{CG}=\frac{a_2E}{\sqrt{2}L}\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0-0\\ v_2-0\end{Bmatrix}$$

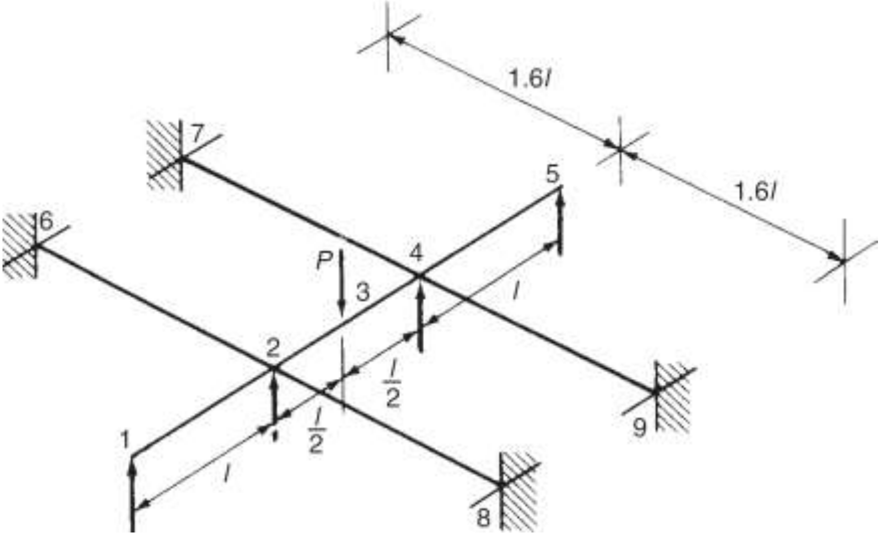
$$F_{BE}=F_{CG}=\frac{192EI}{5\sqrt{2}\times\sqrt{2}L^3}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{5PL^3}{144EI}=\frac{\sqrt{2}P}{3}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل ۱۷-۲۴

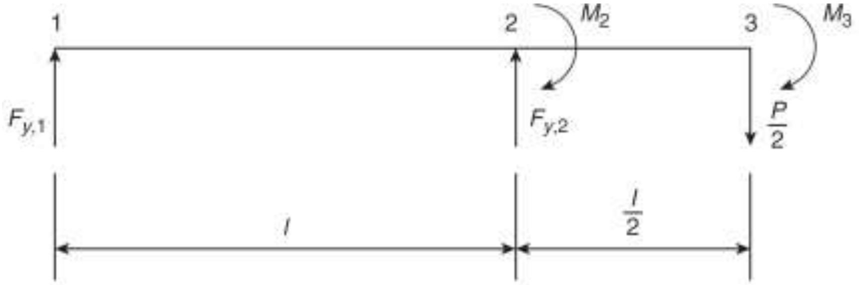
۷) سازه متقارن نشان داده شده در شکل۱۷-۲۵ در نقاط ۶،۷،۸،۹ دارای تکیه‌گاه‌های گیردار و در نقاط ۱،۲،۴،۵ دارای تکیه‌گاه‌های غلتکی می‌باشد. همچنین در نقطه ۳ تحت یک نیروی قائم P می‌باشد. با استفاده از روش سختی نیروها و جابجایی‌ها در هر یک از اعضا را محاسبه و همچنین مقدار عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را تعیین نمایید. دیاگرام گشتاور خمشی و نیروی برشی برای عضو ۱۲۳ را نیز ترسیم نمایید. تمام اعضا دارای مشخصات یکسان می‌باشند و $GJ=0.8EI$ می‌باشد.



شکل۱۷-۲۵ سازه مسئله۷

حل) نیروهای موثر بر عضو ۱۲۳ در شکل۱۷-۲۶ نشان داده شده است. گشتاور M_2 باعث تولید پیچش در عضو ۲٦ و ۲۸ می‌شود. با استفاده از رابطه۱۱-۲٦ داریم:

الف
$$M_2 = -2GJ\frac{\theta_2}{1.6l} = -EI\frac{\theta_2}{l}$$



شکل۱۷-۲٦

حال با استفاده از رابطه۱۷-۳۱، برای عضو ۱۲ داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{y,1} \\ \frac{M_1}{L} \\ F_{y,2} \\ \frac{M_2}{L} \\ F_{y,3} \\ \frac{M_3}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & 2 \\ -12 & 6 & 12 & 6 \\ -6 & 2 & 6 & 4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 L \\ v_2 \\ \theta_2 L \end{Bmatrix} \quad \text{ب}$$

و همچنین برای عضو۲۳

$$\begin{Bmatrix} F_{y,2} \\ \frac{M_2}{L} \\ F_{y,3} \\ \frac{M_3}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 96 & -24 & -96 & -24 \\ -24 & 8 & 24 & 4 \\ -96 & 24 & 96 & 24 \\ -24 & 4 & 24 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 L \\ v_3 \\ \theta_3 L \end{Bmatrix} \quad \text{پ}$$

با ترکیب روابط (ب) و (پ) داریم:

$$\begin{Bmatrix} F_{y,1} \\ \frac{M_1}{L} \\ F_{y,2} \\ \frac{M_2}{L} \\ F_{y,3} \\ \frac{M_3}{L} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ -12 & 6 & 108 & -18 & -96 & -24 \\ -6 & 2 & -18 & 12 & 24 & 4 \\ 0 & 0 & -96 & 24 & 96 & 24 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 24 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 l \\ v_2 \\ \theta_2 l \\ v_3 \\ \theta_3 l \end{Bmatrix} \quad \text{ت}$$

در رابطه (ت) $v_1 = v_2 = 0$ و $\theta_3 = 0$. همچنین $M_1 = 0$ و $F_{y,3} = -\frac{P}{2}$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از رابطه (ت) داریم:

$$\frac{M_1}{l} = 0 = \frac{EI}{l^3}\left(4\theta_1 l + 2\theta_2 l\right)$$

$$\theta_1 = -\frac{\theta_2}{2} \quad \text{ث}$$

همچنین با استفاده از روابط (الف) و (ت) داریم:

$$\frac{M_2}{l} = -\frac{EI}{l^2}\theta_2 = \frac{EI}{l^3}\left(2\theta_1 l + 12\theta_2 l + 24 v_3\right)$$

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

بنابراین

$$13\theta_2 l + 2\theta_1 + 24v_3 = 0 \qquad \text{ج}$$

در نهایت با استفاده از رابطه (ت) خواهیم داشت:

$$F_{y,3} = -\frac{P}{2} = \frac{EI}{l^3}\left(24\theta_2 l + 96v_3\right)$$

$$v_3 = -\frac{Pl^3}{192EI} - \frac{\theta_2 l}{4} \qquad \text{ح}$$

با جانشانی θ_1 از رابطه (ث) در رابطه (ج) و مقدار v_3 از رابطه (ح) در رابطه (ج) داریم:

$$\theta_2 = \frac{Pl^2}{48EI}$$

سپس با استفاده از رابطه (ث) خواهیم داشت:

$$\theta_1 = -\frac{Pl^2}{96EI}$$

و با استفاده از رابطه (ح) داریم:

$$v_3 = -\frac{Pl^2}{96EI}$$

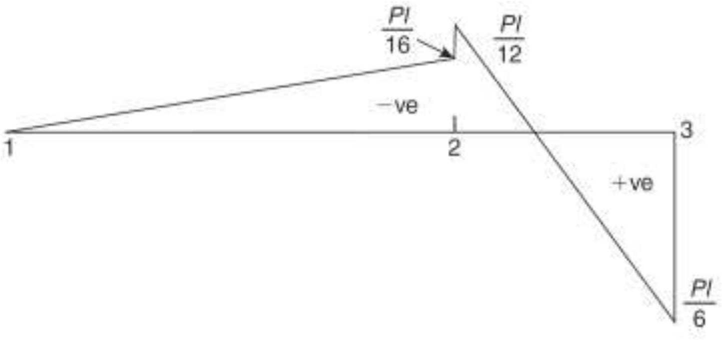
حال با جانشانی، در رابطه (ت) داریم:

$$F_{y,1} = -\frac{P}{16}$$

$$F_{y,2} = \frac{9P}{16}$$

$$M_2 = -\frac{Pl}{48}$$

دیاگرام گشتاور خمشی برای عضو ۱۲۳ در شکل۱۷–۲۷ نشان داده شده است.



شکل۱۷–۲۷

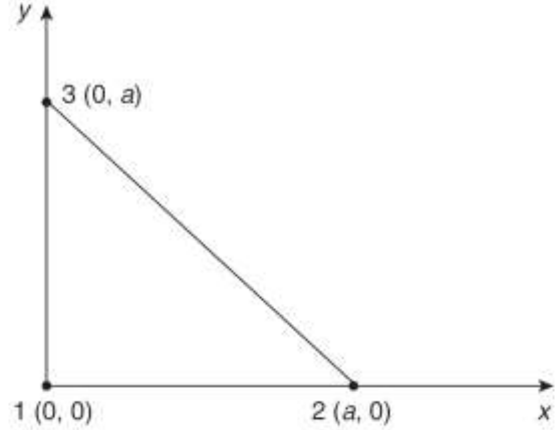
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

۸) در یک مسئله تنش صفحه‌ای با المان مثلثی شکل که دارای گره‌های ۱۲۳ به مختصات $(0,0)$، $(a,0)$ و $(0,a)$ می‌باشد.

الف)فرم ماتریس $[B]$ و ب) ماتریس سختی $[K^e]$ را بدست آورید.

حل) الف) المان مثلثی در شکل ۱۷-۲۸ نشان داده شده است. تابع جابجایی برای این المان با استفاده از رابطه۱۷-۶۹ بدست می‌آید.

$$w_1 = \alpha_1 \qquad v_1 = \alpha_4$$
$$w_2 = \alpha_1 + a\alpha_2 \qquad v_2\alpha_1 + a\alpha_5 \qquad \text{الف}$$
$$w_3 = \alpha_1 + a\alpha_3 \qquad v_3 = \alpha_4 + a\alpha_6$$



شکل۱۷-۲۸

با استفاده از رابطه (الف) داریم:

$$\alpha_1 = w_1 \qquad \alpha_2 = \frac{w_2 - w_1}{a} \qquad \alpha_3 = \frac{w_3 - w_1}{a}$$
$$\alpha_4 = v_1 \qquad \alpha_5 = \frac{v_2 - v_1}{a} \qquad \alpha_6 = \frac{v_3 - v_1}{a}$$

با بازنویسی آن به فرم ماتریسی داریم:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\\\alpha_4\\\alpha_5\\\alpha_6\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\-\frac{1}{a}&0&\frac{1}{a}&0&0&0\\-\frac{1}{a}&0&0&0&\frac{1}{a}&0\\0&1&0&0&0&0\\0&-\frac{1}{a}&0&\frac{1}{a}&0&0\\0&-\frac{1}{a}&0&0&0&\frac{1}{a}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}w_1\\v_1\\w_2\\v_2\\w_3\\v_3\end{Bmatrix}$$

$$\{\alpha\}=\left[A^{-1}\right]\{\delta^e\}$$

همچنین با استفاده از رابطه۱۷-۷۶ داریم:

$$[C]=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$[B]=[C]\left[A^{-1}\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{a}&0&\frac{1}{a}&0&0&0\\0&-\frac{1}{a}&0&0&0&\frac{1}{a}\\-\frac{1}{a}&-\frac{1}{a}&0&\frac{1}{a}&\frac{1}{a}&0\end{bmatrix}$$

ب) با استفاده از رابطه۱۷-۸۱ داریم:

$$\left[K^e\right]=\begin{bmatrix}-\frac{1}{a}&0&-\frac{1}{a}\\0&-\frac{1}{a}&-\frac{1}{a}\\\frac{1}{a}&0&0\\0&0&\frac{1}{a}\\0&0&\frac{1}{a}\\0&\frac{1}{a}&0\end{bmatrix}\frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix}1&\nu&0\\\nu&1&0\\0&0&\frac{1}{2}(1-\nu)\end{bmatrix}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\times\begin{bmatrix} -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{2}a^2t$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\left[K^e\right]=\frac{Et}{4\left(1-\nu^2\right)}\begin{bmatrix} 3-\nu & 1+\nu & -2 & -(1-\nu) & -(1-\nu) & -2\nu \\ 1+\nu & 3-\nu & -2\nu & -(1-\nu) & -(1-\nu) & -2 \\ -2 & -2\nu & 2 & 0 & 0 & 2\nu \\ -(1-\nu) & -(1-\nu) & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ -(1-\nu) & -(1-\nu) & 0 & 1-\nu & 1-\nu & 0 \\ -2\nu & -2 & -2\nu & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

فصل هجدهم
تحلیل پلاستیک تیرها و قاب‌ها

مقدمه

تا به حال تحلیل رفتار سازه‌های ما با این فرض انجام می‌شد که بارهای روی سازه‌ها چه در حالت معین استاتیکی و چه در حالت نامعین استاتیکی[1]، تولید تنش‌هایی می‌کردند که در حدود الاستیک[2] بودند.

طراحی‌هایی که بر اساس این رفتار الاستیک صورت می‌گیرند این تضمین را در برخواهند داشت که بیشترین تنشی که در سازه است از تنش تسلیم، تقسیم بر یک ضریب اطمینان مناسب، تجاوز نخواهد کرد. راهکار دیگر بر مبنای تحلیل پلاستیک[3] است که در آن بارهای لازم برای ویرانی سازه محاسبه می‌شوند. منطق پشت این روش آن است که در اغلب سازه‌های فولادی، بارهایی که لازم است تا موجب ویرانی سازه شوند تا حدی بزرگتر از بارهایی هستند که باعث تسلیم می‌شوند. طراحی‌ای که بر اساس این روش انجام می‌شود بارگذاری لازم برای ایجاد ویرانی و ریزش کامل را محاسبه می‌کند و سپس تضمین می‌کند که این بار بزرگتر از بارگذاری اعمالی است. نسبت بین بار ویرانی به بیشینه بار اعمالی، ضریب بار نامیده می‌شود. اغلب، طراحی پلاستیک یا طراحی بار نهایی منجر به سازه‌های اقتصادی‌تری می‌شود. در این فصل ما مکانیسم ویرانی (فرو ریختن، ریزش، انهدام) پلاستیک را بررسی خواهیم کرد و بارهای ویرانی را برای گستره ای از تیرها و قاب‌ها تعیین می‌کنیم.

۱۸-۱ قضایای تحلیل پلاستیک

[1] Statically determinate or indeterminate
[2] Elastic limit
[3] Plastic analysis

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

سه قاعده اساسی بر تحلیل پلاستیک حاکمند که در سازه‌های الاستو پلاستیک معتبرند، سازه‌هایی که در آنها جابجایی‌ها به حدی کوچک هستند که هندسه سازه جابجا شده تاثیری بر سیستم بارگذاری اعمالی نداشته باشد.

قضیه یکتایی (بی همتایی)

شرایط زیر باید به صورت همزمان توسط یک سازه در شرایط ویران شدنش ارضا شود:

شرایط تعادل بیان می‌کند که گشتاورهای خمشی باید با بارهای اعمالی در تعادل باشند.

شرایط تسلیم بیان می‌کند که گشتاورهای خمشی در هر نقطه سازه نباید فراتر از ممان پلاستیک در آن نقطه باشند.

شرایط مکانیسم بیان می‌کند که لولاهای پلاستیک مناسبی باید شکل داده شوند که بدین ترتیب تمام یا بخشی از سازه یک مکانیسم و سازوکار است.

قضیه حد پایینی یا قضیه ایمن

اگر توزیعی از گشتاورها را بتوان یافت که تعادل بالا و شرایط تسلیم را ارضا نماید سازه امن است یا روی نقطه خرابی است.

قضیه حد بالایی یا قضیه نا ایمن

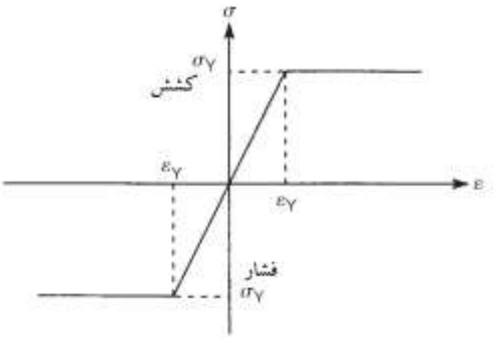
اگر بتوان بارگذاری‌ای را یافت که باعث مکانیزم ویرانی می‌شود، بارگذاری باید برابر یا بزرگتر از بار ویرانی حقیقی باشد. اغلب، در تحلیل پلاستیک، قضیه حد بالایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. ساز و کارهای ویرانی ممکن به صورت فرمول در می‌آیند و بارهای ویرانی مربوطه محاسبه می‌شوند. از قضیه حد بالایی می دانیم که تمام ساز و کارها باید مقداری از بار ویرانی بدهند که بزرگتر یا مساوی بار ویرانی حقیقی است، بنابراین ساز و کار بحرانی، آن ساز و کاری است که پایین‌ترین بار را می‌دهد. ممکن است که یک ساز و کار که مقدار پایین تری از بار ویرانی را می‌دهد از نظرها پنهان بماند. پس باید یک کنترل با قضیه حد پایینی انجام شود.

۱۸-۲ تحلیل پلاستیک تیرها

بیشتر اوقات رفتار پلاستیک پیچیده است و به شکل منحنی تنش کرنش مصالح تیر در کشش و فشار بستگی دارد. خوشبختانه تیرهای با فولاد نرم که به صورت وسیعی در ساخت و ساز مهندسی عمران مورد استفاده قرار می‌گیرند دارای خواص سازه‌ای هستند که

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

به آنها تحلیل نسبتاً ساده‌ای در خمش پلاستیک می‌دهد. در بخش ۸-۳، شکل ۸-۸ دیدیم که فولاد نرم پیش از تنش تسلیمی که به صورتی واضح تعیین شده بود، از قانون هوک پیروی می‌کند و سپس طی تسلیم دستخوش کرنش‌های زیادی می‌شود تا کرنش سخت شدگی باعث افزایش در تنش شود. به منظور تحلیل پلاستیک ما از بالا و پایین نقاط تسلیم چشم پوشی می‌کنیم و منحنی تنش کرنش را مانند شکل ۱۸-۱ به صورتی ایده آل بررسی می‌کنیم. همینطور از اثرات سخت شدگی چشم پوشی می‌نماییم. اما از آنجایی که سخت شدگی افزایش مقاومت را باعث می‌شود، این چشم پوشی در واقع در راستای امنیت بیشتر است و ایمن تر می‌کند.



شکل۱۸-۱ منحنی ایده‌آل شده تنش – کرنش برای فولاد نرم

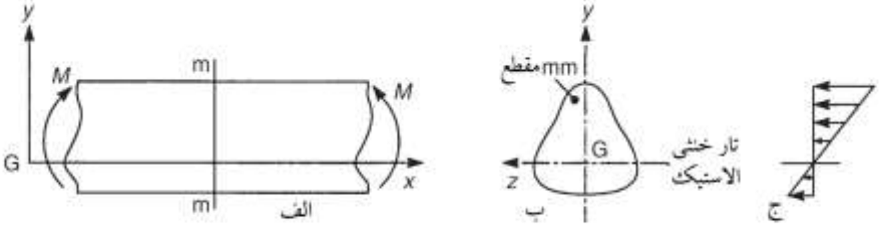
در نهایت اینکه ما فرض می‌کنیم که مدول یانگ E و تنش تسلیم σ_Y دارای مقادیر یکسانی در کشش و فشار هستند. و همینطور فرض می‌کنیم که مقاطع و مقاطع مسطح پس از خمش همچنان مسطح باقی خواهند ماند. آخرین فرض را می‌توان به صورتی تجربی، بسیار نزدیک به حقیقت نشان داد.

خمش پلاستیک تیرهای دارای سطح مقطع متقارن (متقارن در یک محور)

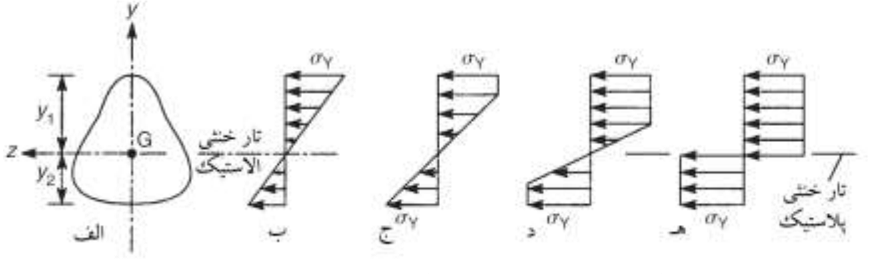
این امر اصلی‌ترین موردی است که ما درباره آن بحث می‌کنیم زیرا خمش پلاستیک تیرهای دارای مقطع دلخواه، پیچیده است و هنوز در مورد آن تحقیق می‌شود. طول تیر نشان داده شده در شکل ۱۸-۲ الف را مورد بررسی قرار دهید. این طول تحت یک ممان خمشی مثبت M قرار گرفته است و در سطح مقطعش دارای تقارن در یک محور است، شکل ۱۸-۲ب. اگر M به اندازه مناسبی کوچک باشد طول تیر به صورت الاستیک خم می‌شود و در هر مقطع دلخواهی همچون mm توزیع تنش مستقیم خطی شکل ۱۸-۲ ج را تولید خواهد

کرد که در آن تنش σ در فاصله y از تار خنثی تیر از معادله ۹-۹ به دست می‌آید. حال فرض کنید که M افزایش یافته است، مرحله‌ای پیش خواهد آمد که بیشینه تنش مستقیم در مقطع، یعنی در آن نقطه‌ای که در دورترین فاصله از تار خنثی الاستیک قرار دارد، برابر تنش تسلیم σ_Y است. (شکل ۱۸-۳ ب). در این حالت M ممان تسلیم نامیده می‌شود و با M_Y نشان داده می‌شود و مقدار آن توسط معادله ۹,۹ به دست می‌آید. بنابراین:

$$M_Y = \frac{\sigma_Y I}{y_1} \quad (۱-۱۸)$$



شکل۱۸-۲ تنش مستقیم ناشی از خمش در مقطع یک تیر دارای سطح مقطع با تقارن در یک محور



شکل۱۸-۲۳تسلیم مقطع یک تیر ناشی از خمش

اگر گشتاور خمشی بیشتر افزایش یابد، کرنش در انتهای y_1 مقطع افزایش می‌یابد و از کرنش تسلیم ε_Y تجاوز می‌کند. هر چند به خاطر تسلیم پلاستیک، تنش ثابت می‌ماند و مقدار آن مانند آنچه در منحنی تنش کرنش ایده آل شده شکل ۱۸-۱ نشان داده شده است برابر σ_Y است. در برخی مقادیر بیشتر M، تنش در انتهای پایین مقطع نیز به تنش تسلیم σ_Y می‌رسد. (شکل ۱۸-۳ج) افزایش‌های بعدی ممان خمشی باعث می‌شود ناحیه‌های پلاستیسیته در انتهاهای مقطع تیر به سمت داخل بروند که شرایطی را مانند شکل ۱۸-۳ د خواهند داشت. در این مرحله قسمت مرکزی یا هسته مقطع تیر الاستیک باقی می‌ماند در حالی که قسمت های بیرونی پلاستیک هستند. در نهایت، با افزایش‌های بیشتر در ممان

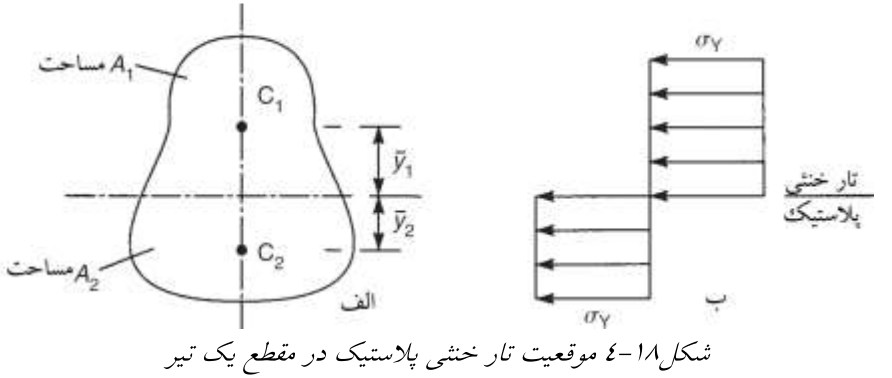
خمشی، هسته الاستیک در نهایت به اندازه ای قابل چشم پوشی کاهش می‌یابد و مقطع تیر تقریبا به صورتی کامل، پلاستیک است. بنابراین، برای تمام مقاصد عملی، تیر به ظرفیت لنگر مقاوم نهایی خودش رسیده است. مقدار ممان خمشی در این مرحله، ممان پلاستیک M_P تیر نامیده می‌شود. توزیع تنش مربوط به این ممان را می‌توان به صورت دو بخش مستطیلی مانند شکل ۱۸-۳ه ایده آل کرد.

بنابراین، حال، مسئله این است که چگونه ممان پلاستیک M_P را تعیین کنیم. در ابتدا ما باید موقعیت تار خنثی مقطع تیر را مورد بررسی قرار دهیم ؛ البته مقطع تیر در حالت تمام پلاستیک خود است. یکی از شرایطی که مورد استفاده قرار گرفت در اینکه تار خنثی الاستیک با مرکز سطح مقطع تیر همرس است، این بود که تنش به صورت مستقیم متناسب با کرنش است (معادله ۹-۲). واضح است که این حالت توزیع تنش، دیگر در شکل‌های ۱۸-۳ ج، د و هـ صادق نیست. مقطع تیر بالای تار خنثی الاستیک تحت یک تنش فشاری یکنواخت σ_Y قرار دارد. در حالی که در قسمت پایینی تار خنثی، کششی است و برابر مقدار σ_Y. فرض کنید که مساحت سطح مقطع پایین تار خنثی پلاستیک برابر A_2 است و مساحت قسمت بالایی A_1 است. (شکل ۱۸-۴ الف). از آنجایی که M_P یک ممان خمشی خالص است بار مستقیم نهایی مقطع تیر باید صفر باشد. بنابراین از شکل ۱۸-۴ داریم:

$$\sigma_Y A_1 = \sigma_Y A_2$$

بنابراین:

$$A_1 = A_2 \qquad (۱۸-۲)$$



شکل۱۸-۴ موقعیت تار خنثی پلاستیک در مقطع یک تیر

بنابراین اگر مساحت سطح مقطع کل برابر A باشد:

$$A_1 = A_2 = \frac{A}{2} \qquad (۱۸-۳)$$

و می‌بینیم که تار خنثی پلاستیک، مقطع تیر را به دو مساحت مساوی تقسیم می‌کند. واضح است که برای مقاطع دارای دو محور تقارن یا یک محور تقارن که صفحه ممان خمشی عمود بر محور تقارن است، تارهای خنثی الاستیک و پلاستیک بر هم منطبقند.

حال می‌توان ممان پلاستیک M_P را با لنگر گرفتن برای لنگرهای ناشی از تنش‌های کششی و فشاری حول تار خنثی به دست آورد. این برآیندهای تنش در مرکز سطح های C_1 و C_2 (به ترتیب) سطح های A_1 و A_2 عمل می‌کنند. بنابراین از شکل ۱۸-٤ داریم:

$$M_P = \sigma_Y A_1 \bar{y}_1 + \sigma_Y A_2 \bar{y}_2$$

یا با استفاده از معادله ۱۸-۳ داریم:

$$M_P = \sigma_Y \frac{A}{2}\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right) \qquad (۱۸-٤)$$

معادله ۱۸-٤ را می‌توان به صورتی مشابه معادله ۹-۱۳ نوشت:

$$M_P = \sigma_Y Z_P \qquad (۱۸-۵)$$

که در آن:

$$Z_P = \frac{A\left(\bar{y}_1 + \bar{y}_2\right)}{2} \qquad (۱۸-٦)$$

مقدار Z_P به عنوان مدول پلاستیک سطح مقطع شناخته می‌شود. توجه داشته باشید که مدول الاستیک Z_e دارای دو مقدار برای یک تیر با یک محور تقارن در سطح مقطع است. (معادله ۹-۱۲) در حالی که مدول پلاستیک فقط یک مقدار دارد.

ضریب شکل

نسبت ممان پلاستیک یک تیر به ممان تسلیم با عنوان ضریب شکل شناخته می‌شود و با f نشان داده می‌شود، بنابراین:

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{\sigma_Y Z_P}{\sigma_Y Z_e} = \frac{Z_P}{Z_e} \qquad (۱۸-۷)$$

که Z_P توسط معادله ۱۸-٦ تعیین می‌شود و Z_e کمینه مدول الاستیک مقطع است، I/y_1. از معادله ۱۸-۷ می‌توان دریافت که f فقط تابعی از هندسه سطح مقطع تیر است.

مثال ۱۸-۱) ممان تسلیم، ممان پلاستیک و ضریب شکل را برای یک سطح مقطع مستطیلی با عرض b و عمق (ارتفاع) d تعیین کنید.

تار خنثی الاستیک و پلاستیک یک سطح مقطع مستطیلی بر هم منطبقند (معادله ١٨-٣) و از مرکز سطح مقطع می گذرند. بنابراین از معادله ١٨-١ داریم:

$$M_Y = \frac{\dfrac{\sigma_Y b d^3}{12}}{\dfrac{d}{2}} = \sigma_Y \frac{bd^2}{6} \qquad (١)$$

و از معادله ١٨-٤ داریم:

$$M_P = \sigma_Y \frac{bd}{2}\left(\frac{d}{4}+\frac{d}{4}\right) = \sigma_Y \frac{bd^2}{4} \qquad (٢)$$

با جایگذاری M_P و M_Y در معادله ١٨-٧ به دست خواهیم آورد:

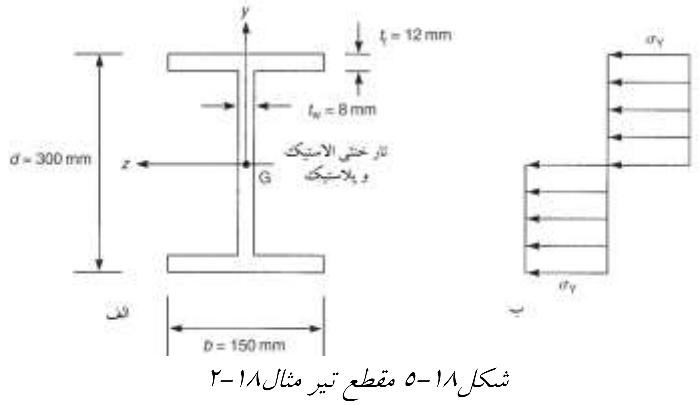
$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{3}{2} \qquad (٣)$$

توجه داشته باشید که ویرانی پلاستیک یک مقطع مستطیلی در ممان خمشی‌ای رخ می‌دهد که ٥٠ درصد بزرگتر از ممان ابتدایی تسلیم تیر است.

مثال ١٨-٢)ضریب شکل مقطع I تیر شکل ١٨-٥ الف را تعیین کنید.

دوباره مانند مثال ١٨-١، تارهای خنثی الاستیک و پلاستیک بر مرکز سطح G مقطع منطبقند. در شرایط کاملا پلاستیک، توزیع تنش تیر در شکل ١٨-٥ب نشان داده شده است. نیروی مستقیم نهایی در بال بالایی برابر است با:

$\sigma_Y b t_f$ (فشار)



شکل١٨-٥ مقطع تیر مثال١٨-٢

و ممان آن حول Gz برابر است با:

$$\sigma_Y bt_f\left(\frac{d}{2}-\frac{t_f}{2}\right)\equiv\frac{\sigma_Y bt_f}{2}\left(d-t_f\right) \quad (1)$$

به صورت مشابهی نیروی مستقیم نهایی در قسمت بالای Gz جان برابر است با:

$$\sigma_Y t_w\left(\frac{d}{2}-t_f\right) \quad \text{(فشار)}$$

و ممان آن حول Gz برابر است با:

$$\sigma_Y t_w\left(\frac{d}{2}-t_f\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}-t_f\right)\equiv\frac{\sigma_Y t_w}{8}\left(d-2t_f\right)^2 \quad (2)$$

نیمه پایینی مقطع در کشش است و ممان مشابهی حول Gz ایجاد می‌کند، بنابراین ممان پلاستیک نهایی M_P تمام مقطع برابر است با:

$$M_P=\sigma_Y\left[bt_f\left(d-t_f\right)+\frac{1}{4}t_w\left(d-2t_f\right)^2\right] \quad (3)$$

با مقایسه معادله‌های ۱۸-۵ و (۳) می‌بینیم که Zp برابر است با:

$$Z_P=bt_f\left(d-t_f\right)+\frac{1}{4}t_w\left(d-2t_f\right)^2 \quad (4)$$

می‌توانیم Zp را از معادله ۱۸-۶ نیز به دست بیاوریم. ممان دوم سطح I مقطع حول تارخنثی مشترک برابر است با:

$$I=\frac{bd^3}{12}-\frac{\left(d-t_w\right)\left(d-2t_f\right)^3}{12}$$

بنابراین مدول الاستیک Z_e برابر است با:

$$Z_e=\frac{I}{\frac{d}{2}}=\frac{2}{d}\left[\frac{bd^3}{12}-\frac{\left(b-t_w\right)\left(d-2t_f\right)^3}{12}\right] \quad (5)$$

با جایگذاری مقادیر حقیقی ابعاد مقطع در معادله‌های (۴) و (۵) به دست خواهیم آورد:

$$Z_P=150\times12(300-12)+\frac{1}{4}\times8(300-2\times12)^2=6.7\times10^5\,mm^3$$

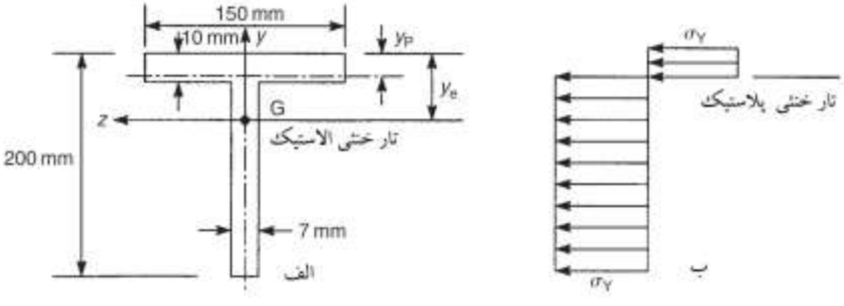
$$Z_e=\frac{2}{300}\left[\frac{150\times300^3}{12}-\frac{(150-8)(300-24)^3}{12}\right]=5.9\times10^5\,mm^3$$

بنابراین از معادله ۱۸-۷ خواهیم داشت:

$$f=\frac{M_P}{M_Y}=\frac{Z_P}{Z_e}=\frac{6.7\times10^5}{5.9\times10^5}=1.14$$

و می‌بینیم که ممان تمام پلاستیک فقط ۱۴ درصد بزرگتر از ممان در ابتدای تسلیم است.

مثال ۱۸-۳) ضریب شکل مقطع T شکل ۱۸-۶ را تعیین کنید.



شکل ۱۸-۶ تیر مثال ۱۸-۳

در این مورد تارهای خنثی الاستیک و پلاستیک بر هم منطبق نیستند. فرض کنید که اولی دارای ارتفاع y_e از سطح بالایی بال است و دومی دارای ارتفاع y_P است. تار خنثی الاستیک از مرکز سطح مقطع می گذرد، که مرکز سطح از روش معمول یافته می‌شود. با ممان گرفتن سطوح، حول سطح بالایی بال خواهیم داشت:

$$(150 \times 10 + 190 \times 7) y_e = 150 \times 10 \times 5 + 190 \times 7 \times 105$$

که می‌دهد:

$$y_e = 52mm$$

ممان دوم سطح مقطع حول تار خنثی الاستیک با استفاده از معادله ۹-۳۸ برابر است با:

$$I = \frac{150 \times 52^3}{3} - \frac{143 \times 42^3}{3} + \frac{7 \times 148^3}{3} = 11.1 \times 10^6 mm^4$$

بنابراین:

$$Z_e = \frac{11.1 \times 10^6}{148} = 75000mm^3$$

توجه داشته باشید که ما کمترین مقدار را برای Z_e بر می گزینیم زیرا تنش در دورترین نقطه از تار خنثی الاستیک بیشترین مقدار است. تار خنثی پلاستیک مقطع را به دو مساحت یکسان تقسیم می‌کند (معادله ۱۸-۳ را ببینید). بررسی شکل ۱۸-۶ نشان می‌دهد که مساحت بال بیش از مساحت جان است، بنابراین تار خنثی پلاستیک باید در بال باشد. از اینرو:

$$150\, y_P = 150(10 - y_P) + 190 \times 7$$

که از آن:

$y_P = 9.4mm$

معادله ۱۸-۶ را می‌توان به صورت حاصل جمع ممان اول حول تار خنثی پلاستیک، در سطح بالای تار خنثی پلاستیک به علاوه ممان اول سطح زیر تار خنثی تفسیر کرد. خواهیم داشت:

$$Z_P = 150 \times 9.4 \times 4.7 + 150 \times 0.6 \times 0.3 + 190 \times 7 \times 95.6 = 133800\ mm^3$$

ضریب شکل f از معادله ۱۸-۷ برابر است با:

$$f = \frac{M_P}{M_Y} = \frac{Z_P}{Z_e} = \frac{133800}{75000} = 1.78$$

روابط ممان-انحنا

از معادله ۹-۸ می‌بینیم که انحنای k یک تیر تحت خمش الاستیک از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{M}{EI} \qquad (۱۸-۸)$$

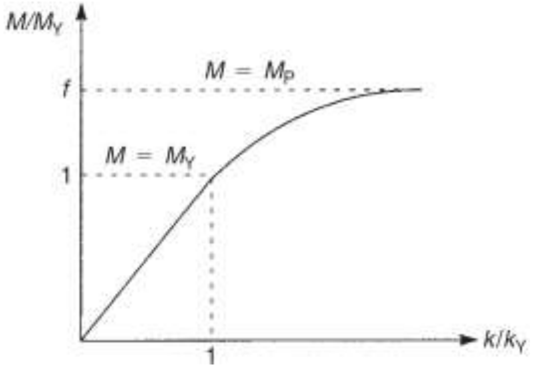
در تسلیم، هنگامی که M برابر ممان تسلیم M_Y است:

$$k_Y = \frac{M_Y}{EI} \qquad (۱۸-۹)$$

بنابراین رابطه ممان – انحنای یک تیر در بازه الاستیک خطی را می‌توان به صورتی بدون بعد با ترکیب معادله های ۱۸-۸ و ۱۸-۹ بیان کرد، یعنی:

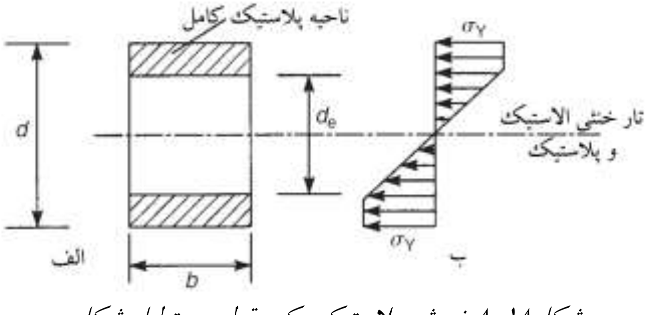
$$\frac{M}{M_Y} = \frac{k}{k_Y} \qquad (۱۸-۱۰)$$

این رابطه به وسیله قسمت خطی دیاگرام ممان- انحنای شکل ۱۸-۷ نمایش داده شده است. وقتی که ممان خمشی از M_Y بزرگتر است بخشی از تیر، کاملا پلاستیک می‌شد و رابطه ممان – انحنا غیر خطی است. مانند بازه پلاستیک مقطع تیر که به سمت تار خنثی و به داخل گسترده می‌شد، منحنی نیز با افزایش‌های سریع در انحنا ناشی از افزایش‌های کوچک در ممان، شیب آن به سمت مسطح‌تر شدن و شیب کمتر پیش می‌رود. در نهایت، منحنی ممان-انحنا به خط افقی نزدیک می‌شود، $M=M_P$.



شکل۱۸-۷ دیاگرام گشتاور – انحناء یک تیر

مانند مجانب، هنگامی که از نظر تئوری، انحنا در بار ویرانی، بی نهایت است.از معادله ۱۸-۷ می‌بینیم که هنگامی که $M=M_P$ است نسبت $M/M_Y=f$ یعنی ضریب شکل است. واضح است که معادله قسمت غیر خطی دیاگرام ممان – خمش به سطح مقطع خاص مورد بررسی بستگی دارد.



شکل۱۸-۸ خمش پلاستیک یک مقطع مستطیل شکل

تیری با سطح مقطع مستطیلی را در نظر بگیرید که تحت یک ممان خمشی به گونه ای قرار دارد که در نهایت باعث بخش هایی کاملا پلاستیک در ناحیه‌های خارجی مقطع می‌شود (شکل ۱۸-۸ الف) عمق (ارتفاع) هسته الاستیک برابر d_e است.ممان خمشی نهایی M مربوط به توزیع تنش شکل ۱۸-۸ ب برابر است با:

$$M=2\sigma_Y b\frac{1}{2}\left(d-d_e\right)\frac{1}{2}\left(\frac{d}{2}+\frac{d_e}{2}\right)+2\frac{\sigma_Y}{2}b\frac{d_e}{2}\frac{2}{3}\frac{d_e}{2}$$

که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$M=\frac{\sigma_Y bd^2}{12}\left(3-\frac{d_e^2}{d^2}\right)=\frac{M_Y}{2}\left(3-\frac{d_e^2}{d^2}\right) \qquad (۱۸-۱۱)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

توجه داشته باشید هنگامی که $d_e=0, M=3M_Y/2=M_P$ و هنگامی که $d_e=d, M=M_Y$ است. همانطور که از معادله ۱۸-۱ به دست می‌آید. انحنای تیر در مقطع نشان داده شده را می‌توان با استفاده از معادله ۹-۲ و به کاربردن آن در نقطه‌ای در لبه بیرونی هسته الاستیک به دست آورد، بنابراین:

$$\sigma_Y = E\frac{d_e}{2R}$$

یا:

$$k=\frac{1}{R}=\frac{2\sigma_Y}{Ed_e} \qquad (۱۸-۱۲)$$

انحنای تیر در تسلیم از معادله ۱۸-۹ به دست می‌آید، یعنی:

$$k_Y=\frac{M_Y}{EI}=\frac{2\sigma_Y}{Ed} \qquad (۱۸-۱۳)$$

با ترکیب معادله‌های ۱۸-۱۲ و ۱۸-۱۳ به دست خواهیم آورد:

$$\frac{k}{k_Y}=\frac{d}{d_e} \qquad (۱۸-۱٤)$$

با جایگذاری d_e/d در معادله ۱۸-۱۱ از معادله ۱۸-۱٤ خواهیم داشت:

$$M=\frac{M_Y}{2}\left(3-\frac{k_Y^2}{k^2}\right)$$

بنابراین:

$$\frac{k}{k_Y}=\frac{1}{\sqrt{3-\frac{M}{M_y}}} \qquad (۱۸-۱۵)$$

معادله ۱۸-۱۵ رابطه ممان-انحنا را برای یک تیر با مقطع مستطیلی در ناحیه زیر می‌دهد:

$$M_Y \le M \le M_P$$

یعنی برای بخش غیر خطی دیاگرام ممان انحنای شکل ۱۸-۷ و برای مورد خاص تیر با مقطع مستطیلی. روابط مربوط به تیرها با مقاطع متفاوت، به روش مشابهی به دست می‌آیند. دیدیم که برای گشتاورهای خمشی در بازه بالا، مقطع تیر دارای نواحی کاملا پلاستیک و یک هسته مرکزی الاستیک است. بنابراین تسلیم در نواحی پلاستیک رخ می‌دهد بدون اینکه در تنش افزایشی به وجود آید، در حالی که در هسته الاستیک، به خاطر افزایش تنش‌ها، تغییر شکل‌ها افزایش می‌یابد. بدین ترتیب تغییر شکل تیر توسط هسته الاستیک کنترل

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

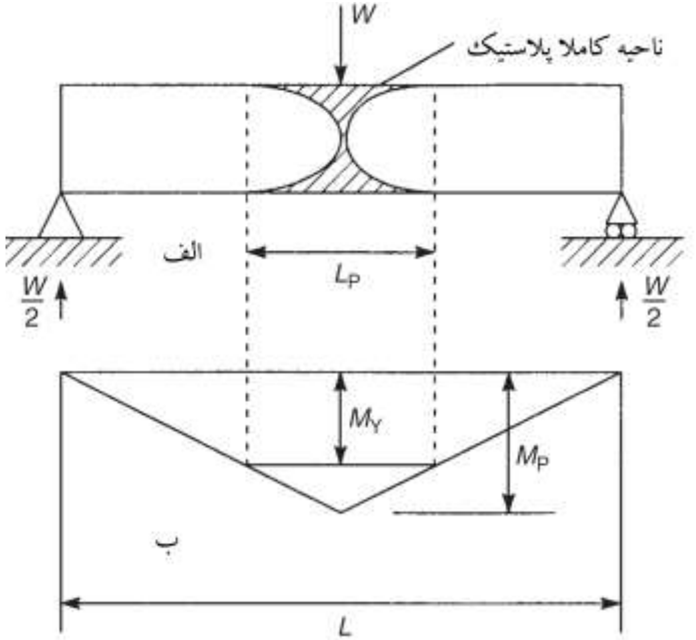
می‌شود. این وضعیت را گاهی اوقات با نام جریان محدود خمیری یادآور می‌شوند. زمانی که M به M_P نزدیک می‌شود دیاگرام ممان-انحنا به خط $M=M_P$ مجانب می‌شود به صورتی که افزایش‌های زیاد در تغییر شکل بدون افزایشی در ممان رخ می‌دهد، شرایطی که با عنوان جریان پلاستیک محدود نشده شناخته می‌شود.

لولاهای پلاستیک

حضور جریان محدود نشده پلاستیک در مقطع یک تیر ما را به سمت مفهوم شکل گیری لولاهای پلاستیک در تیرها و سایر سازه‌ها رهنمون می‌کند. تیر با اتکای ساده شکل ۱۸-۹ الف را در نظر بگیرید. تیر بار متمرکز W را در میان دهانه خود حمل می‌کند. دیاگرام ممان خمشی (شکل ۱۸-۹ ب) دارای شکل مثلثی است و دارای ممان بیشینه برابر با $WL/4$ است. اگر W به $WL/4=M_P$ افزایش یابد مقطع میان دهانه تیر کاملا پلاستیک خواهد بود و دارای نواحی ای پلاستیک خواهد بود که هنگامی که ممان کاهش پیدا می‌کند به سمت تکیه‌گاه‌ها پیشروی می‌کنند. هیچگونه پلاستیسیته‌ای هنگامی که ممان خمشی کمتر از M_Y است در مقاطع تیر رخ نمی‌دهد. واضح است که در مقطع میان دهانه که در آن افزایش‌های زیاد در تغییر شکل، بدون افزایشی در بار رخ می‌دهد، جریان پلاستیک محدود نشده رخ می‌دهد. بنابراین تیر مانند دو تیر صلب متصل شده توسط یک لولای پلاستیک رفتار می‌کند. این لولا به دو تیر اجازه می‌دهد تا دورانی نسبی نسبت به همدیگر داشته باشند. مقدار W که از $W=4M_P/L$ به دست می‌آید بار ویرانی تیر است. طول L_P ناحیه پلاستیک تیر را می‌توان از این حقیقت که در هر مقطع مرزی این ناحیه، ممان خمشی برابر M_Y است، به دست آورد. بنابراین:

$$M_Y = \frac{W}{2}\left(\frac{L-L_P}{2}\right)$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱۸-۹ شکل‌گیری مفصل پلاستیک در یک تیر دو سر مفصل

با جایگذاری $W(=4M_P/L)$ به دست می آوریم:

$$M_Y = \frac{M_P}{L}\left(L - L_P\right)$$

که از آن:

$$L_P = L\left(1 - \frac{M_Y}{M_P}\right)$$

یا از معادله ۱۸-۷:

$$L_P = L\left(1 - \frac{1}{f}\right) \quad (١٨-١٦)$$

برای یک تیر با مقطع مستطیلی $f=1.5$ (مثال ۱۸-۱ را ببینید) خواهیم داشت $L_P=L/3$. برای تیر با مقطع I مثال ۱۸-۲، $f=1.14$ و $L_P=0.12L$. بنابراین ناحیه پلاستیک در این مورد، بسیار کوچکتر از تیر با مقطع مستطیلی است. این امر اغلب برای تیرهای با مقطع I صحیح است. واضح است که لولاهای پلاستیک در مقاطع بیشینه ممان خمشی شکل می‌گیرند.

تحلیل پلاستیک تیرها

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

حال می‌توانیم از مفهوم لولاهای پلاستیک برای تعیین بار ویرانی یا نهایی تیرها بر حسب ممان تسلیم شان M_P استفاده کنیم. این ممان را می‌توان برای مقطع یک تیر خاص با استفاده از معادله ۱۸–۵ به دست آورد. برای مورد تیر با اتکای ساده شکل ۱۸–۹ دیدیم که شکل گیری یک لولای پلاستیک منفرد برای ایجاد شکست مناسب است. این امر برای تمام سیستم های معین استاتیکی صحیح است. با تعیین موقعیت لولای پلاستیک که در آن ممان برابر MP است، مقدار بار ویرانی به سادگی از استاتیک به دست می‌آید. بنابراین برای تیر شکل ۱۸–۹ با ممان گرفتن حول مقطع میان دهانه خواهیم داشت:

$$\frac{W_U}{2}\frac{L}{2} = M_P$$

یا:

$$W_U = \frac{4M_P}{L}$$

که W_U مقدار نهایی بار W است.

مثال ۱۸–٤) بار نهایی را برای مقطع مستطیلی تیری با اتکای ساده، عرض b، عمق (ارتفاع) d و دهانه L تحت یک بار گسترده یکنواخت با شدت W حساب کنید.

بیشینه ممان خمشی در میان دهانه رخ می‌دهد و برابر $WL^2/8$ است. (بخش ۳–٤ را ببینید) بنابراین لولای پلاستیک در میان دهانه شکل می‌گیرد وقتی که این ممان خمشی برابر M_P است و شدت بار نهایی مربوط برابر W_U است. بنابراین:

$$\frac{W_U L^2}{8} = M_P \qquad (۱)$$

که از مثال ۱۸–۱ معادله (۲) داریم:

$$M_P = \sigma_Y \frac{bd^2}{4}$$

بنابراین:

$$W_U = \frac{8M_P}{L^2} = \frac{2\sigma_Y bd^2}{L^2}$$

که σ_Y تنش تسلیم مصالح تیر است.

مثال ۱۸-۵) تیر با اتکای ساده ABC شکل ۱۸-۱۰ الف دارای طره ای آویزان است و دارای بارهای تکیه گاهی $4W$ و W است. مقدار W را در ویرانی، بر حسب ممان پلاستیک تیر M_P محاسبه کنید.

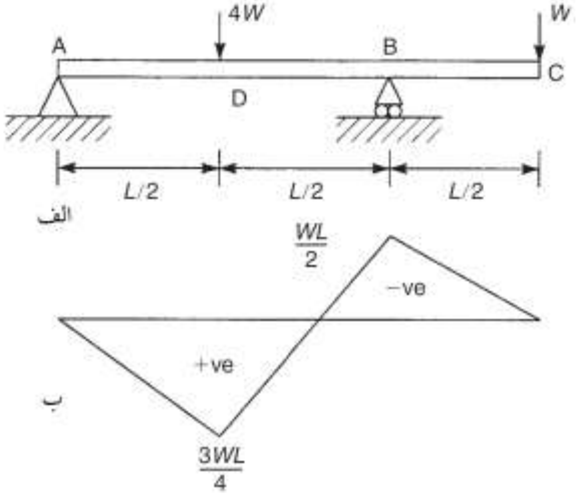
دیاگرام ممان خمشی تیر با استفاده از روش بخش ۳-۴ به دست آمده است و در شکل ۱۸-۱۰ب نشان داده شده است. واضح است که وقتی W افزایش می‌یابد یک لولای پلاستیک ابتدا در D، یعنی نقطه اعمال بار $4W$، شکل می‌گیرد. بنابراین در خرابی:

$$\frac{3}{4}W_U L = M_P$$

بنابراین:

$$W_U = \frac{4M_P}{3L}$$

که W_U مقداری W است که باعث ویرانی می‌شود.

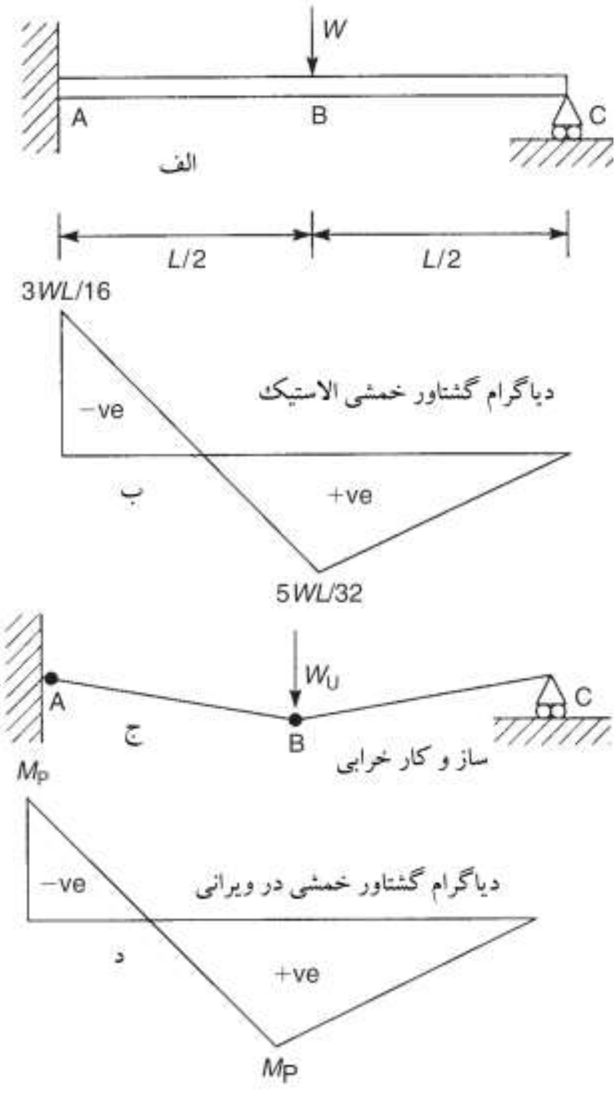


شکل ۱۸-۱۰ تیر مثال ۱۸-۵

شکل گیری یک لولای پلاستیک در یک تیر معین استاتیکی، تولید تغییرشکل‌های بزرگ و افزاینده‌ای می‌کند که بدون افزایش در بار، در نهایت منجر به شکست می‌شوند. در این شرایط، تیر، مانند سازوکاری عمل می‌کند که در آن تیرهای با طول های متفاوت نسبت به همدیگر حول لولای پلاستیک دوران می‌کنند. عبارت ساز و کار شکست یا ساز و کار ویرانی اغلب برای توضیح این شرایط استفاده می‌شود.

در یک سیستم نامعین استاتیکی، شکل گیری یک لولای پلاستیک لزوما به معنای شکست نیست. طره پایه دار شکل ١٨-١١ الف را در نظر بگیرید. دیاگرام ممان خمشی را پس از تعیین عکس العمل در C به وسیله هر روش مناسبی از تحلیل تیرهای نامعین استاتیکی (فصل ١٦ را ببینید) می‌توان رسم نمود که در شکل ١٨-١١ب نشان داده شده است. هنگامی که مقدار W افزایش می‌یابد در ابتدا یک لولای پلاستیک در A که ممان خمشی در آن بیشترین مقدار است شکل می‌گیرد. با این وجود، این بدان معنا نیست که تیر ویران می‌شود. به جای آن، تیر مانند یک تیر معین استاتیکی با یک بار نقطه‌ای در B و یک ممان M_P در A رفتار می‌کند. افزایش‌های بیشتر W در نهایت منجر به شکل گیری لولای پلاستیک دوم در B (شکل ١٨-١١ج) می‌شود که در آن هنگام مقدار ممان خمشی در B به مقدار M_P می‌رسد. حال تیر مانند یک ساز و کار عمل می‌کند و شکست بدون افزایشی در بار رخ می‌دهد. حال دیاگرام ممان خمشی تیر مانند شکل ١٨-١١ د است و دارای مقادیر ممان خمشی $-M_P$ در A و M_P در B است. با مقایسه دیاگرام ممان خمشی در ویرانی و دیاگرام ممان خمشی در تغییر شکل الاستیک (شکل ١٨-١١ب) می‌بینیم که توزیع دوباره‌ای از ممان خمشی رخ داده است. این امر در اغلب سیستم های نامعین استاتیکی رخ می‌دهد در حالی که در سیستم های معین استاتیکی دیاگرام ممان خمشی در بازه الاستیک و در ویرانی دارای شکل‌های یکسانی هستند. (شکل‌های ١٨-٩ ب و ١٨-١٠ ب را ببینید) در تیر شکل ١٨-١١ دیاگرام ممان خمشی الاستیک دارای بیشینه‌ای در A است. پس از شکل گیری لولای پلاستیک در A ممان خمشی ثابت می‌ماند در حالیکه ممان خمشی در B تا زمانی که لولای پلاستیک دوم شکل گیرد افزایش می‌یابد. بنابراین توزیع دوباره گشتاورها تمایل دارد تا مقاومت نهایی سازه‌های نامعین استاتیکی را افزایش دهد زیرا شکست در یک مقطع منجر به این می‌شود که قسمت های دیگر سازه بارهای اضافی را متحمل شوند.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل ۱۸-۱۱ لولای پلاستیک در یک طره پایه دار

با تعیین موقعیت لولاهای پلاستیک و با استفاده از این حقیقت که ممان در این لولاها برابر M_P است، ما می‌توانیم مقدار بار نهایی W_U را به وسیله استاتیک بیابیم. بنابراین با ممان گرفتن حول A خواهیم داشت:

$$M_P = W_U \frac{L}{2} - R_C L \tag{۱۸-۱۷}$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

که R_C عکس العمل عمودی در تکیه‌گاه C است. حال با بررسی تعادل طول BC به دست خواهیم آورد:

$$R_C \frac{L}{2} = M_P \qquad (۱۸-۱۸)$$

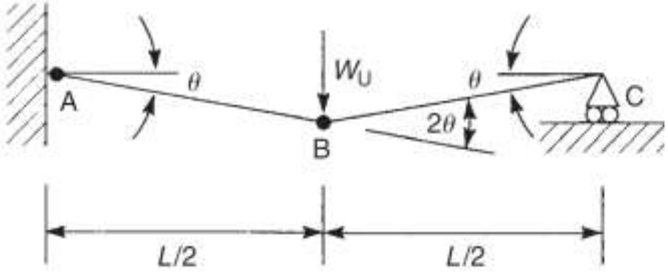
با حذف R_C از معادله های ۱۸-۷ و ۱۸-۸ خواهیم داشت:

$$W_U = \frac{6M_P}{L} \qquad (۱۹-۱۸)$$

توجه داشته باشید که در این مسئله خاص غیر ضروری است که دیاگرام ممان خمشی الاستیک را برای حل و به دست آوردن بار نهایی به دست بیاوریم زیرا تنها با استفاده از استاتیک، این مقدار به دست می‌آید. این یک ویژگی مناسب تحلیل پلاستیک است و منجر به راه حل های ساده‌تری نسبت به تحلیل الاستیک در سازه‌های نامعین استاتیکی می‌شود. علاوه بر این، بزرگی بار نهایی تحت تاثیر نقص های سازه ای ای مانند تکیه‌گاه‌های نشست کننده نیست، در حالیکه همین گونه نقص ها دارای تاثیر قابل توجهی در رفتار الاستیک یک سازه هستند. توجه داشته باشید که اصل جمع آثار قوا (بخش ۳,۷) که بر مبنای رفتار الاستیک خطی یک سازه بنا شده بود، شامل تحلیل پلاستیک نمی‌شود. در حقیقت، رفتار پلاستیک یک سازه به ترتیبی که بارها اعمال می‌شوند و همینطور به مقادیر نهایی آنها وابسته است. بنابراین در تحلیل پلاستیک ما فرض می‌کنیم که تمام بارها به صورت همزمان وارد می‌شوند و همینطور فرض می‌کنیم که نسبت بارها در طی بارگذاری ثابت باقی می‌ماند. روش قدرتمند دیگر تحلیل، از اصل کار مجازی (بخش ۱۵-۳ را ببینید) استفاده می‌کند. که بیان می‌کند برای سازه ای که در تعادل است و دارای یک مقدار معین جابجایی کوچک مجازی است، جمع کارهای انجام شده توسط نیروهای داخلی برابر کار انجام شده توسط نیروهای خارجی است.

طره پایه دار شکل ۱۸-۱۱ الف را در نظر بگیرید. ساز و کار شکست آن در شکل ۱۸-۱۱ج نشان داده شده است. در لحظه شکست طره در تعادل است و دارای لولاهای پلاستیک در A و B است و هر دو ممان مانند شکل ۱۸-۱۱ د برابر M_P هستند. فرض کنید که AB دارای دوران معین کوچک θ است. از هندسه، BC نیز در زاویه θ مانند شکل ۱۸-۱۲ دوران می‌کند. جابجایی عمودی در B برابر است با $\theta L/2$.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



شکل۱۸-۱۲ جابجایی‌های مجازی در طره پایه دار

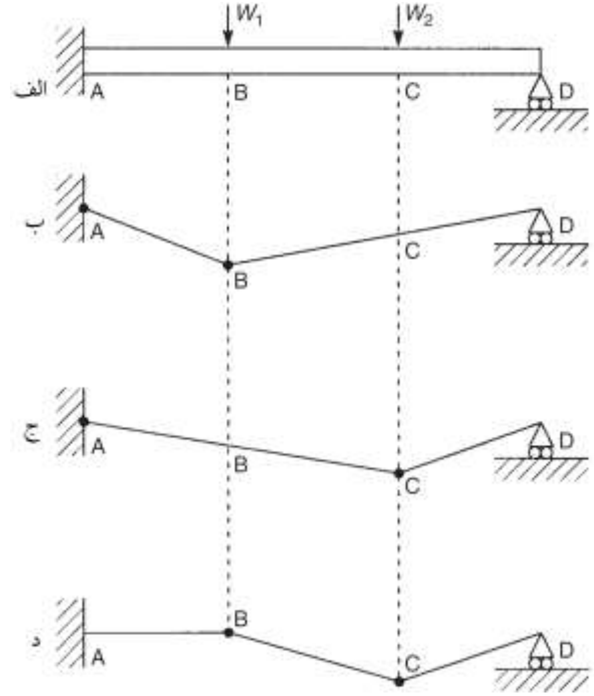
نیروهای خارجی بر روی طره که در طی جابجایی مجازی کار انجام می‌دهند فقط شامل W_U می‌شوند زیرا عکس العمل های عمودی در A و C جابجا نشده اند. نیروهای داخلی که کار انجام می‌دهند شامل گشتاورهای پلاستیک M_P در A و B می‌شوند که در برابر دوران مقاومت می‌کنند و از آنجا:

$$W_U \theta \frac{L}{2} = \left(M_P\right)_A \theta + \left(M_P\right)_B 2\theta$$

که از آن، مانند قبل خواهیم داشت:

$$W_U = \frac{6M_P}{L}$$

دیدیم که لولاهای پلاستیک در مقاطعی از تیر شکل می‌گیرند که دیاگرام ممان خمشی به قله نمودار خود می‌رسد.این امر متعاقبا باید باعث شود تا در تیرهایی که دسته‌ای از بارهای نقطه‌ای را حمل می‌کنند، لولاهای پلاستیک در نقاط بارگذاری قرار گیرند. با این وجود، در برخی نمونه‌ها چند ساز و کارهای ویرانی، ممکن است، که هر کدام، مقدار متفاوتی از بار نهایی را به ما خواهند داد. به عنوان مثال اگر طره پایه دار شکل ۱۸-۱ الف دو بار نقطه‌ای را متحمل شود (شکل ۱۸-۱۳ الف)، سه ساز و کار ویرانی ممکن است رخ دهد (شکل ۱۸-۱۳ ب تا د). هر ساز و کار ویرانی باید تحلیل شود و کمترین بار نهایی باید انتخاب شود. تیرهایی که ما تاکنون مورد بررسی قرار دادیم فقط شامل بارهای متمرکز بودند و بنابران موقعیت لولاهای پلاستیک و بنابراین شکل ساز و کارهای ویرانی، به سادگی تعیین می‌شدند. این امر در بارهای گسترده صادق نیست.



شکل۱۸-۱۳ ساز و کارهای ممکن ویرانی در طره پایه‌دار حمل‌کننده دو بار متمرکز

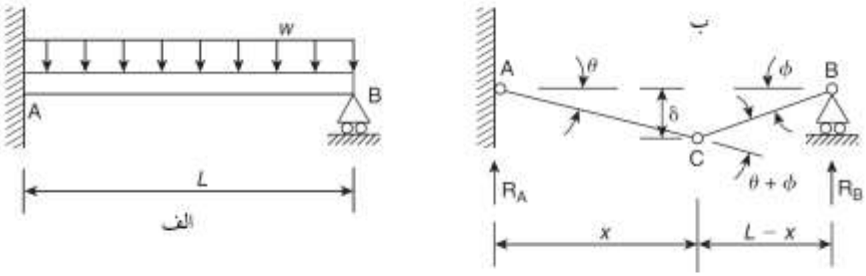
مثال ۱۸-۶) طره پایه دار AB شکل ۱۸-۱٤ بار گسترده یکنواخت با شدت W را حمل می‌کند. اگر ممان پلاستیک طره برابر M_P باشد کمترین مقدار w لازم برای ایجاد ویرانی را محاسبه کنید.

مقادیر قله ممان خمشی در A و نقطه‌ای بین Aو B رخ می‌دهد، بنابراین لولاهای پلاستیک در A و نقطه C در فاصله x از A شکل می‌گیرد. ساز و کار شکست در شکل ۱۸-۱٤ ب که در آن دوران های AC و CB به ترتیب θ و ϕ هستند، نشان داده شده است. بنابراین، خیز عمودی C از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\delta = \theta x = \phi(L-x) \qquad (۱)$$

بنابراین:

$$\phi = \theta\frac{x}{L-x} \qquad (۲)$$



شکل۱۸-۱۴ ساز و کار ویرانی برای یک طره پایه‌دار

بار نهایی در AC برابر wx است و مرکز آن (در $x/2$ از A) فاصله عمودی $\delta/2$ را جابجا خواهد شد. بار نهایی در CB برابر $w(L-x)$ است و مرکز آن همان جابجایی عمودی $\delta/2$ را خواهد داشت. پس از اصل کار مجازی:

$$wx\frac{\delta}{2}+w(L-x)\frac{\delta}{2}=M_P\theta+M_P(\theta+\phi)$$

توجه داشته باشید که تیر در B آزاد است تا دوران کند، بنابراین در B لولای پلاستیک وجود نخواهد داشت. با جایگذاری δ از معادله (۱) و ϕ از معادله (۲)، به دست خواهیم آورد:

$$wL\frac{\theta x}{2}=M_P\theta+M_P\left(\theta+\theta\frac{x}{L-x}\right)$$

یا:

$$wL\frac{\theta x}{2}=M_P\theta\left(2+\frac{x}{L-x}\right)$$

با مرتب کردن خواهیم داشت:

$$w=\frac{2M_P}{Lx}\left(\frac{2L-x}{L-x}\right) \qquad (۳)$$

برای مقدار کمینه w، $(dw/dx)=0$، می‌دهد:

$$\frac{dw}{dx}=\frac{2M_P}{L}\left[\frac{-x(L-x)-(2L-x)(L-2x)}{x^2(L-x)^2}\right]$$

که به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$x^2-4Lx+2L^2=0$$

با حل خواهیم داشت:

$$x = 0.586L$$

سپس با جایگذاری x در معادله (۳):

$$w = \frac{11.66M_P}{L^2}$$

حال می‌توانیم از قضیه مرز پایینی برای چک کردن اینکه ما ساز و کار بحرانی و در پی آن بار بحرانی را به دست آورده ایم استفاده کنیم. ممان داخلی در A در ویرانی، محدب است و برابر M_P است. با ممان گرفتن حول A خواهیم داشت:

$$R_B L - w\frac{L^2}{2} = -M_P$$

که می‌دهد:

$$R_B = \frac{4.83M_P}{L}$$

به صورت مشابهی، با ممان گرفتن حول B خواهیم داشت:

$$R_A = \frac{6.83M_P}{L}$$

با جمع R_A و R_B خواهیم داشت:

$$\frac{11.66M_P}{L} = wL$$

بنابراین تعادل عمودی ارضا می‌شود. علاوه براین، با بررسی گشتاورهای نیروها در سمت راست C حول C خواهیم داشت:

$$M_C = R_B(0.414L) - w\frac{0.414L^2}{2}$$

با جایگذاری R_B و w از بالا، خواهیم داشت $M_P=M_C$ نتیجه مشابهی از بررسی گشتاورهای نیروها حول C و در سمت چپش به دست می‌آید. بنابراین تعادل ممان و عمودی ارضا شده است. ممان خمشی در هر فاصله x_1 از B برابر است با:

$$M = R_B x_1 - w\frac{x_1^2}{2}$$

سپس:

$$\frac{dM}{dx_1} = R_B - wx_1 = 0$$

بنابراین، بیشینه هنگامی رخ می‌دهد که $x_1=R_B/w$ با جایگذاری x_1, R_B , و w در عبارت M خواهیم داشت $M=M_P$ بنابراین ضابطه تسلیم ارضا شده است. بنابراین نتیجه می گیریم که ساز و کار شکل ۱۸-۱٤ ب ساز و کار بحرانی است.

طراحی پلاستیک تیرها

حال روشن است که تفاوت اصلی بین روش های طراحی پلاستیک و الاستیک، آن است که اولی سازه‌هایی را تولید می‌کند که دارای ضریب اطمینان یکنواخت در برابر ویرانی در تمام اجزای خود است در حالیکه دومی دارای ضریب اطمینان یکنواخت در برابر تسلیم است. روش اولی در حقیقت، به ما نمایشی صحیح از ضریب اطمینان در برابر ویرانی سازه را نشان می‌دهد، که می‌تواند در بارهای بزرگتر ار بار تسلیم (با حاشیه)، با توجه به مقاطع استفاده شده، رخ دهد. برای مثال، مقطع مستطیلی تیر از جنس فولاد نرم دارای مقاومت نهایی ۵۰ درصد بزرگتر از مقاومت تسلیمش است. (مثال ۱۸-۱) در حالیکه برای یک تیر با مقطع I؛ حاشیه در بازه ۱۰ تا ۲۰ درصد قرار دارد. (مثال ۱۸-۲ را ببینید). واضح است که هر روش طراحی مقطع متفاوتی را برای اجزای سازه ای معین تولید خواهد کرد. این تمایز را با بررسی توزیع دوباره ممان خمشی ناشی از ویرانی پلاستیک یک تیر نامعین استاتیکی، می‌توان بهتر فهمید. دو راهکار طراحی پلاستیک تیرها، با تحلیل قبلی نشان داده شدند. روش اصلی، بارهای انجام دهنده کار را محاسبه می‌کند، مقاومت لازم تیر را با اعمال ضریب بار مناسبی تعیین می‌کند، ممان پلاستیک لازم را بر حسب بار نهایی به وسیله تحلیل مناسبی به دست می آورد و نهایتا با دانستن تنش تسلیم مصالح تیر، مدول پلاستیک مقطع مورد نیاز را تعیین می‌کند. حال مقطع مناسبی از تیر، از هندبوک مقاطع سازه ای برگزیده می‌شود. روش دیگر، مقطع تیری را در نظر می‌گیرد، ممان خمشی مقطع و از آنجا بار نهایی محاسبه می‌شود. این مقدار بار نهایی با بار های انجام دهنده کار مقایسه می‌شود تا ضریب بار حقیقی تعیین شود و در نهایت با مقدار از پیش تعیین شده کنترل شود.

مثال ۱۸-۷) طره پایه دار شکل ۱۸-۱۱ الف دارای طول ۱۰ متر است و لازم است تا بار ۱۰۰ کیلونیوتن را در میان دهانه خود حمل کند. اگر تنش تسلیم فولاد نرم برابر $300\ N/mm^2$ باشد. مقطع مناسبی را با استفاده از ضریب بار در برابر شکست ۱/۵ طرح دهید.

بار نهایی مورد نیاز تیر برابر *1.5*100=150kN* است. بنابراین از معادله ۱۸-۱۹ ممان پلاستیک مورد نیا M_P برابر است با:

$$M_P = \frac{150 \times 10}{6} = 250 kN.m$$

از معادله ۱۸-۵ کمینه مدول پلاستیک مقطع تیر برابر است با:

$$Z_P = \frac{250 \times 10^6}{300} = 833333 mm^3$$

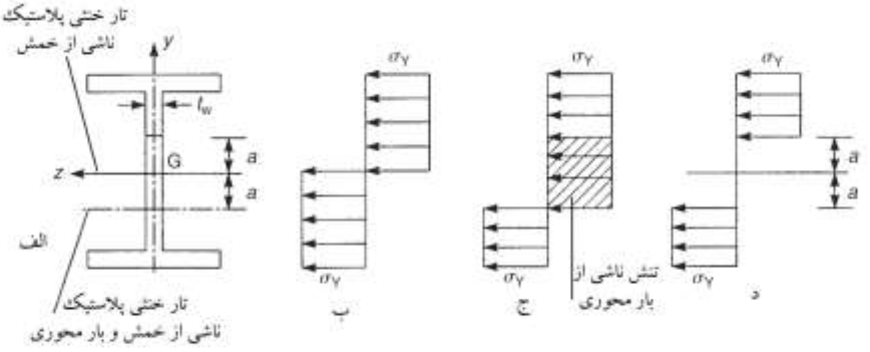
با ارجاع به یک هندبوک مناسب می‌بینیم که یک تیر با شرایط زیر دارای مدول پلاستیک $886.3\ cm^3$ است:

$$406\,mm \times 140\,mm \times 46\,kg/m$$

بنابراین این مقطع مقاومت نهایی مورد نیاز را داراست و دارای حاشیه‌ای است که اجازه می‌دهد وزن خودش را نیز در نظر بگیریم.

اثر بار محوری بر ممان پلاستیک

در این بخش ما اثر بار محوری بر ممان پلاستیک را با اشاره خاص بر یک تیر با مقطع I مورد بررسی قرار خواهیم داد. یکی از پراستفاده‌ترین مقاطع سازه‌ای، که در اینجا تحت یک ممان خمشی مثبت و یک بار محوری فشاری P مانند شکل ۱۸-۱۵ الف قرار دارد. اگر مقطع تیر تنها تحت اثر ممان پلاستیک آن بود، توزیع تنش شکل ۱۸-۱۵ ب رخ می‌داد. هر چند حضور بار محوری منجر به تنش‌های اضافی‌ای می‌شود که مسلم است نمی‌توانند بیش از σ_Y باشند. بنابراین مساحتی از سطح مقطع تیر که تنش‌های فشاری را حمل می‌کند در مساحت افزایش می‌یابد در حالی که ناحیه تحت تنش‌های کششی در مساحت کاهش می‌یابد. روشن است که برخی از تنش‌های کششی ناشی از خمش و برخی ناشی از بار محوری هستند، بنابراین توزیع تنش تغییر یافته مانند شکل ۱۸-۱۵ ج است.



شکل۱۸-۱۵ ترکیب فشار محوری و خمش

از آنجایی که مقطع تیر دارای تقارن دو محوری است منطقی است که در حالتی که هر دو مساحت به صورت متقارن حول تار خنثی پلاستیک اولیه مرتب شوند، در نظر گرفته شود که مساحت حمل کننده تنش فشاری ناشی از خمش برابر مساحت حمل کننده تنش کششی ناشی از خمش است. بنابراین از شکل ۱۸-۱۵د ممان پلاستیک کاهش یافته $M_{P,R}$ برابر است با:

$$M_{P,R} = \sigma_Y \left(Z_P - Z_a \right) \tag{۱۸-۲۰}$$

که Z_a مدول مقطع پلاستیک برای سطحی است که بار محوری در آن اثر می‌کند. از معادله ۱۸-٦ داریم:

$$Z_a = \frac{2at_w}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right) = a^2 t_w$$

همینطور:

$$P = 2at_w\sigma_Y$$

بنابراین:

$$a = \frac{P}{2t_w\sigma_Y}$$

با جایگذاری Z_a در معادله ۱۸-۲۰ و سپس a، به دست خواهیم آورد:

$$M_{P,R} = \sigma_Y \left(Z_P - \frac{P^2}{4t_w\sigma_Y^2} \right) \tag{۱۸-۲۱}$$

فرض کنیم که σ_a تنش محوری متوسط ناشی از P در تمام مساحت A از مقطع تیر باشد. بنابراین:

$$P = \sigma_a A$$

با جایگذاری P در معادله ۱۸–۲۱ خواهیم داشت:

$$M_{P,R} = \sigma_Y \left(Z_P - \frac{A^2}{4t_w} \frac{\sigma_a^2}{\sigma_Y^2} \right) \qquad (۱۸–۲۲)$$

بنابراین مدول پلاستیک کاهش یافته مقطع را می‌توان به شکل زیر نشان داد:

$$Z_{P,R} = Z_P - Kn^2 \qquad (۱۸–۲۳)$$

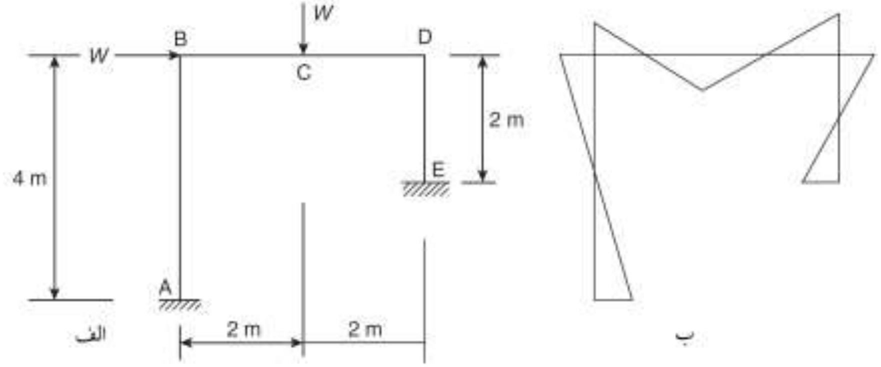
که K ثابتی است که به هندسه مقطع تیر وابسته است و n نسبت تنش متوسط محوری به تنش تسلیم مصالح تیر است. معادله‌های ۱۸–۲۲ و ۱۸–۲۳ تا زمانی قابل کاربرد است که تار خنثی داخل جان مقطع تیر باشد. در مواردی کمیاب که اینگونه نیست، باید به طراحی پیشرفته سازه‌های فولادی مراجعه شود. به علاوه طراحی تیرهای حمل کننده بارهای فشاری تحت تاثیر بررسی ناپایداری کلی و موضعی است، همانطور که در فصل ۲۱ خواهیم دید.

۱۸–۳ تحلیل پلاستیک قاب‌ها

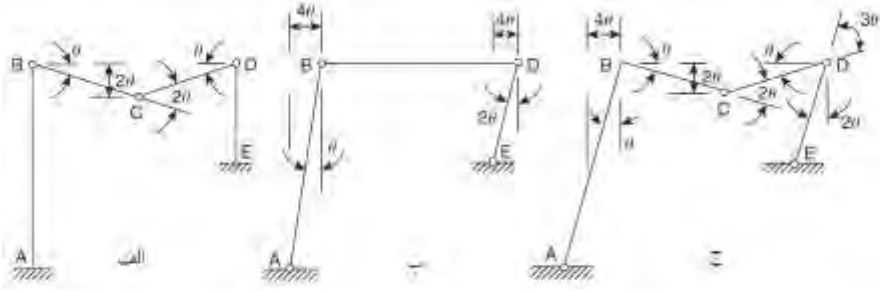
تحلیل پلاستیک قاب‌ها با روشی مشابه تیرها انجام می‌شود که در آن ساز و کارهای ویرانی ممکن نمایش داده می‌شوند و اصل کار مجازی برای تعیین بارهای ویرانی مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این میان پیچیدگی ای رخ می‌دهد، هر چند در آن قاب‌ها، حتی دو بعدی، می‌توانند دارای ساز و کارهای ویرانی ای باشند که هم ساز و کارهای تیر و هم ساز و کارهای انتقال را درگیر خود کنند، زیرا همانطور که در ۱۶٫۱۰ دیدیم در تحلیل به روش پخش لنگر قاب‌های پرتال، انتقال ناشی از عدم تقارن در بارگذاری یا خود قاب بود. در ابتدا ما روش را با یک مثال نسبتاً ساده شرح می دهیم.

مثال ۱۸–۸) مقدار بار w مورد نیاز برای ایجاد ویرانی در قاب شکل ۱۸–۱۶ الف را تعیین کنید اگر ممان پلاستیک تمام اعضای قاب برابر ۲۰۰ کیلونیوتن متر باشد. همچنین عکس‌العمل های تکیه گاهی را در ویرانی به دست آورید.

توجه داریم که قاب و بارگذاری نامتقارن هستند و بنابراین انتقال رخ می‌دهد. دیاگرام ممان خمشی قاب دارای شکلی مانند شکل ۱۸–۱۶ ب خواهد شد و بدین ترتیب سه ساز و کار احتمالی ویرانی مانند شکل ۱۸–۱۷ ممکن خواهد بود.



شکل۱۸-۱۶ قاب پرتال مثال۱۸-۸



شکل۱۸-۱۷ ساز و کارهای ویرانی قاب مثال۱۸-۸

در شکل ۱۸-۱۷ الف عضو افقی BCD با شکل گیری لولاهای پلاستیکی در B، C و D ویران شده است. این حالت را ساز و کار تیر می‌گویند. در شکل ۱۸-۱۷ب قاب با شکل گیری لولاها در A,B,D و E دچار انتقال شده است، این حالت را ساز و کار انتقال می‌نامند. شکل ۱۸-۱۷ ج ساز و کاری مرکب را نشان می‌دهد که از هر دو ساز و کار گفته شده بهره می‌برد. هر چند در این حالت، گشتاورها در B ناشی از بار عمودی در C و بار افقی در B، مخالف هم، است. بنابراین ممان در B کمترین مقدار از پنج ممان بیشینه خواهد بود و لولاهای پلاستیک در قسمت های دیگری شکل خواهند گرفت. بنابراین ما می گوییم که در نقطه B یک حذف لولا داریم، زاویه ABC قائمه باقی خواهند ماند. حال هر یک از ساز و کارها را برای به دست آوردن مقدار لازم Wبرای ویرانی مورد بررسی قرار می دهیم. ما ممان پلاستیک قاب را با M_P نشان می دهیم.

ساز و کار تیر

فرض کنید که BC دارای دوران کوچکی مانند θ است. از آنجایی که $CD=CB$ بنابراین CD نیز با زاویه θ دوران می‌کند و زاویه نسبی بین CD و امتداد BC برابر 2θ است. پس از آن از اصل کار مجازی خواهیم داشت:

$$W2\theta = M_P\theta + M_P 2\theta + M_P\theta \qquad (1)$$

که می‌دهد:

$$W = 2M_P$$

در معادله کار مجازی 2θ فاصله عمودی از جایی که W حرکت می‌کند است و عبارت‌های اول، دوم و سوم در سمت راست به ترتیب نماینده کار داخلی انجام شده توسط گشتاورهای پلاستیک در C،B و D هستند.

ساز و کار انتقال

عضو عمودی AB دارای دوران معین کوچک θ است، سپس ED با 2θ دوران می‌کند. دوباره از اصل کار مجازی داریم:

$$W4\theta = M_P\theta + M_P\theta + M_P 2\theta + M_P 2\theta \qquad (2)$$

یعنی:

$$W = \frac{3}{2}M_P$$

ساز و کار ترکیبی

از آنجایی که در این حالت دیگر لولای پلاستیکی در B نیست ممان پلاستیکی نیز در B وجود ندارد. بنابراین اصل کار مجازی خواهد داد:

$$W4\theta + W2\theta = M_P\theta + M_P 2\theta + M_P 3\theta + M_P 2\theta \qquad (3)$$

که از آن:

$$W = \frac{4}{3}M_P$$

می‌توانستیم معادله (۳) را به صورت مستقیم با جمع معادله‌های (۱) و (۲) و پیش‌بینی کردن حذف لولا در B به دست بیاوریم. معادله (۱) را می‌توان اینگونه نوشت:

$$W2\theta = \{M_P\theta\} + M_P 2\theta + M_P\theta \qquad (4)$$

که عبارت درون کروشه کار داخلی انجام شده توسط ممان پلاستیک در B است. به صورت مشابه معادله (۲) را می‌توان اینگونه نوشت:

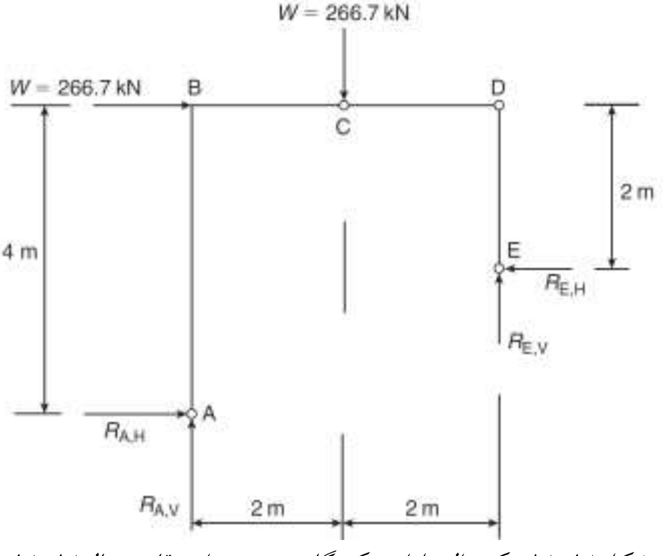
$$W4\theta = M_P\theta + \{M_P\theta\} + M_P 2\theta + M_P 2\theta \qquad (5)$$

با جمع معادله‌های (٤) و (۵) و نادیده گرفتن عبارت های درون کروشه خواهیم داشت:

$$W6\theta = 8M_P\theta$$

مانند قبل. از معادله‌های (۱)، (۲) و (۳) می‌بینیم که ساز و کار بحرانی ساز و کار ترکیبی است و کمترین مقدار W مقدار $4M_P/3$ است، بنابراین:

$$W = \frac{4\times 200}{3}$$



شکل۱۸-۱۸ عکس‌العمل‌ای تکیه‌گاهی در ویرانی قاب مثال۱۸-۱۸

یعنی:

$$W = 266.7kN$$

شکل ۱۸-۱۸ عکس العمل های تکیه گاهی مربوط به حالت ویرانی را نشان می‌دهد. ممان داخلی در D برابر M_P است. (D یک ممان پلاستیک است) بنابراین با ممان گرفتن حول D برای نیروهای اثر کننده بر عضو ED خواهیم داشت:

$$R_{E,H} \times 2 = M_P = 200\,kN.m$$

بنابراین:

$R_{E,H} = 100\,kN$

برای قسمت افقی داریم:

$R_{A,H} + 266.7 - 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A,H} = -166.7\,kN$

با ممان گرفتن حول A:

$R_{E,V} \times 4 + R_{E,H} \times 2 - 266.7 \times 2 - 266.7 \times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{E,H} = 350.1\,kN$

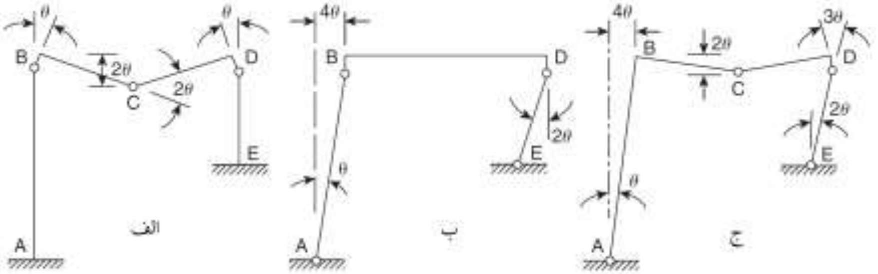
در نهایت برای حالت عمودی داریم:

$R_{A,V} + R_{E,V} - 266.7 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{A,V} = -83.4\,kN$

در قاب پرتال مثال ۱۸–۸ هر عضو دارای ممان پلاستیک M_P است. در مواردی که اعضا دارای گشتاورهای پلاستیک متفاوت هستند راهکارهای کمی متفاوت نیاز است.

مثال ۱۸–۹) در قاب پرتال مثال ۱۸–۸ ممان پلاستیک عضو BCD برابر $2M_P$ است. مقدار بحرانی بار W را محاسبه کنید.

از آنجایی که اعضای عمودی، اعضای ضعیف تر هستند لولاهای پلاستیک در B در AB و در D در ED، برای هر سه ساز و کار ویرانی ممکن، مانند آنچه در شکل ۱۸–۱۹ نشان داده شده است شکل می‌گیرند.



شکل۱۸–۱۹ ساز و کارهای ویرانی قاب مثال ۱۸–۱۹

به صورت ضمنی برای معادله کار مجازی شکل ۱۸–۱۹ الف نیز مقدار ممان پلاستیک در B و D برابر MP است در حالی که در C برابر $2MP$ است. بدین ترتیب معادله کار مجازی در این حالت برابر است با:

$W2\theta = M_P\theta + 2M_P 2\theta + M_P\theta$

که می‌دهد:

$W = 2M_P$

برای ساز و کار انتقال داریم:

$$W4\theta = M_P\theta + M_P\theta + M_P 2\theta + M_P 2\theta$$

بنابراین:

$$W = \frac{3}{2}M_P$$

و برای ساز و کار ترکیبی داریم:

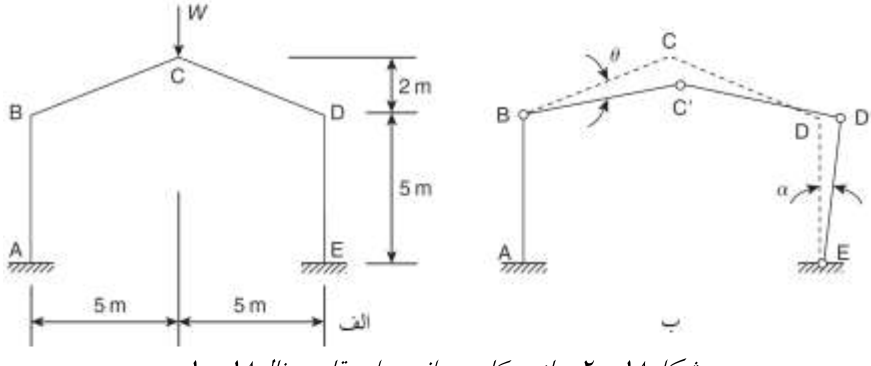
$$W4\theta + W2\theta = M_P\theta + 2M_P 2\theta + M_P 3\theta + M_P 2\theta$$

که از آن داریم:

$$W = \frac{5}{3}M_P$$

می‌بینیم که کمترین مقدار W که ویرانی را ایجاد خواهد کرد برابر $3MP/2$ است و ساز و کار انتقال ساز و کار بحرانی است. حال قاب پرتالی را بررسی می‌کنیم که دارای سقف شیبدار است و محاسبه تغییر مکان هایش پیچیده‌تر است.

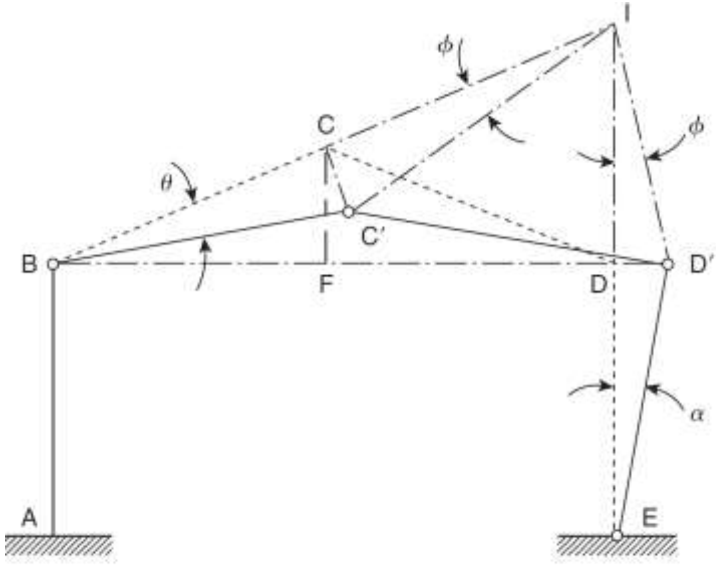
مثال ۱۸–۱۰) قاب پرتال شکل ۱۸–۲۰ الف دارای اعضایی است که دارای ممان پلاستیک یکسان MP هستند. کمترین مقدار بار W لازم برای ایجاد ویرانی را تعیین کنید اگر ساز و کار ویرانی مانند شکل ۱۸–۲۰ ب باشد.



شکل۱۸–۲۰ ساز و کار ویرانی برای قاب مثال۱۸–۱۰

در مثال های ۱۸–۸ و ۱۸–۹ تعیین جابجایی‌های گره‌های قاب نسبتاً ساده بودند زیرا تمام اعضا عمود بر هم بودند. برای یک قاب با سقف شیبدار محاسبه دشوارتر است. یک روش استفاده از مفهوم مرکزهای آنی است. در شکل ۱۸–۲۱ عضو BC دارای دوران کوچک θ است، از آنجایی که θ کوچک است می‌توان فرض کرد C با زاویه قایمه نسبت به BC به

C' حرکت کند. به صورت مشابهی عضو DE حول E دوران می‌کند به گونه ای که D به صورت افقی به D' حرکت می‌کند. علاوه بر این از آنجایی که C با زاویه قائمه نسبت به BC و D با زاویه قایمه نسبت به DE حرکت می‌کنند متعاقبا باید CD حول مرکزی آنی I دوران کند. این نقطه، نقطه تقاطع BC و ED است، خط های IC و ID حول زاویه یکسان ϕ می‌چرخند.



شکل۱۸-۲۱ روش مرکزهای آنی برای قاب مثال۱۸-۱۰

از مثلث های BCC' و ICC' داریم:

$$CC' = BC\theta = IC\phi$$

بنابراین:

$$\phi = \frac{BC}{IC} = \theta \qquad (1)$$

از مثلث های EDD' و IDD' داریم:

$$DD' = ED\alpha = ID\phi$$

بنابراین:

$$\alpha = \frac{ID}{ED}\phi = \frac{ID}{ED}\frac{BC}{IC}\theta \qquad (2)$$

حال از C عمودی بر BD در F رسم می‌کنیم. سپس از مثلث های متشابه BCF و BID داریم:

$$\frac{BC}{CI}=\frac{BF}{FD}=\frac{5}{5}=1$$

بنابراین $BC=CI$ و از معادله (۱) ، $\phi=\theta$، همینطور:

$$\frac{CF}{ID}=\frac{BF}{BD}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

که از آن $ID=2CF=4m$. سپس از معادله (۲) داریم:

$$\alpha=\frac{4}{5}\theta$$

در نهایت جابجایی عمودی C به C' برابر $BF\theta(=5\theta)$ است. معادله کار مجازی برابر خواهد بود:

$$W5\theta=M_P\theta+M_P(\theta+\alpha)+M_P(\phi+\alpha)+M_P\alpha$$

با جایگذاری ϕ و α بر حسب θ از بالا خواهیم داشت:

$$W=1.12M_P$$

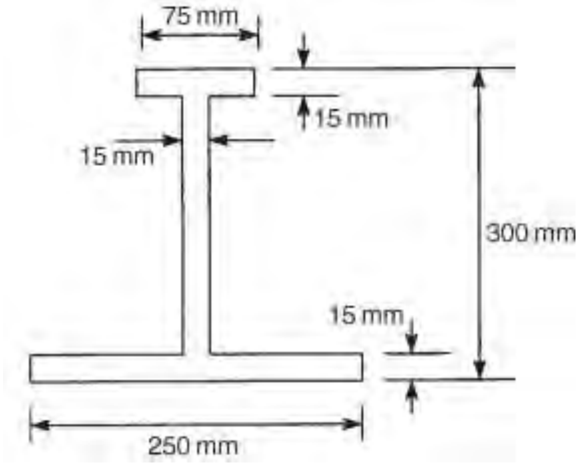
ساز و کار شکست شکل ۱۸-۲۰ ب به انتقال مربوط نمی‌شود. هر چند اگر یک بار افقی در B اعمال می‌شد انتقال رخ می داد و دیگر ساز و کارهای شکست ممکن را نیز باید مورد بررسی قرار می‌دادیم. دو عدد از چنین ساز و کارهایی در شکل ۱۸-۲۲ نشان داده شده‌اند. توجه داشته باشید که در شکل ۱۸-۲۲ الف، یک حذف لولا در C وجود دارد و در شکل ۱۸-۲۲ب یک حذف لولا در B وجود دارد. در تعیین بارهای ویرانی چنین قاب‌هایی روش مرکزهای آنی همچنان قابل کاربرد است.

مسائل

۱) ممان پلاستیک و ضریب شکل را در یک تیر با مقطع دایروی دارای شعاع r و تنش تسلیم σ_Y راتعیین کنید.

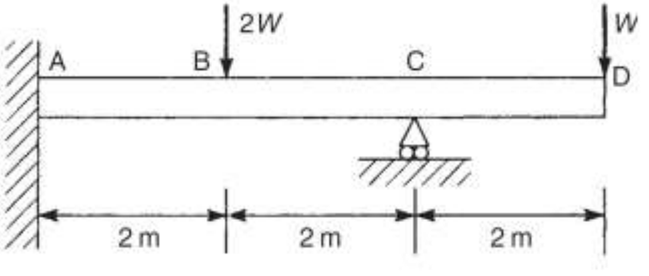
۲) ممان پلاستیک و ضریب شکل را برای تیر ورق جعبه ای جدار نازکی که سطح مقطعش دارای عرض b، عمق d و ضخامت ثابت دیواره t است تعیین کنید. مقدار f را برای $b=200mm$ و $d=300mm$ محاسبه کنید.

۳) تیر دارای سطح مقطع شکل۱۸-۲۲ از فولاد نرم ساخته شده است که دارای تنش تسلیم ۳۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع است. ممان پلاستیک مقطع و ضریب شکلش را محاسبه کنید.



شکل۱۸-۲۲

٤) تیر طره ای با طول ٦ متر دارای یک تکیه‌گاه اضافی با فاصله ۲ متر از انتهای آزادش مانند شکل۱۸-۲۳ است. کمترین مقدار W که در آن ویرانی رخ می‌دهد را محاسبه کنید اگر مقطع تیر مانند شکل ۱۸-۲۲ باشد. به صورت واضح شکل ساز و کار ویرانی مربوط به این بار نهایی را بیان کنید.

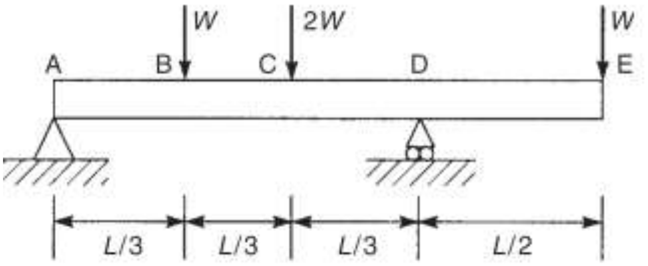


شکل۱۸-۲۳

۵) تیر دارای طول L به صورت صلب در هر انتهایش گیردار شده است و بار گسترده یکنواختی را با شدت w در تمام دهانه اش حمل می‌کند. مقاومت نهایی تیر را بر حسب ممان پلاستیک M_P در سطح مقطعش تعیین کنید.

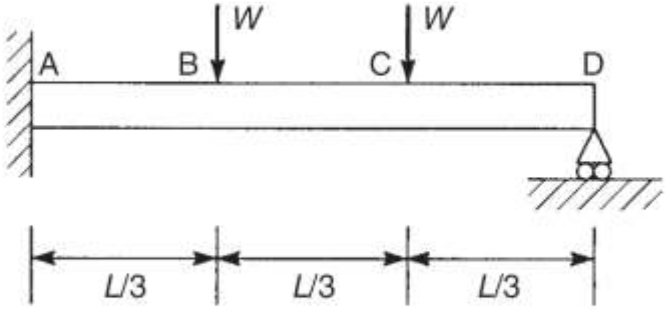
Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

۶) تیری با اتکای ساده دارای طره‌ای آویزان است و بارها را مانند شکل۱۸-۲۴ حمل می‌کند. بار ویرانی تیر را با ذکر موقعیت لولای پلاستیک تعیین کنید.



شکل۱۸-۲۴

۷) مقاومت نهایی طره پایه‌دار شکل۱۸-۲۵ را تعیین کنید و ساز و کار ویرانی مربوط را تعیین کنید.

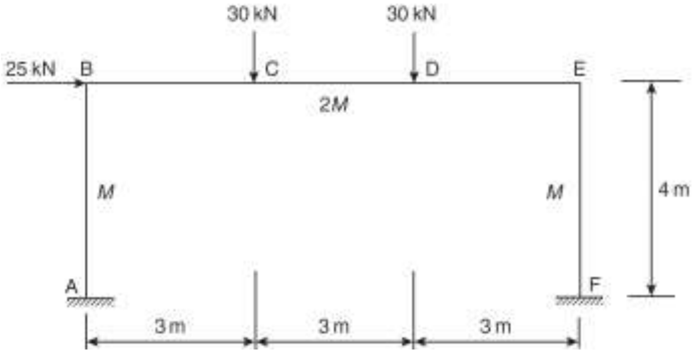


شکل۱۸-۲۵

۸) بارهای W بر روی طره پایه دار شکل ۱۸-۲۵ هر کدام ۱۵۰ کیلونیوتن هستند و دهانه‌اش ۶ متر است. اگر تنش تسلیم فولاد نرم برابر ۳۰۰ نیوتن بر میلی متر مربع باشد، مقطعی مناسب برای تیر با استفاده از ضریب بار ۱٫۷۵ به ویرانی، ارائه دهید.

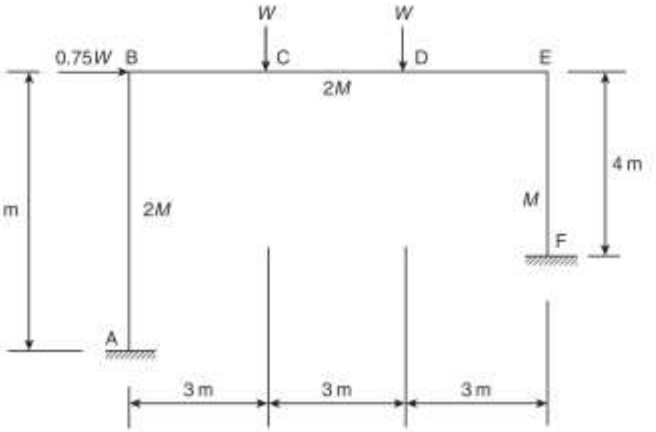
۹) اعضای یک قاب پرتال فولادی دارای گشتاورهای پلاستیک نسبی مانند شکل ۱۸-۲۶ هستند. مقدار M مورد نیاز برای بار نهایی نشان داده شده را محاسبه کنید.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:



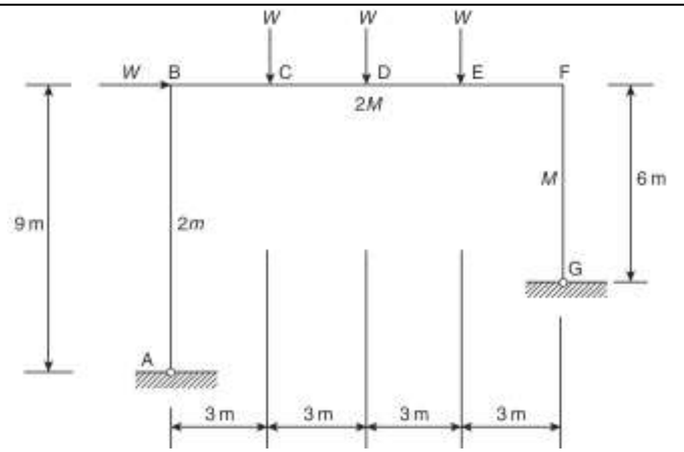
شکل ۱۸-۲۶

۱۰) قاب نشان داده شده در شکل ۱۸-۱۰ به فونداسیونش مفصل شده است و دارای گشتاورهای پلاستیک نسبی مقاوم مانند شکل است. اگر M دارای مقدار ۱۰۸ کیلونیوتن متر باشد مقدار W که باعث ویرانی قاب می‌شود را محاسبه کنید.



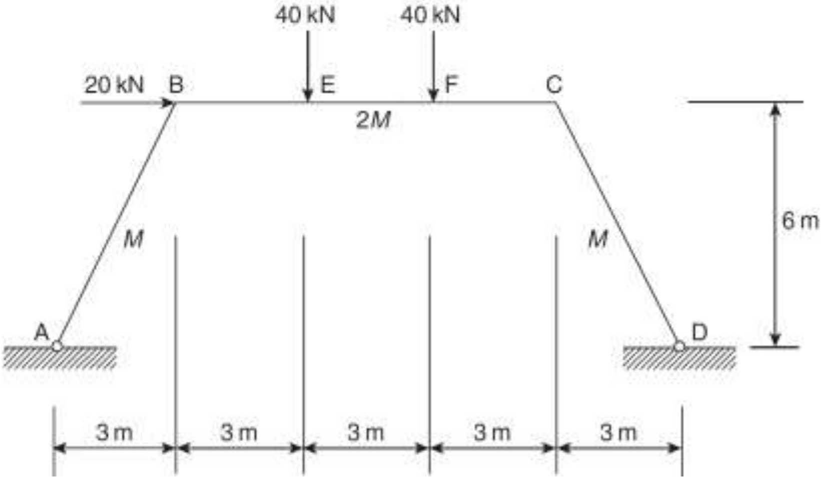
شکل ۱۸-۲۷

۱۱) شکل ۱۱-۲۸ قاب پرتالی را نشان می‌دهد که به فونداسیونش مفصل شده است و بارهایی عمودی و افقی را آنطور که نشان داده شده است حمل می‌کند. اگر مقادیر نسبی گشتاورهای مقاوم پلاستیک آنهایی باشند که داده شده است رابطه بین بار W و پارامتر ممان پلاستیک M را تعیین کنید.همچنین عکس العمل های فونداسیون در ویرانی را محاسبه کنید.



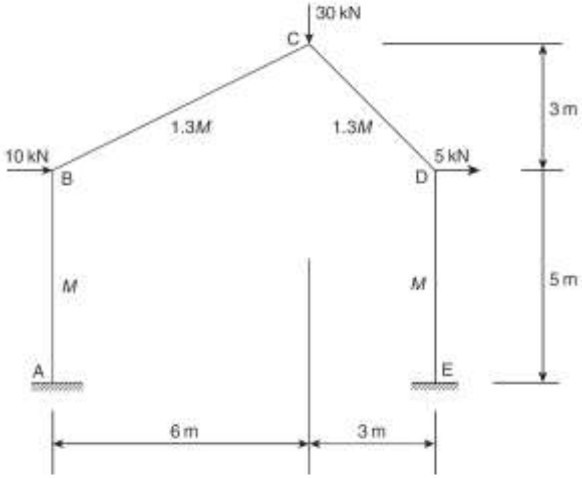
شکل۱۱-۲۸

۱۲) قاب فولادی شکل۱۸-۲۹ تحت بارگذاری شکل ویران می‌شود. مقدار پارامتر ممان پلاستیک M را در صورتی که گشتاورهای پلاستیک نسبی مقاوم اعضا مانند شکل باشند محاسبه کنید. همینطور عکس العمل های تکیه گاهی را در ویرانی محاسبه کنید.



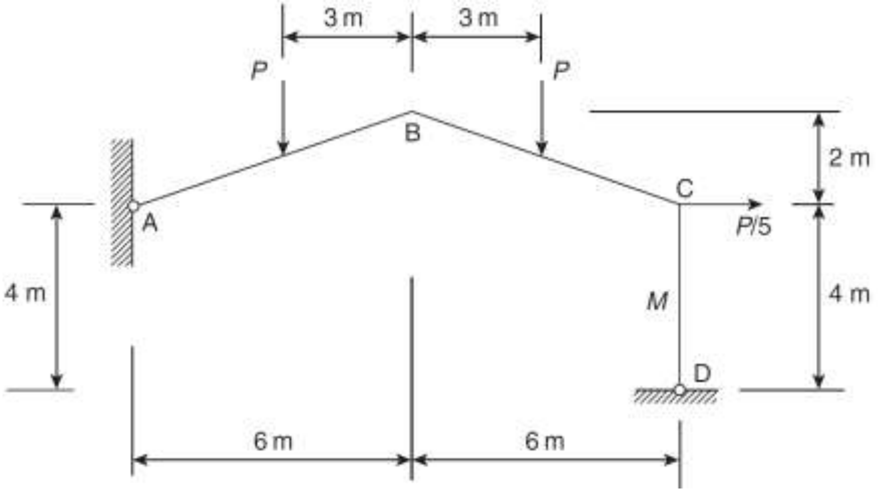
شکل۱۸-۲۹

۱۳) قاب پرتال دارای سقف شیبدار شکل۱۸-۳۰ دارای ستون‌هایی با ممان پلاستیک مقاوم برابر M است و تیرهای عرضی دارای ممان پلاستیک مقاوم برابر $1.3M$ هستند. کمترین مقدار M که می‌توان استفاده کرد تا تیر در بارگذاری داده شده ویران نشود را محاسبه کنید.



شکل۱۸-۳۰

۱٤) قاب شکل۱۸-۳۱ در D به فونداسیون و در A به دیوار مفصل شده است. ممان پلاستیک مقاوم ستون CD برابر ۲۰۰ کیلونیوتن متر است و برای تیرهای عرضی AB و BC برابر ۲٤۰ کیلونیوتن متر است. برای بارگذاری نشان داده شده مقدار P را در ویرانی محاسبه کنید.



شکل۱۸-۳۱

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

فصل نوزدهم
تئوری خط تسلیم دال‌ها

مقدمه

قبل توسعه روش تحلیل بارنهایی[1] در طراحی دال‌های بتنی مسلح[2]، از روش تحلیل‌های الاستیک استفاده می‌شد. روش‌هایی که برای طراحی اعضاء بتن آرمه بکار می‌رود غالباً مبتنی بر نتایج حاصل از یک آنالیز الاستیک سازه تحت اثر بارهای ضریبدارند. لیکن رفتار واقعی سازه‌های نامعین بدین شکل است که وقتی یک یا چند مقطع به مقاومت خمشی خود می‌رسند تغییراتی در منحنی‌های الاستیک این نقاط بوجود می‌آید و در نتیجه از این مرحله به بعد دیگر نمی‌توان از نتایج یک آنالیز الاستیک استفاده نمود. اگر سازه تغییرشکل پذیر باشد هر بار که مقطعی به مقاومت خمشی خود می‌رسد، بازتوزیع گشتاورهای خمشی در آن مقطع اتفاق می‌افتد تا اینکه تعدادی مفصل پلاستیک بوجود آیند و سازه به مکانیزم، یعنی سازه‌ای با تعادل ناپایدار تبدیل شود. در این حالت سازه نمی‌تواند بار بیشتری را تحمل کند و فرو می‌ریزد. به چنین تحلیلی که در آن دیاگرام‌های گشتاور خمشی در لحظه فرو ریختگی مبنای طراحی قرار می‌گیرد، تحلیل بار نهایی یا تحلیل پلاستیک گفته می‌شود. در این بخش به معرفی روشی تحت عنوان روش تحلیل خطوط تسلیم یا خطوط گسیختگی[3] معرف است تشریح می‌گردد. تحلیل‌های خط تسلیم برای دال‌های بتن مسلح از سال ۱۹۶۰ یک مهندس دانمارکی توسعه داده شد ولی مقدمات آن از سال ۱۹۴۰ آغاز شد. در این روش فرض می‌شود که مقاومت دال تنها بوسیله خمش تعیین می‌شود و سایر عوامل نظیر خیز و برش باید به صورت جداگانه مورد بررسی قرار گیرند. این روش تصویر بهتری از رفتار دال‌ها در ذهن مجسم می‌کند و همچنین تحلیل بسیاری از سیستم‌های دال که به جهت شکل هندسی قابل حل با روش‌های دیگر نیستند را امکان پذیر می‌کند.

۱۹-۱ تئوری خط تسلیم

---
1 Ultimate load
2 Reinforced concrete
3 Yield line theory

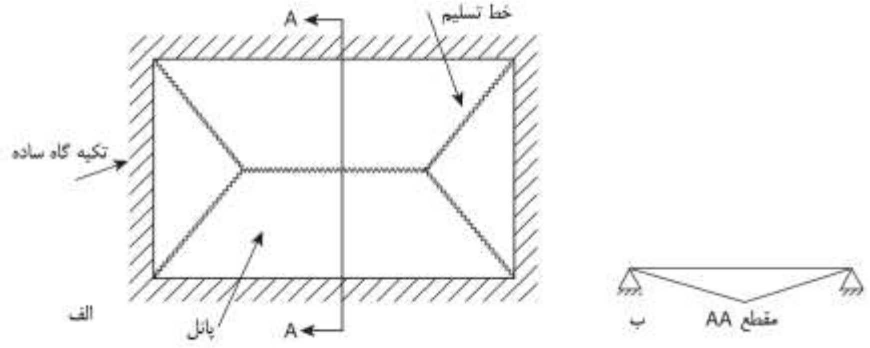
کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

دو روش کلی برای محاسبه ظرفیت بار نهایی برای یک دال بتن مسلح با استفاده از تئوری خط تسلیم وجود دارد. اولین روش استفاده از روش انرژی[1] و کار مجازی و دیگری روش تعادل[2] با استفاده از خط تسلیم آن می‌باشد.

خط تسلیم

در یک دال فرض می‌شود که تحت بارهای نهایی مکانیزم شکست آن به صورت خطوط مستقیم می‌باشد و بعد از شکست، دال به پانل‌هایی تقسیم شده و مکانیزم شکست در مسیر این خطوط رخ می‌دهد. در شکل۱۹-۱الف مکانیزم شکست برابر یک دال مستطیلی تحت یک بار گسترده یکنواخت نشان داده شده است. فرض می‌شود، بعد از تسلیم پانل‌ها به صورت صفحه باقی می‌مانند. مقطع AA در شکل۱۹-۱ب نشان دهنده مقطع دال بعد از تسلیم آن می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که گشتاور خمشی موجود در امتداد خطوط تسلیم ثابت می‌باشند.



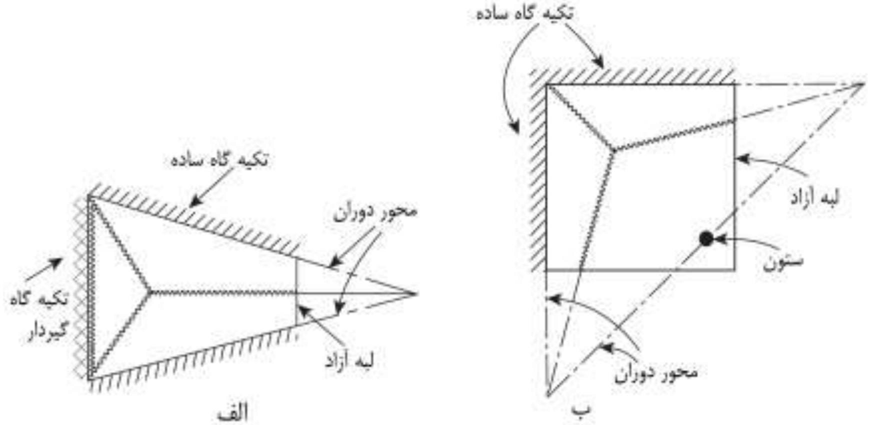
شکل۱۹-۱ مکانیزم شکست برای دال مستطیلی

دال در حین چرخش حول محورهای گذرنده از ستون‌ها دچار دوران می‌شود. در شکل۱۹-۲ چند مثال از خط تسلیم دال‌ها نشان داده شده است.

[1] Energy method
[2] Equilibrium method

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

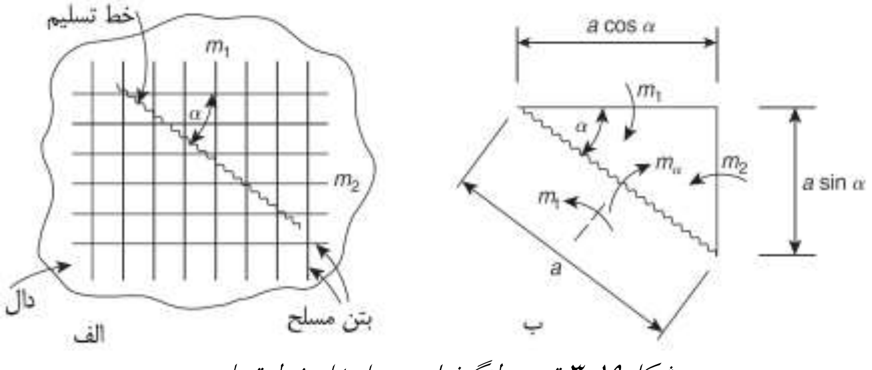


شکل۱۹-۲مکانیزم شکست

در شکل‌های۱۹-۱ و ۱۹-۲ب تکیه‌گاه‌های دال به صورت ساده می‌باشند. بنابراین دوران دال حول تکیه‌گاه‌های آن به صورت آزاد انجام می‌شود. دال نشان داده شده در شکل۱۹-۲ب در تکیه‌گاه سمت چپ خود به صورت گیردار بوده بنابراین به راحتی قادر به دوران حول این تکیه‌گاه نیست، بنابراین یک خط تسلیم در امتداد آن ایجاد می‌گردد.

گشتاور نهایی در امتداد خط تسلیم

شکل۱۹-۳الف قسمتی از یک دال بتن مسلح را نشان می‌دهد؛ که توسط میلگردهای m_1 بر واحد عرض دال و میلگردهای m_2 بر واحد طول آن مسلح شده است. فرض کنید که خط تسلیم در زاویه‌ای به اندازه α از میلگردهای m_2 ایجاد می‌شود. حال المانی به طول a در امتداد خط تسلیم دال مانند شکل۱۹-۳ب در نظر بگیرید.



شکل۱۹-۳ تعیین لنگرنهایی در امتداد خط تسلیم

با نوشتن معادله تعادل گشتاور در جهت m_α داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel
کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$m_\alpha a = m_1 a\cos\alpha(\cos\alpha) + m_2 a\sin\alpha(\sin\alpha)$$

$$m_\alpha = m_1\cos^2\alpha + m_2\sin^2\alpha \qquad (۱-۱۹)$$

و همچنین با نوشتن معادله تعادل گشتاور در جهت m_t داریم:

$$m_t a = m_1 a\cos\alpha(\sin\alpha) - m_2 a\sin\alpha(\cos\alpha)$$

بنابراین داریم:

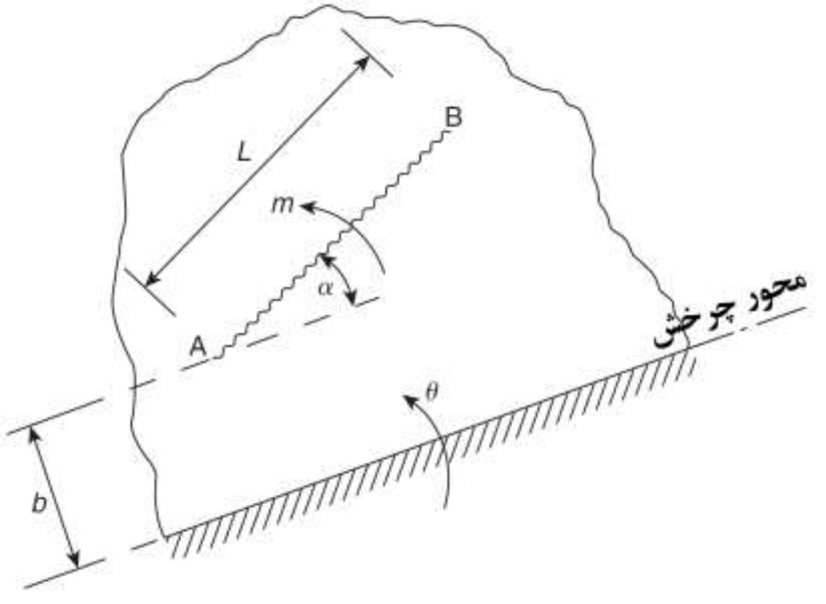
$$m_t = \frac{(m_1 - m_2)}{2}\sin 2\alpha \qquad (۲-۱۹)$$

در حالی که دارای خواص یکسان در هر دو جهت[1] باشد، $m_1 = m_2 = m$ در نتیجه داریم:

$$m_t = 0 \qquad m_\alpha = m \qquad (۳-۱۹)$$

کار داخلی انجام شده توسط گشتاور نهایی

در شکل۱۹-٤ قسمتی از یک دال و محوری که حول آن دوران می‌کند را نشان داده است. خط تسلیم در امتداد خطی با زاویه α نسبت به محور دوران ایجاد شده است. فرض کنید مقدار زاویه دوران دال به اندازه θ که به صورت مجازی می‌باشد، رخ داده است.



[1] Isotropic

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

شکل۱۹-٤ تعیین کار انجام شده توسط گشتاور نهایی

کار مجازی انجام شده توسط گشتاور نهایی مقطع در اثر گشتاورهای نهایی به صورت زیر است:

$$VW(m) = (ML)(\cos\alpha)\theta = m(L\cos)\theta \qquad (٤-۱۹)$$

با توجه به رابطه۱۹-٤ دیده می‌شود که مقدار کار داخلی انجام شده توسط گشتاورهای نهایی مقطع برابر است با ضرب گشتاور در زاویه چرخش دال و تصویر خط تسلیم در امتداد محور دوران. به عنوان مثال در صورتی که در شکل۱۹-٤، نقطه A به اندازه واحد به صورت مجازی تغییرمکان یابد داریم:

$$\theta = \frac{1}{b}$$

که در آن b تصویر قائم نقطه A تا محور دوران می‌باشد.

کار انجام شده به علت بار اعمال شده بر آن

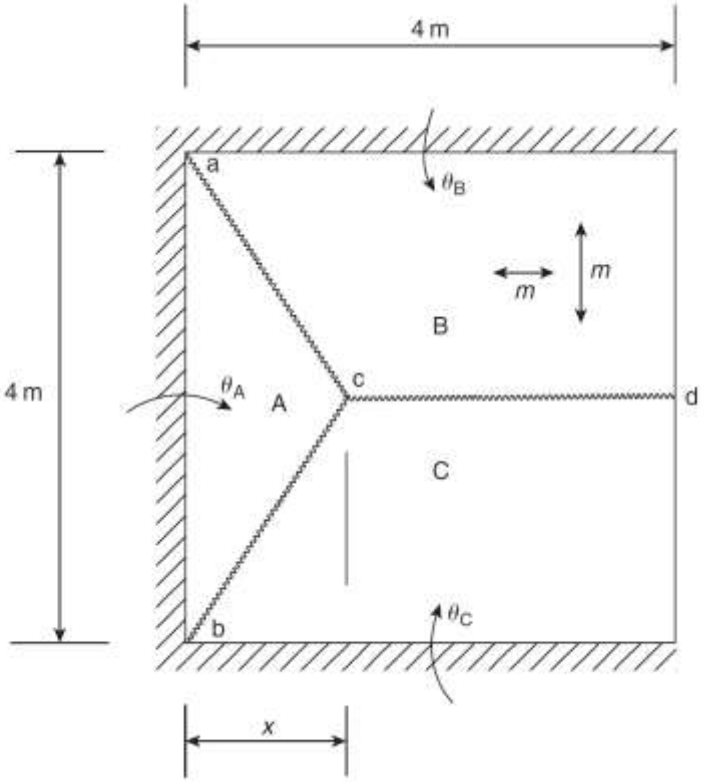
برای یک دال که تحت یک بار گسترده به شدت $w(x,y)$ می‌باشد، کار مجازی انجام شده متناظر با دوران مجازی دال برابر است با:

$$VW(m) = \int\int wu\, dx\, dy \qquad (۵-۱۹)$$

که در آن u جابجایی مجازی در نقطه به مختصات (x,y) است. با داشتن کار مجازی متناظر با گشتاور داخلی نهایی و کار مجازی به سبب بارهای اعمال شده داریم:

$$VW(w) = VW(m) \qquad (٦-۱۹)$$

مثال۱۹-۱) دال نشان داده شده در شکل۱۹-۵ که به صورت متقارن و یکسان در هر دو جهت مسلح شده است را در نظر بگیرید که تحت بار گسترده یکنواخت $12kN/m^2$ می‌باشد. اگر گشتاور نهایی مقاوم فولادهای مسلح کننده برابر m بر واحد عرض آن باشد، مقدار m را که در شکل نشان داده شده است را تعیین نمایید.



شکل۱۹-۵ دال مثال۱۹-۱

حل) دال در سه جهت دارای تکیه‌گاه ساده و در جهت دیگر آزاد می‌باشد. فرض می‌کنیم که نقطه c که در محل برخورد خط‌های تسلیم هست، به اندازه واحد دچار یک جابجایی مجازی واحد می‌شود. پس

$$\theta_A = \frac{1}{x} \qquad \theta_B = \theta_C = \frac{1}{2}$$

کار داخلی انجام شده به صورت زیر بدست می‌آید:

$$VW(m) = m \times 4\frac{1}{x} + 2m \times 4\frac{1}{2} \qquad \text{الف}$$

جمله اول سمت راست رابطه (الف) در واقع کار انجام شده توسط گشتاور نهایی ایجاد شده در امتداد خط تسلیم قطری ac و bc از پانل A می‌باشد. جمله دوم سمت راست رابطه

(الف) نیز کار انجام شده توسط گشتاور نهایی ایجاد شده در خط تسلیم افقی مابین B و C است. سهم هر یک از این دو پانل برابر است. با توجه به پانل B داریم:

$$VW(m)_B = mx\left(\frac{1}{2}\right) + m(4-x)\left(\frac{1}{2}\right) = 4m\left(\frac{1}{2}\right)$$

به طور مشابه برای پانل C نیز می‌توان نوشت و با ساده سازی رابطه (الف) داریم:

$$VW(m) = 4m\left(\frac{1}{x}+1\right) \qquad \text{ب}$$

برای محاسبه کار انجام شده توسط بارهای اعمال شده بر روی دال، پانل‌های B و C را به شکل‌های مثلثی و مستطیلی تقسیم می‌کنیم. پانل A نیز مستطیلی است. پس

$$VW(m) = 12\left\{\frac{1}{2}\times 4x \times \frac{1}{3} + \left[\frac{1}{2}x \times 2 \times \frac{1}{3} + (4-x)\times 2 \times \frac{1}{2}\right]\right\} \qquad \text{پ}$$

در رابطه (پ) جابجایی مرکز سطح قسمت مثلثی پانل A، B و C برابر *1/3* و قسمت‌های مستطیلی برابر *1/2* طول آن می‌باشد. بنابراین رابطه (پ) به صورت زیر ساده می‌شود:

$$VW(w) = 96 - 8x \qquad \text{ت}$$

با برابر قرار دادن روابط (ب) و (ت) داریم:

$$4m\left(\frac{1}{x}+1\right) = 96 - 8x$$

$$m = 2\left(\frac{12x - x^2}{1+x}\right) \qquad \text{ث}$$

برای بدست آوردن حداکثر بایستی مقدار مشتق برابر $(dm/dx) = 0$ صفر باشد.

$$0 = \frac{(1+x)(12-2x) - (12x - x^2)}{(1+x)^2}$$

که به صورت زیر کاهش می‌یابد:

$$x^2 + 2x - 12 = 0$$

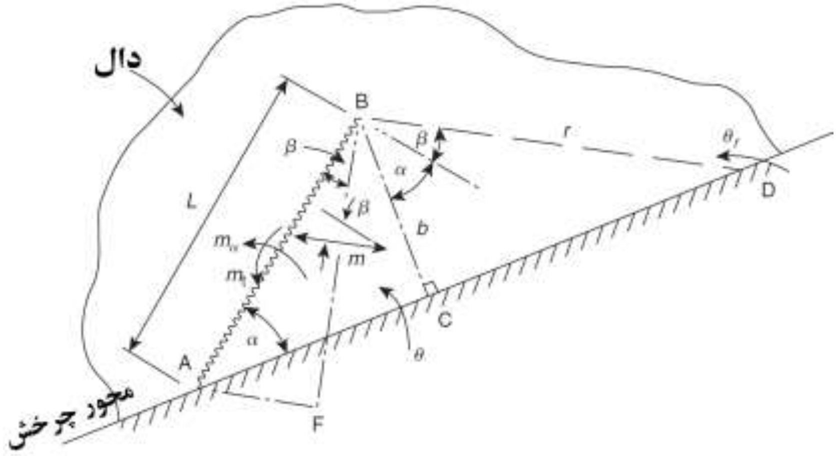
از ریشه منفی صرف نظر می‌شود و $x = 2.6m$ بدست می‌آید. با استفاده از رابطه (ث) داریم:

$$m = 13.6\,\frac{kN.m}{m}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در بسیاری از موارد ارتباط بین گشتاور نهایی m و x معمولاً پیچیده می‌باشد و بدست آوردن حداکثر m معمولاً سخت می‌باشد. یکی از روش‌های معمول استفاده از روش سعی و خطا[1] و ترسیم نمودار m در برابر x برای بدست آوردن مقدار حداکثر m می‌باشد.

شکل ۱۹-۶ در آن خط تسلیم AB به طول L می‌باشد. زاویه خط تسلیم با محور دوران دال برابر α می‌باشد. فرض کنید جهت فولادهای مسلح کننده m عمود بر خط تسلیم می‌باشد.



شکل ۱۹-۶ دال بتن مسلح با خط تسلیم زاویه‌دار

در صورتی که نقطه B به اندازه واحد دچار یک جابجایی واحد عمود بر صفحه دال شود با زاویه θ نسبت به حالت اولیه خود قرار خواهد گرفت. بنابراین زاویه θ به صورت زیر خواهد بود:

$$\theta = \frac{1}{b}$$

که در آن b طول خط نقطه B تا خط چرخش است. مقدار زاویه θ_r برابر خواهد بود با:

$$\theta_r = \frac{1}{r}$$

که در آن r فاصله نقطه B تا محور چرخش و عمود بر خط تسلیم است. درنتیجه:

$$\theta_r = \theta \frac{b}{r} \qquad (۱۹-۷)$$

همچنین با استفاده از مثلث BCD داریم:

[1] Trial and error method

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\frac{b}{r} = \cos(\alpha + \beta)$$

همچنین با استفاده از رابطه۱۹-۷ داریم:

$$\theta_r = \theta \cos(\alpha + \beta) \qquad (۱۹-۸)$$

حال با استفاده از۱۹-۱ و با توجه به اینکه $m_1 = m$، $m_2 = 0$ و $\alpha = \beta$ داریم:

$$m_\alpha = m \cos^2 \beta \qquad (۱۹-۹)$$

و

$$m_t = \left(\frac{m}{2}\right) \sin(2\beta) \qquad (۱۹-۱۰)$$

کار مجازی انجام شده توسط دوران θ به صورت زیر است:

$$VW(m) = (m_t L)(\cos\alpha)\theta - (m_t L)(\sin\alpha)\theta \qquad (۱۹-۱۱)$$

با جانشانی m_t و m_α از رابطه۱۹-۹ و ۱۹-۱۰ در رابطه۱۹-۹ داریم:

$$VW(m) = \left(mL\cos^2\beta\right)(\cos\alpha)\theta - \left[\left(\frac{m}{2}\right)L\sin 2\beta\right](\sin\alpha)\theta$$

که به صورت زیر می‌توان ساده نمود:

$$VW(m) = m(L\cos\beta)\theta(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha)$$

یا

$$VW(m) = m(L\cos\beta)\theta\cos(\alpha + \beta) \qquad (۱۹-۱۲)$$

با جانشانی $\theta\cos(\alpha + \beta)$ از رابطه۱۹-۸ داریم:

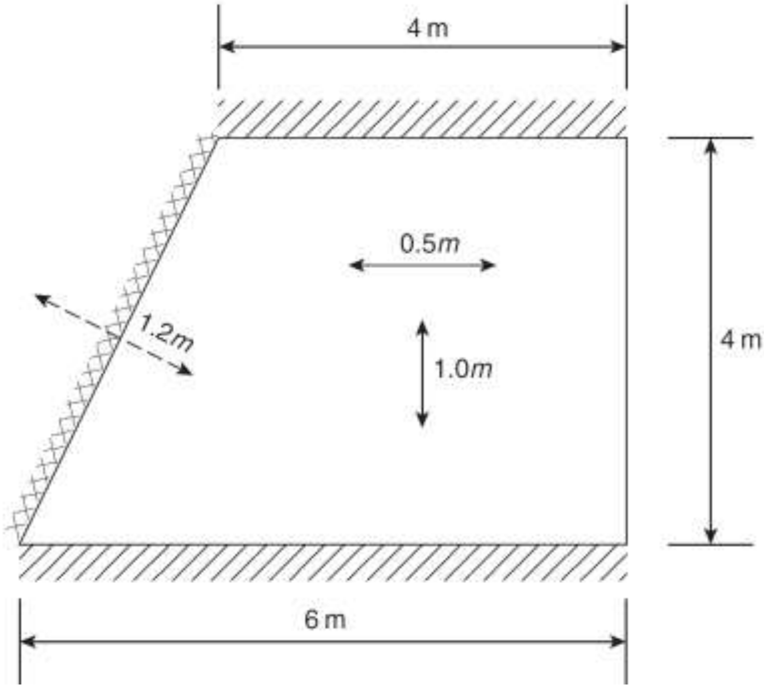
$$VW(m) = m(L\cos\beta)\theta_r \qquad (۱۹-۱۳)$$

در رابطه۱۹-۱۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی نمود:

$$VW(m) = m(L\cos\beta)\frac{1}{r} \qquad (۱۹-۱٤)$$

مثال۱۹-۲) مقدار گشتاور مورد نیاز m برای دال نشان داده شده در شکل۱۹-۷ برای بار نهایی $10kN/m^2$ را بدست آورید. مقدار آرماتورها در شکل نشان داده شده است.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۹-۷ دال مثال۱۹-۲

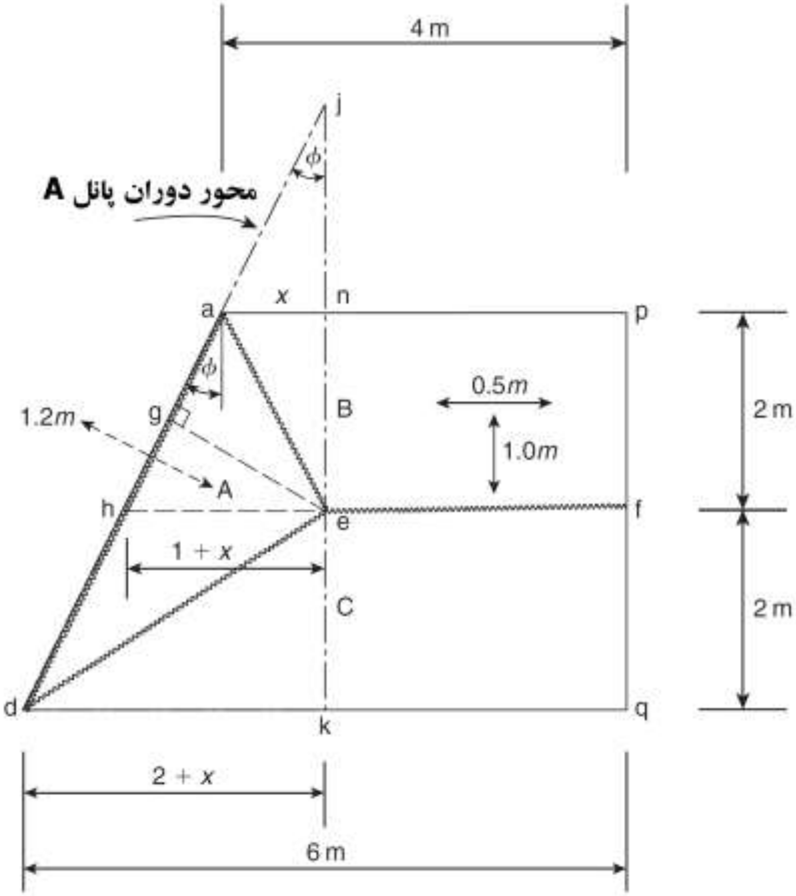
حل) گام ابتدایی انتخاب الگوری خط تسلیم است. الگوی خط تسلیم فرضی مانند شکل۱۹-۸ انتخاب می‌گردد. پانل A حول امتداد خط ad دچار دوران می‌شود و نقطه e به اندازه واحد دچار جابجایی می‌گردد. در اینصورت زاویه دوران پانل A برابر $1/ge$ می‌باشد که خط ge عمود بر امتداد ad می‌باشد. در حالی که راویه چرخش پانل‌های B و C برابر ½ خواهد بود. همچنین با ابعاد نشان داده شده در شکل۱۹-۸، داریم: $ad = 4.5m$ و

$$ge = he\cos\phi = (1+x)(4/4.5) = 0.89(1+x)$$

چون دال در دو جهت مسلح نیست بنابراین بایستی از نتایج رابطه ۱۹-۱٤ برای تعیین کار داخلی انجام شده به علت گشتاور نهایی در قسمت‌های مختلف دال استفاده شود.

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۱۹-۸ الگوی خط تسلیم برای دال مثال۱۹-۲

(۱) در پانل A:

برای آرماتورهای $1.2m$:

محور دوران امتداد ad می‌باشد و فولادهای مسلح کننده در این قسمت عمود بر خط تسلیم ad می‌باشند. بنابراین کار داخلی برابر است با:

الف
$$1.2m \times 4.5\left[\frac{1}{0.89}(1+x)\right]$$

برای آرماتورهای $0.5m$:

تصوبر خطوط تسلیم de و ea موازی با آرماتورهای $4m$ هست و شعاع دوران برابر با $ge = 0.89(1+x)$ می‌باشد. بنابراین کار داخلی برابر است با:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

ب
$$0.5m\times 4\left[\frac{1}{(1+x)}\right]$$

برای آرماتورهای *1m*:

شعاع دوران $ej = he/\tan\phi = 2(1+x)$ می‌باشد.

پ
$$\frac{1.0m[(2+x)-x]}{2(1+x)}=\frac{1.0m}{(1+x)}$$

(۲) در پانل *B*:

برای آرماتورهای *1* متری:

مقدار شعاع دوران برابر ۲ متر بوده و در نتیجه کار داخلی برابر است با:

ت
$$1.0m\times\frac{4}{2}=2.0m$$

(۳) در پانل *C*:

برای آرماتورهای *1* متری:

مقدار کار مجازی انجام شده برابر است با:

ث
$$3.0m$$

با جمع نتایج روابط (الف) تا (ث) می‌توان کل کار داخلی انجام شده را بدست آورد:

ج
$$VW(m)=\left(\frac{14.07+5x}{1+x}\right)$$

برا بدست آوردن کار خارجی انجام شده می‌توان دال را به مستطیل‌های *enpf* و *ekqf* و مثلث‌های *ane*، *ekd* و *ade* تقسیم نمود. از آنجایی که جابجایی *e* برابر واحد می‌باشد پس جابجایی مرکز ثقل هر یک از مستطیل‌ها برابر *1/2* و جابجایی مرکز ثقل مثلث‌ها برابر *1/3* می‌باشد. کل کار انجام شده توسط بارهای جارجی برابر است با:

$$VW(w)=10\left[2(4-x)\left(\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)+2(2+x)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right.$$
$$\left.+4.5\times 0.89(1+x)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\right]$$

و می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

ح
$$VW(w)=10(9.33-0.67x)$$

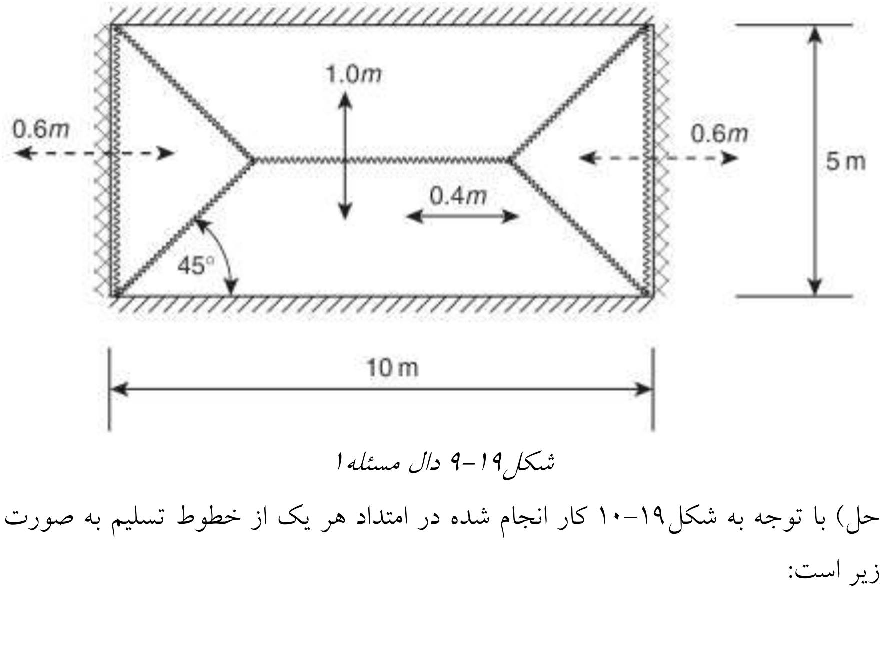
با برابر قرار دادن کار داخلی و کار خارجی انجام شده در روابط (ج) و (ح) داریم:

$$m=\frac{10(1+x)(9.33-0.67x)}{14.07+5x} \qquad \text{خ}$$

برای بدست آوردن مکان حداکثر m می‌توان با مشتق‌گیری از رابطه (خ) و مساوی صفر قرار دادن آن مقدار x را که متناظر با مقدار حداکثر m است را تعیین نمود. در $x=2.71m$ مقدار m حداکثر و برابر $m=10.09kN.m/m$ خواهد بود.

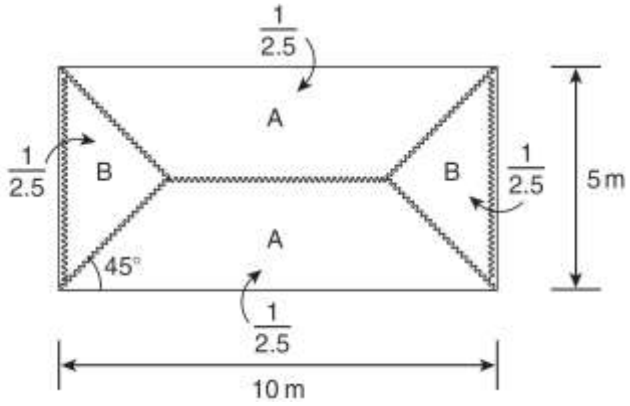
مسائل

۱)در شکل۱۹-۹ مقدار گشتاور m را در صورتی که مقدار بار طراحی دال برابر $14kN/m^2$ باشد را تعیین کنید.



شکل۱۹-۹ دال مسئله۱

حل) با توجه به شکل۱۹-۱۰ کار انجام شده در امتداد هر یک از خطوط تسلیم به صورت زیر است:



شکل۱۹-۱۰

برای دو پانل بالا و پایین Aداریم:

$$2m\left(\frac{1}{2.5}\right)\times 10 = 8m$$

همچنین برای دو پانل B داریم:

$$2\times 5\left(\frac{1}{2.5}\right)(0.4m+0.6m) = 4m$$

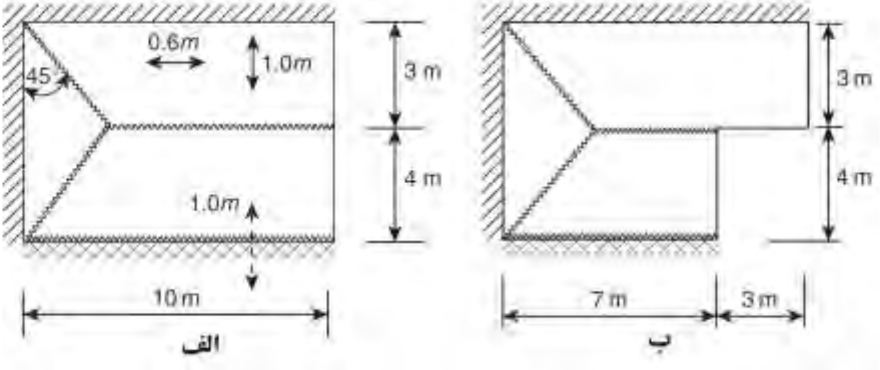
همچنین کار خارجی انجام شده توسط بارها به صورت زیر می‌باشند:

$$14\left[5\times 5\left(\frac{1}{2}\right)+5\times 5\left(\frac{1}{3}\right)\right] = 291.7kN.m$$

پس

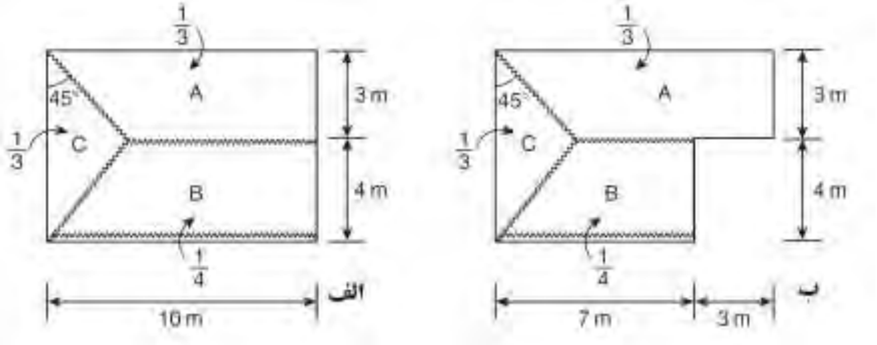
$$12m = 291.7 \quad \Rightarrow \quad m = 24.31kN.m/m$$

۲) دال بتن مسلح نشان داده شده در شکل۱۹-۱۱الف را در نظر بگیرید که تحت یک بار گسترده به شدت $10kN/m^2$ می‌باشد. مقدار گشتاور . مقدار گشتاور m را در امتداد خط تسلیم نشان داده شده را تعیین نمایید. در حالتی که مطابق شکل۱۹-۱۱ب یک بازشو در دال تعبیه گردد نیز مقدار پارامتر m را تعیین کنید.



شکل۱۹-۱۱دال مسئله ۲

حل) با توجه به شکل۱۹-۱۲الف داریم:



شکل۱۹-۱۲

مقدار کار انجام شده در امتداد خط تسلیم برابر است با:

برای پانل A داریم:

$$m \times 10\left(\frac{1}{3}\right) = 3.33m$$

برای پانل B داریم:

$$2m \times 10\left(\frac{1}{4}\right) = 5.0m$$

برای پانل C داریم:

$$0.6m \times 7\left(\frac{1}{3}\right) = 1.4m$$

بنابراین کل کار داخلی انجام شده برابر با *9.73m* می‌باشد. کل کار خارجی انجام شده توسط بارهای خارجی برابر است با:

$$10\left[7\times3\times\left(\frac{1}{3}\right)+7\times7\left(\frac{1}{2}\right)\right]=315kN.m$$

بنابراین با برابر قرار دادن کار داخلی و خارجی داریم:

$$9.73m=315 \quad \Rightarrow \quad m=32.37kN.m/m$$

برای دال نشان داده شده در شکل۱۹-۱۲ب، مقدار کار داخلی انجام شده برابر است با:

در پانل *A*:

$$m\times7\left(\frac{1}{3}\right)=2.33m$$

برای پانل*B*:

$$2m\times7\left(\frac{1}{4}\right)=3.5m$$

برای پانل *C*:

$$0.6m\times7\left(\frac{1}{3}\right)=1.4m$$

بنابراین کل کار داخلی انجام شده برابر با *7.23m* می‌باشد. همچنین

کارخارجی انجام شده= $10\left[7\times3\times\left(\frac{1}{3}\right)+7\times4\left(\frac{1}{2}\right)+3\times3\left(\frac{1}{2}\right)\right]=255kN.m$

بنابراین داریم:

$$7.23m=255 \quad \Rightarrow \quad m=35.27kN.m/m$$

فصل بیستم
خطوط تاثیر

مقدمه

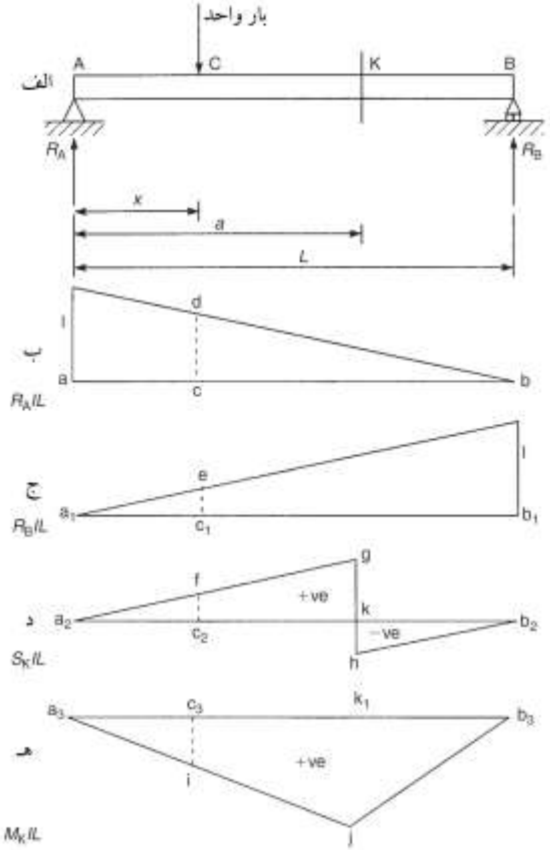
سازه‌هایی که تاکنون بررسی کرده‌ایم تحت سیستم‌های بارگذاری ای بوده‌اند که ثابت بودند، یعنی بارها در یک موقعیت ثابت نسبت به سازه باقی می‌ماندند، در بسیاری از موقعیت‌های عملی، سازه‌ها بارهایی را حمل می‌کنند که به صورت ممتد تغییر می کند، به عنوان مثال یک ساختمان سیستمی از بارهای ثابت را تحمل می کند که شامل وزن خود سازه، وزن وسایل درون آن (مثل پارتیشن ها، ماشین آلات و غیره) و همینطور یک سیستم بارهای زنده می‌شود که سیستم بارهای زنده شامل بارهای برف، بارهای باد یا هر بار متحرکی می‌شود. بنابراین المان‌های سازه‌ای ساختمان باید به گونه‌ای طراحی شوند که بدترین ترکیب این بارهای ثابت و متحرک را تحمل کنند. شکل دیگری از بار متحرک شامل وسایل نقلیه و قطارهایی می‌شود که از پل ها و پل های راه آهن روی دره‌ها می‌گذرند. در این حالت نیز این سازه‌ها باید به گونه‌ای طراحی شوند که وزن خودشان، وزن هرگونه تجهیزات سازه‌ای مانند کف راه یا مسیر راه آهن و همینطور نیروهای ناشی از عبور وسایل نقلیه و قطارها را تحمل کنند. بنابراین لازم است تا شرایط بجرانی وسایل نقلیه را یا قطارها را نسبت به پل یا پل روگذر تعیین کرد. هر چند این بارها، بارهای متحرک هستند فرض می‌شود که آنها با چنان نسبتی حرکت می‌کنند یا تغییر می‌کنند که اثرات دینامیکی (مانند تنش های لرزشی و نوسانی) وجود ندارند.

اثر بارهایی که موقعیت‌های مختلفی بر روی یک سازه دارند را می‌توان به وسیله خطوط تاثیر مطالعه کرد. خطوط تاثیر مقدار توابعی مانند نیروی برشی، ممان خمشی و جابجایی را برای تمام موقعیت‌های یک بار واحد حرکت کننده برای یک نقطه خاص از سازه را می‌دهند. این خطوط ممکن است برای نمایش تغییرات عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی با موقعیت بار واحد به کار روند. با استفاده از خطوط تاثیر مقدار تابع در یک نقطه برای

سیستمی از بارهای طی کننده سازه، قابل محاسبه است. بدین منظور از اصل جمع آثار قوا استفاده می‌کنیم بنابراین سیستم‌های سازه‌ای که ما بررسی می‌کنیم باید الاستیک خطی باشند.

۲۰-۱ خطوط تاثیر برای تیر هایی که در تماس با بار هستند

حال ما چگونگی خط تاثیر را برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی، نیروی برشی و ممان خمشی، در مقطع یک تیر، هنگامی که بار جابجا شونده در تماس مداوم با تیر است را مورد بررسی قرار می دهیم. تیر با اتکای ساده AB شکل ۲۰-۱الف را در نظر می گیریم و فرض می‌کنیم که می‌خواهیم خطوط تاثیر را برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی R_A و R_B و همینطور برای نیروی برشی S_K و ممان خمشی M_K در یک مقطع معین K به دست بیاوریم، تمام خطوط تاثیر با بررسی عبور یک بار واحد در تیر به دست خواهند آمد.



شکل۲۰-۱ خط تاثیر عکس‌العمل تکیه‌گاهی، برش و گشتاور

خط تاثیر R_A: فرض کنید که بار واحد هنگامی که در تیر حرکت می کند به موقعیت C که دارای فاصله x از A است می رسد. با بررسی تعادل ممان تیر حول نقطه B خواهیم داشت:

$$R_A L - 1(L - x) = 0$$

که می‌دهد:

$$R_A = \frac{L - x}{L} \qquad (۲۰-۱)$$

که در نتیجه R_A تابعی خطی از x است و هنگامی که $x=0$ باشد $R_A=1$ است و هنگامی که $x=L$، $R_A=0$ است. هر دو نتیجه با بررسی کاملا آشکار هستند. خط تاثیر برای R_A مانند شکل ۲۰-۱ب خواهد شد. توجه داشته باشید هنگامی که بار واحد در C است مقدار R_A به وسیله بعد قایم cd در خط تاثیر R_A تعیین می‌شود.

خط تاثیر R_B: خط تاثیر عکس العمل R_B به روش مشابهی تعیین می‌شود بنابراین با ممان گرفتن حول A:

$$R_B L - 1x = 0$$

بنابراین:

$$R_B = \frac{x}{L} \qquad (۲۰-۲)$$

معادله ۲۰-۲ نشان می‌دهد که R_B تابعی خطی از x است، علاوه بر این هنگامی که $x=0$ است $R_B=0$ است و هنگامی که $x=L$ است $R_B=1$ است که خط تاثیر شکل ۲۰-۱ج را به وجود می آورد، دوباره هنگامی که بار واحد در C قرار دارد مقدار R_B برابر با بعد قایم c_1e در شکل ۲۰-۱ج خواهد شد.

خط تاثیر S_K: مقدار نیروی برشی در مقطع K وابسته به موقعیت بار واحد است، یعنی وابسته به اینکه بین A و K باشد یا بین K و B باشد. در ابتدا فرض کنید که بار واحد در نقطه C بین A و K باشد، در این حالت نیروی برشی در K برابر است با:

$$S_K = R_B$$

بنابراین از معادله ۲۰-۲ داریم:

$$S_K = \frac{x}{L} \qquad (0 \le x \le a) \qquad (۲۰-۳)$$

قرارداد علامت نیروی برشی همانی است که در بخش ۳-۲ اتخاذ شده بود، ما می‌توانیم معادله ۲۰-۳ را با ارائه S_K بر حسب R_A بیان کنیم:

$$S_K = -R_A + 1$$

با جایگذاری R_A از معادله ۲۰-۱ به دست خواهیم آورد:

$$S_K = -\frac{L-x}{L} + 1 = \frac{x}{L}$$

واضح است که بیان کردن S_K بر حسب R_B نزدیکترین راهکار است. از معادله ۲۰-۳ می‌بینیم که S_K با موقعیت بار به صورت خطی تغییر می کند بنابراین هنگامی که $x=0$، $S_K=0$ و هنگامی که $x=a$، $S_K=a/L$ برابر بعد قایم kg در شکل ۲۰-۱د است و مقدار S_K در سمت چپ نقطه K تحت بار واحد است، بنابراین برای بار بین A و K، خط تاثیر S_K، a_2g در شکل ۲۰-۱د است. بنابراین هنگامی که بار واحد در C باشد مقدار S_K برابر بعد قایم c_2f است. برای بار واحد بین K و B نیروی برشی در K برابر است با:

$$S_K = -R_A \quad \text{یا} \quad S_K = R_B - 1$$

با جایگذاری R_A از معادله ۲۰-۱ خواهیم داشت:

$$S_K = -\frac{L-x}{L} \qquad (a \le x \le L) \qquad (۲۰-٤)$$

دوباره S_K یک تابع خطی از موقعیت بار است، بنابراین هنگامی که $x=L$، $S_K=0$ و هنگامی که $x=a$ یعنی بار واحد دقیقا در سمت راست K قرار دارد، $S_K=-(L-a)/L$ که بعد قایم kh در شکل ۲۰-۱د است. از شکل ۲۰-۱د می‌بینیم که شیب خط a_2g برابر مقدار زیر است:

$$\frac{\left[\left(\frac{a}{L}\right) - 0\right]}{a} = \frac{1}{L}$$

و شیب خط hb_2 برابر است با:

$$\frac{\left[0 + \frac{(L-a)}{L}\right]}{(L-a)} = \frac{1}{L}$$

بنابراین شیب خط تاثیر S_K در دو طرف K یکسان است. علاوه بر این:

$$gh = kh + kg \quad \text{یا} \quad gh = \frac{(L-a)}{L} + \frac{a}{L} = 1$$

خط تاثیر M_K: مقدار ممان خمشی در K به این بستگی دارد که بار واحد در سمت چپ یا راست K باشد. در حالتی که بار واحد در C باشد:

$M_K = R_B(L-a)$ یا $M_K = R_A a - a(a-x)$

که هنگامی که R_B از معادله ۲۰-۲ مقدارش جایگذاری می‌شود به صورت زیر می‌شود:

$$M_K = \frac{(L-a)x}{L} \qquad (۲۰-۵)$$

از معادله ۲۰-۵ می‌بینیم که M_K به صورت خطی با x تغییر می کند، بنابراین وقتی که $x=0$، $M_K=0$ و وقتی که $x=a$:

$$M_K = \frac{(L-a)}{L}\frac{a}{L}$$

که برابر بعد قایم k_1j در شکل ۲۰-۱هـ است. حال برای بار واحد بین K و B:

$$M_K = R_A a$$

که از معادله ۲۰-۱ به صورت زیر می‌شود:

$$M_K = \left(\frac{L-a}{L}\right)a \qquad a \le x \le L \qquad (۲۰-٦)$$

دوباره M_K تابعی خطی از x است بنابراین هنگامی که $x=a$ است:

$$M_K = (L-a)\frac{a}{L}$$

و برابر بعد قایم k_1j در شکل ۲۰-۱هـ است و هنگامی که $x=L$، $M_K=0$ است. بدین ترتیب خط تاثیر کامل ممان خمشی در K خط a_3jb_3 در شکل ۲۰-۱هـ است. از این رو ممان خمشی در K با بار واحد در C برابر بعد قایم c_2i در شکل ۲۰-۱هـ است.

برای به دست آوردن خطوط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی مقطع K در تیر شکل ۲۰-۱الف ما از روابطی که قبلا برای محاسبه عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی R_A و R_B به دست آورده بودیم، استفاده کردیم. اگر فقط خطوط تاثیر S_K و M_K مورد نظر بودند روند زیر باید طی می‌شد.

با بار واحد بین A و K:

$$S_K = R_B$$

حال با ممان گرفتن حول نقطه A:

$$R_B L - 1x = 0$$

بنابراین:

$$R_B = \frac{x}{L}$$

معادله های خطوط تاثیر S_K و M_K به روش مشابهی به دست می آیند. از شکل ۲۰-۱ به یاد داریم که تمام خطوط تاثیر از قطعات خط راست تشکیل شده‌اند. این امر همواره در سازه‌های معین استاتیکی همواره صادق است. بعدها ما از این خاصیت، در بررسی چیدمان‌های تیرها استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۰-۱) خطوط تاثیر را برای نیروی برشی و ممان خمشی در مقطع C تیر شکل ۲۰-۲الف رسم کنید.

در این مثال لازم نیست تا خطوط تاثیر را برای عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی به دست بیاوریم. از آنجایی که برای سازه‌های معین استاتیکی خطوط تاثیر به صورت ترکیبی از قطعات خطی هستند می‌توان بار واحد را در موقعیت‌هایی قرار داد که به ما مقادیر اصلی را بدهد.

خط تاثیر S_C: اگر بار واحد در A باشد:

$$S_C = -R_B = 0$$

اگر بار واحد دقیقا در سمت چپ C باشد:

$$S_C = R_B \qquad (1)$$

با گشتاورگیری حول A داریم:

$$R_B = \frac{1}{3}$$

بنابراین از معادله ۱:

$$S_C = -\frac{1}{3} \qquad (2)$$

حال بار واحد را در سمت راست نقطه C قرار می‌دهیم.

$$S_C = -R_A \qquad (3)$$

با گشتاورگیری حول B داریم:

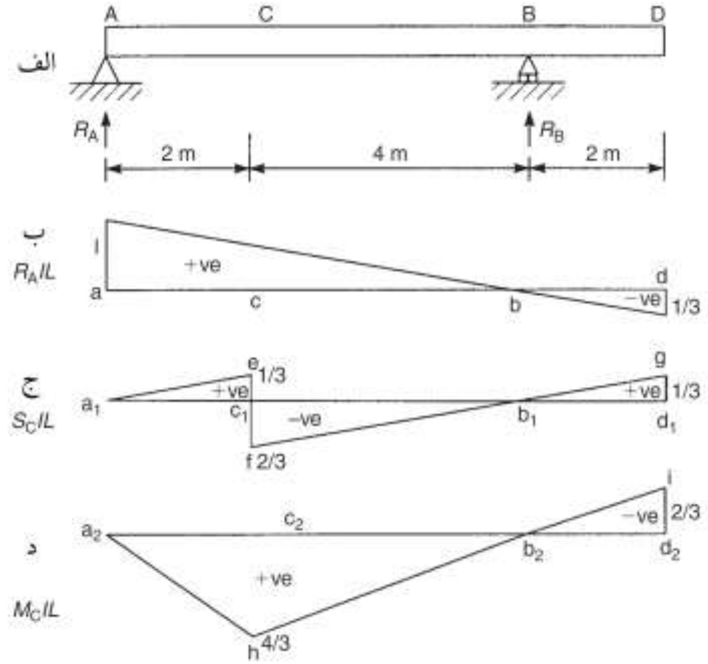
$$R_A = \frac{2}{3}$$

بنابراین با استفاده از رابطه(۳) داریم:

$$S_C = -\frac{2}{3}$$

با بار واحد در نقطه B:

$$S_C = -R_A = 0 \qquad (۴)$$



شکل۲۰-۲ خطوط تاثیر لنگر خمشی و نیروی برشی مثال۲۰-۱

با قرار دادن بار واحد در D خواهیم داشت:

$$S_C = -R_A \qquad (۵)$$

دوباره با ممان گرفتن حول نقطه B:

$$R_A = -\frac{1}{3}$$

از این رو:

$$S_C = \frac{1}{3} \qquad (۶)$$

بدین ترتیب خط تاثیر کامل نیروی برشی در C مانند شکل ۲۰-۲ج خواهد شد، توجه داشته باشید که شیب هر یک از این خطوط fb_1، a_1e و b_1g یکسان است.

خط تاثیر M_C: هنگامی که بار واحد در A قرار می گیرد:

$$M_C = +R_B \times 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 0$$

هنگامی که بار واحد در C قرار می گیرد:

$$M_C = +R_B \times 2 = \frac{4}{3}$$

که در آن $R_A=2/3$ است، در هنگامی که بار واحد در C (بالا را ببینید) است. با بار واحد در B:

$$M_C = +R_A \times 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 0$$

در نهایت با بار واحد در D:

$$M_C = +R_A \times 2$$

اما دوباره با محاسبه S_C مقدار $R_A=-1/3$ می‌شود، از اینرو:

$$M_C = -\frac{2}{3}$$

خط تاثیر کامل ممان خمشی در C در شکل ۲۰-۲د نشان داده شده است، توجه داشته باشید که خط hb_2i یک خط ممتد است.

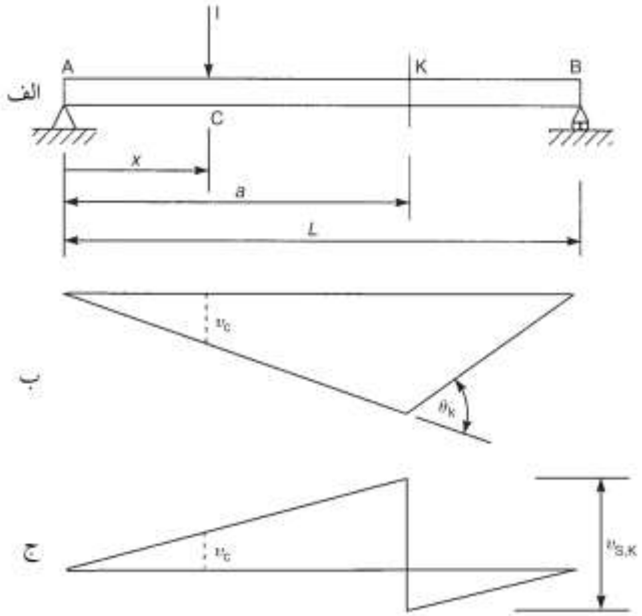
۲۰-۲ اصل مولر برسلاو

یک روش ساده و مناسب برای یافتن خطوط تاثیر، استفاده از اصل مولر برسلاو است که شکل یک خط تاثیر را بدون داشتن مقادیر مختصاتی‌اش به ما می‌دهد. برای سیستم‌های معین استاتیکی به راحتی این امر از هندسه، قابل دستیابی است. تیر با اتکای ساده AB در شکل ۲۰-۳الف را در نظر بگیرید و فرض کنید که یک بار واحد از تیر عبور می کند و به نقطه C در فاصله x از A رسیده است. همینطور فرض کنید که ما می‌خواهیم خط تاثیر ممان را در مقطع K دارای فاصله a از A به دست بیاوریم. حال ما یک جابجایی مجازی υ_C را در نقطه C به گونه‌ای وارد می‌کنیم که کار داخلی انجام شده فقط ناشی از ممان در K باشد. یعنی ما اجازه می دهیم تا شیب θ_K در K تغییر کند. بنابراین طول AK و KB مانند اتصالات صلب شکل ۲۰-۳ ب دوران می‌کنند. بنابراین از اصل کار مجازی (فصل ۱۵) کار مجازی خارجی انجام شده توسط بار واحد برابر با کار مجازی داخلی انجام شده توسط ممان M_K در K است. بنابراین:

$$1\upsilon_C = M_K\theta_K$$

اگر ما مقدار υ_C را به گونه‌ای انتخاب کنیم که θ_K مساوی با واحد شود:

$$M_K = \upsilon_C \qquad (۷-۲۰)$$



شکل۲۰-۳ بررسی صحت اصل مولربرسلاو

یعنی ممان در مقطع K ناشی از بار واحد در نقطه C در فاصله دلخواه x از A برابر بزرگی جابجایی مجازی در C است. اما همانگونه که ما در بخش ۲۰-۱ دیدیم ممان در مقطع K ناشی از بار واحد در نقطه C برابر خط تاثیر ممان در K است. بنابراین خط تاثیر M_K را می‌توان با ارائه یک لولا در K و اعمال یک تغییر زاویه واحد در K به دست آورد، پس از این، شکل جابجا شده برابر خط تاثیر است. استدلال گفته شده را می‌توان برای به دست آوردن خطوط تاثیر نیروی برشی S_K در مقطع K گسترش داد.حال فرض کنید که جابجایی قایم υ_C تولید جابجایی برشی $\upsilon_{S,K}$ در K مانند شکل ۲۰-۳ ج می کند، توجه داشته باشید که جهت υ_C مطابق قرارداد علامت نیروی برشی است. دوباره از اصل کار مجازی داریم:

$$1\upsilon_C = S_K\upsilon_{S,K}$$

اگر ما υ_C را به گونه‌ای انتخاب کنیم که $\upsilon_{S,K}$ مساوی یک باشد:

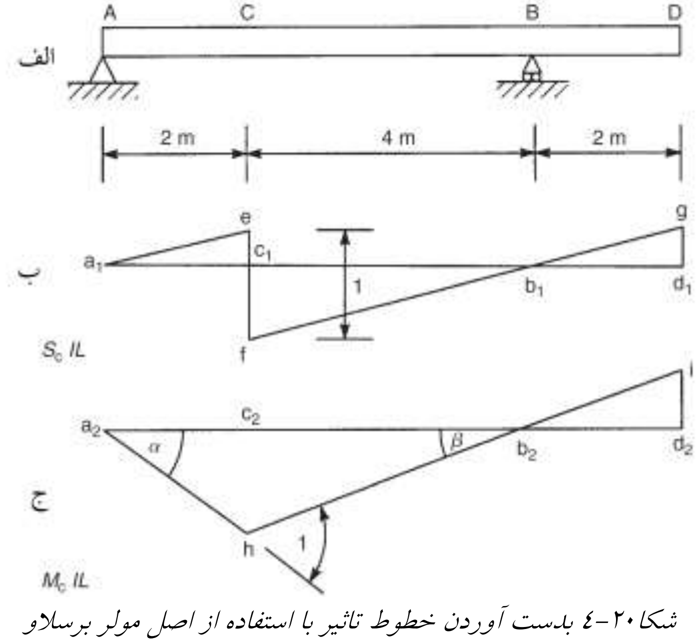
$$S_K = \upsilon_C \qquad (۸-۲۰)$$

از اینرو از آنجاییکه نیروی برشی در مقطع K ناشی از یک بار واحد در هر نقطه C، خط تاثیر نیروی برشی در K است ما می‌بینیم که شکل جابجا شده در شکل ۲۰-۳ج خط تاثیر S_K در هنگامی است که تغییر مکان در K ناشی از جابجایی افقی در C، برابر واحد است. استدلال مشابهی را می‌توان برای به دست آوردن خطوط تاثیر عکس‌العمل‌ها به کار برد.

اصل مولر برسلاو را که در بالا ارائه شد می‌توان به صورت عمومی اینگونه بیان کرد:

☜ *شکل یک خط تاثیر برای یک تابع خاص (عکس العمل تکیه‌گاهی، نیروی برشی، ممان خمشی و...) را می‌توان با حذف مقاومت سازه در آن تابعی که خط تاثیر آن خواسته شده است و اعمال نیروی داخلی مربوط به آن تابع به گونه‌ای که یک جابجایی واحد در آن مقطع ایجاد شود، به دست آورد. شکل جابجا شده سازه پس از این حالت، شکل خط تاثیر را نشان می‌دهد.*

مثال ۲۰-۲) با استفاده از اصل مولر برسلاو شکل خط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی در مقطع C تیر مثال ۲۰-۱(شکل ۲۰-۲الف) را به دست آورید.



شکل۲۰-٤ بدست آوردن خطوط تاثیر با استفاده از اصل مولر برسلاو

در شکل ۲۰-٤ ب ما یک جابجایی برشی واحد در مقطع C وارد می‌کنیم، در واقع ما مقاومت در برابر برش را با بریدن تیر در C حذف کرده‌ایم. پس از آن ما نیروهای برش

مثبتی به دو سمت مقطع بریده شده طبق قرارداد علامت بخش ۳-۲ وارد می‌کنیم. بنابراین تیر در سمت راست C به سمت پایین جابجا می‌شود در حالی که تیر در سمت چپ C به سمت بالا جابجا می‌شود، از آنجا که شیب خط تاثیر در دو طرف C یکسان است می‌توانیم بعد قایم خط تاثیر را با استفاده از هندسه به دست بیاوریم. از این رو در شکل ۲۰-٤ب:

$$\frac{c_1e}{c_1a_1}=\frac{c_1f}{c_1b_1} \quad \Rightarrow \quad c_1e=\frac{c_1a_1}{c_1b_1}c_1f=\frac{1}{2}c_1f$$

علاوه بر این از آنجایی که:

$$c_1e+c_1f=1 \qquad c_1e=\frac{1}{3} \qquad c_1f=\frac{2}{3}$$

بعد قایم $d_1g=1/3$، در شکل ۲۰-٤ ج ما از هندسه مثلث داریم:

$$\alpha+\beta=1$$

سپس با فرض اینکه α و β آنقدر کوچک هستند که tg آنها برابر با زاویه شان در واحد رادیان باشد خواهیم داشت:

$$\frac{c_2h}{c_2a_2}+\frac{c_2h}{c_2b_2}=1 \quad \Rightarrow \quad c_2h\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=1 \quad \Rightarrow \quad c_2h=\frac{4}{3}$$

مانند شکل ۲۰-۲د، بعد قایم $d_2i(=2/3)$ از مثلث‌های متشابه به دست می‌آید.

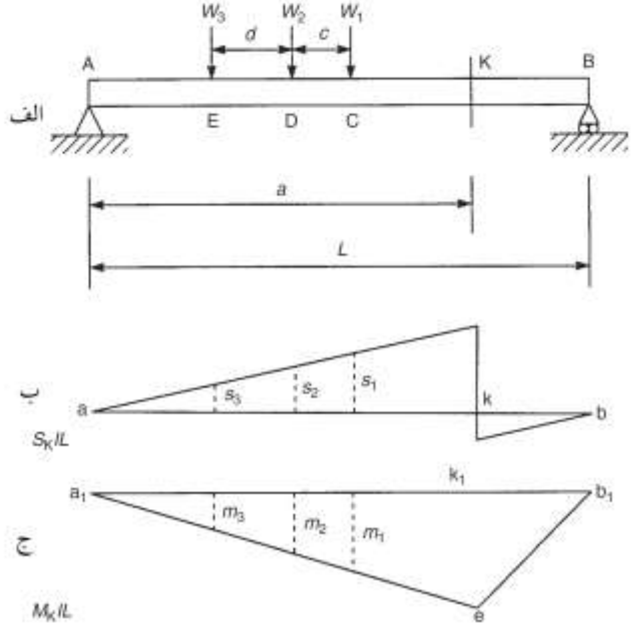
۲۰-۳ سیستم بارهای جابجا شونده

همانطور که دیدیم خطوط تاثیر تیرها را با بررسی عبور یک بار واحد بر روی تیر یا با استفاده از اصل مولر برسلاو به دست می آورند. هنگامی که خط تاثیر به دست آمد می‌توان از آن برای تعیین مقدار تابع خاصی از نیروی برشی، ممان خمشی و غیره در یک مقطع تیر، ناشی از هر سیستم بارهای جابجا شونده، استفاده کرد. ممکن است این بارها، بارهای گسترده، نقطه ای یا هر دو باشند. عموما به مقادیر بیشینه تابع، زمانی که بارها از تیر می گذرند احتیاج داریم.

بارهای متمرکز

بعد قایم خط تاثیر در یک نقطه، مقدار تابع را در یک مقطع خاص از تیر، ناشی از از یک بار واحد قرار گرفته در آن نقطه، به ما می‌دهد. بنابراین در تیر شکل ۲۰-۱الف نیروی برشی در K ناشی از بار واحد C برابر بعد قایم c_2f در شکل ۲۰-۱ د است. از آنجایی که ما فرض می‌کنیم که سیستم، خطی است متعاقبا باید نیروی برشی در K ناشی از بار W در C برابر

Wc_2f باشند. این استدلال را می‌توان برای هر تعداد از بارهای جابجا شونده که موقعیت‌هایشان نسبت به هم ثابت است گسترش داد. در شکل ۲۰-۵الف سه بار متمرکز W_1, W_2, W_3 از تیر AB عبور می‌کنند و در فاصله های ثابت c و d از هم هستند. فرض کنید که آنها به ترتیب به موقعیت‌های C,D,E رسیده اند. دوباره فرض کنید که ما به مقادیر نیروی برشی و ممان خمشی در مقطع K نیاز داریم، خطوط تاثیر S_K و M_K را می‌توان با استفاده از هر یک از دو روش توضیح داده شده در بخش های ۲۰-۱ و ۲۰-۲ به دست آورد. از آنجایی که سیستم خطی است ما می‌توانیم از اصل جمع آثار قوا برای تعیین اثرهای ترکیبی بارها استفاده کنیم.



شکل ۲۰-۵ تعدادی از بارهای جابجای شوند متمرکز

بنابراین برای بارها در موقعیت‌های نشان داده شده و با توجه به شکل ۲۰-۵ب:

$$S_K = W_1 s_1 + W_2 s_2 + W_3 s_3 \quad (۲۰-۹)$$

که در آن s_1, s_2, s_3 بعدهای قایم در زیر بارها، در خط تاثیر S_K هستند. به صورت مشابهی از شکل ۲۰-۵ج:

$$M_K = W_1 m_1 + W_2 m_2 + W_3 m_3 \quad (۲۰-۱۰)$$

که m_1,m_2,m_3 بعدهای قائم زیر بارها در خط تاثیر M_K هستند.

بیشینه نیروی برشی در K

از شکل ۲۰-۵ ب می‌توان مشاهده کرد که هنگامی که بارهای W_1,W_2,W_3 به سمت راست حرکت می‌کنند بعدهای قائم s_1,s_2,s_3 درمقدار خود به گونه‌ای افزایش می یابند که نیروی برشی در K به صورتی مثبت به یک مقدار قله W_1 در سمت چپ K افزایش می یابد. هنگامی که W_1 از سمت راست K عبور می کند بعد قایم s_1 منفی می‌شود بنابراین:

$$S_K = -W_1 s_1 + W_2 s_2 + W_3 s_3$$

و بزرگی S_K ناگهان سقوط می کند و کم می‌شود. هنگامی که بارها بیشتر به سمت راست حرکت می‌کنند بعد قایم s_1 که حالا منفی است در بزرگی خود کاهش می یابد در حالی که بعدهای قایم s_2,s_3 به صورت مثبت افزایش می یابند. بنابراین یک مقدار قله دوم برای S_K در W_2درست در سمت چپ K رخ می‌دهد. هنگامی که W_2در سمت راست K عبور می‌کند بعد قایم s_2 منفی می‌شود و:

$$S_K = -W_1 s_1 - W_2 s_2 + W_3 s_3$$

بنابراین دوباره یک سقوط ناگهانی در مقدار مثبت S_K وجود خواهد داشت. سومین مقدار قله در W_3 درست در سمت چپ K به دست می آید و سپس هنگامی که W_3 در سمت راست K عبور می کند مقدار S_K کاملا منفی می‌شود. استدلال مشابهی را برای مقادیر منفی S_K هنگامی که بارها از راست به چپ جابجا می‌شوند به کار می بریم. بنابراین می‌بینیم که بیشینه مثبت و منفی مقادیر نیروی برشی در مقطع یک تیر هنگامی رخ می‌دهد که یکی از بارها در آن مقطع است. در برخی موارد کاملا واضح است بار بیشترین مقدار را خواهد داد. در بقیه موارد روش سعی و خطا مورد استفاده قرار می گیرد.

بیشینه ممان خمشی در K

هنگامی که می‌خواهیم موقعیت یک مجموعه از نیروها را برای به دست آوردن ممان خمشی بیشینه در یک مقطع تیر تعیین کنیم وضعیت مشابهی رخ می‌دهد. هر چند همانطور که خواهیم دید راهکار روشمندتری نسبت به روش سعی و خطا را می‌توان در حالتی که موقعیت بار بحرانی مشخص نیست مورد استفاده قرار داد. با بارهای W_1,W_2,W_3 که مانند

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

شکل ۲۰–۵الف قرار داده شده اند ممان خمشی M_K در K توسط معادله ۲۰–۱۰ برابر است با:

$$M_K = W_1 m_1 + W_2 m_2 + W_3 m_3$$

هنگامی که بارها به سمت راست حرکت می‌کنند بعدهای قایم m_1,m_2,m_3 در بزرگی خود افزایش می یابند تا وقتی که W_1 از K عبور کند و m_1 شروع به کاهش کند. بنابراین M_K به یک مقدار قله، W_1 در K می رسد. حرکت بیشتر بارها به سمت راست باعث افزایش m_2,m_3 می‌شود در حالی که m_1 کاهش می یابد، بنابراین یک مقدار قله دوم در W_2 در K رخ می‌دهد، به صورت مشابهی مقدار قله سومی در W_3 در K به دست می آید. بنابراین بیشینه ممان خمشی در K با باری در K رخ می‌دهد. در برخی موارد این بار بحرانی آشکار است یا می‌توان آن را با استفاده از روش سعی خطا مانند بیشینه تنش برشی در K به دست آورد. از راه دیگری، بار بحرانی را می‌توان مانند روش زیر به دست آورد. فرض کنید که تیر شکل ۲۰–۵الف سیستمی از بارهای متمرکز $W_1,W_2,...,W_j,...,W_n$ را حمل می کند و این بارها در هر موقعیتی در تیر قرار دارند. بنابراین از معادله ۲۰–۱۰:

$$M_K = \sum_{j=1}^{n} W_j m_j \qquad (۲۰–۱۱)$$

حال فرض کنید که بارها دارای جابجایی کوچک δx هستند، بنابراین برای ممان خمشی در K به صورت زیر می‌شود:

$$M_K + \delta M_K$$

و هر بعد قایم m به صورت زیر می‌شود:

$$m + \delta m$$

بنابراین از معادله ۲۰–۱۱ داریم:

$$M_K + \delta M_K = \sum_{j=1}^{n} W_j \left(m_j + \delta m_j\right)$$

یا:

$$M_K + \delta M_K = \sum_{j=1}^{n} W_j m_j + \sum_{j=1}^{n} W_j \delta m_j$$

که از آنجا:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$\delta M_K = \sum_{j=1}^{n} W_j \delta m_j$$

بنابراین در حالت حدی هنگامی که δx به سمت صفر میل می کند:

$$\frac{dM_K}{dx} = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{dm_j}{dx}$$

که در آن dm_j/dx شیب خط تاثیر M_K است، بنابراین اگر:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{j,L}$$

برابر جمع بارهای سمت چپ K باشد و:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{j,R}$$

برابر جمع بارهای سمت راست K باشد ما از معادله‌های ۲۰–۵ و ۲۰–۶ داریم:

$$\frac{dM_K}{dx} = \sum_{j=1}^{n} W_{j,L}\left(\frac{L-a}{L}\right) + \sum_{j=1}^{n} W_{j,R}\left(-\frac{a}{L}\right)$$

برای یک مقدار بیشینه M_K، $dM_K/dx=0$ می‌شود، بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{n} W_{j,L}\left(\frac{L-a}{L}\right) = \sum_{j=1}^{n} W_{j,R}\frac{a}{L}$$

یا:

$$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,L} = \frac{1}{L-a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,R} \qquad (۱۲–۲۰)$$

از معادله ۲۰–۱۲ می‌بینیم که ممان خمشی در K هنگامی که یکی از بارها در K واقع می‌شود بیشینه است و هنگامی که بار به ازای طول واحد تیر در سمت چپ K برابر با بار به ازای طول واحد تیر در سمت راست K است، مقدار ممان خمشی در K بیشینه است. بخشی از بار در K را می‌توان به AK و بخشی را به KB اختصاص داد تا بدین ترتیب این شرایط را تامین کرد. معادله ۲۰–۱۲ را می‌توان به صورت زیر بسط داد، از آنجا که:

$$\sum_{j=1}^{n} W_j = \sum_{j=1}^{n} W_{j,L} + \sum_{j=1}^{n} W_{j,R}$$

سپس:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\sum_{j=1}^{n} W_{j,R} = \sum_{j=1}^{n} W_j - \sum_{j=1}^{n} W_{j,L}$$

با جایگذاری $\sum_{j=1}^{n} W_{j,R}$ در معادله ۲۰-۱۲ به دست خواهیم آورد:

$$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,L} = \left(\frac{1}{L-a}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} W_j - \sum_{j=1}^{n} W_{j,L}\right)$$

با مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\frac{L-a}{a} = \frac{\sum_{j=1}^{n} W_j - \sum_{j=1}^{n} W_{j,L}}{\sum_{j=1}^{n} W_{j,L}}$$

که از آنجا:

$$\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} W_j = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,L} \qquad (۲۰-۱۳)$$

با ترکیب معادله های ۲۰-۱۲ و ۲۰-۱۳ خواهیم داشت:

$$\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{n} W_j = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,L} = \frac{1}{L-a}\sum_{j=1}^{n} W_{j,R} \qquad (۲۰-۱٤)$$

بنابراین برای اینکه مقدار M_K یک بیشینه باشد باید باری در K قرار بگیرد به صورتی که بار به ازای طول واحد در کل دهانه برابر با بار به ازای طول واحد تیر در سمت راست K و بار به ازای طول واحد تیر در سمت راست K باشد.

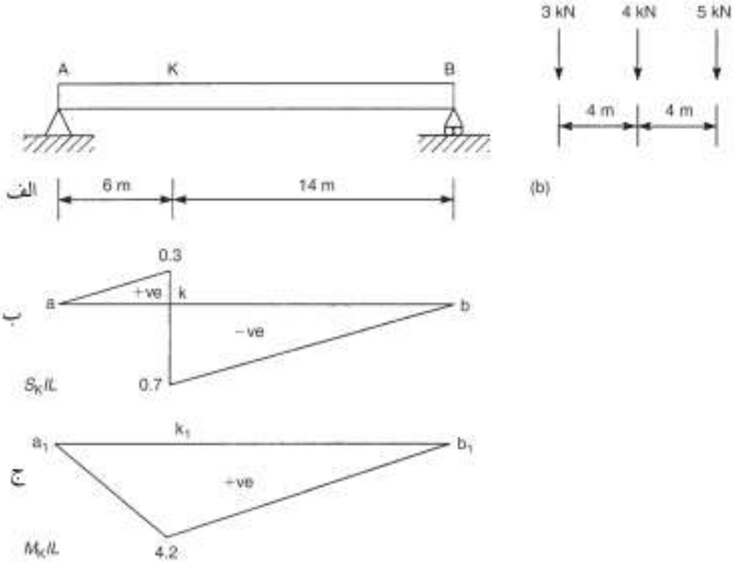
مثال ۲۰-۳) مقادیر بیشینه مثبت و منفی نیروی برشی و مقدار بیشینه ممان خمشی در مقطع K از تیر با اتکای ساده AB شکل ۲۰-٦الف را تعیین کنید هنگامی که سیستمی از بارها مانند شکل ۲۰-٦ ب از آن عبور می‌کنند.

خطوط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی در K با استفاده از یکی از روش های شرح داده شده در بخش‌ای ۲۰-۱ و ۲۰-۲ مانند آنچه در شکل ۲۰-٦ ج و د نشان داده شده است به دست می‌آیند.

بیشینه نیروی برشی مثبت در K

با بررسی روشن است که مقدار S_K مقداری بیشینه است که بار ۵ کیلونیوتن درست در سمت چپ K باشد که در این مورد بار ۳ کیلونیوتن درکنار تیر است و بعد قایم در زیر بار ٤ کیلونیوتن در خط تاثیر S_K از مثلث های متشابه برابر ۰٫۱ است، بنابراین:

$$S_K(\max) = 5\times 0.3 + 4\times 0.1 = 1.9kN$$



شکل۲۰-٦ تعیین بیشینه نیروی برشی و ممان خمشی در یک مقطع تیر

نیروی برشی منفی بیشینه در K

دو موقعیت بار ممکن وجود دارند که می‌توانند مقدار بیشینه منفی نیروی برشی را در K ایجاد کنند که نمی‌توان آنها را با بررسی حذف نمود. در ابتدا ما بار ۳ کیلونیوتن را درست در سمت راست K قرار می دهیم، بعدهای قائم زیر بارهای ٤ کیلو نیوتن و ۵ کیلو نیوتن از مثلث های متشابه محاسبه می‌شوند و به ترتیب برابر با ۰/۵- و ۰/۳- هستند، سپس:

$$S_K = 3\times(-0.7) + 4\times(-0.5) + 5\times(-0.3) = -5.6kN$$

حال با بار ٤ کیلو نیوتن درست در سمت راست K، بعدهای قائم زیر بار ۳ کیلو نیوتن و ۵ کیلو نیوتن به ترتیب برابر ۰/۱ و ۰/۵- هستند، بنابراین:

$$S_K = 3\times(0.1) + 4\times(-0.7) + 5\times(-0.5) = -5.0kN$$

بنابراین بیشینه مقدار منفی S_K برابر ۵/٦- کیلو نیوتن است و در هنگامی که بار ۳ کیلو نیوتن دقیقا در سمت راست K قرار دارد رخ می‌دهد.

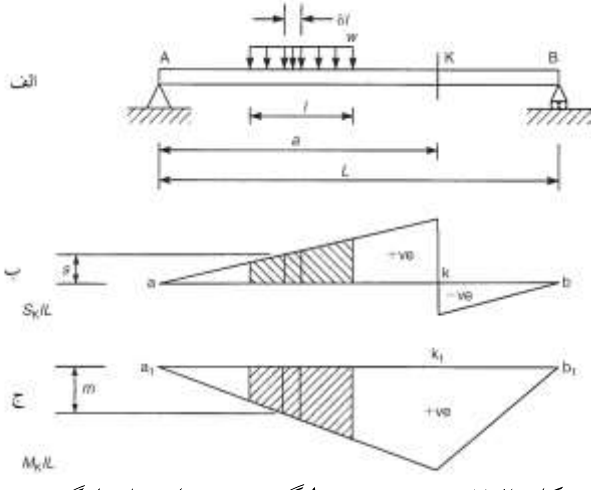
بیشینه ممان خمشی در K

ما بارها را طبق معیار معادله ۲۰–۱۴ قرار می دهیم، بار به ازای طول واحد تمام تیر برابر *(3+4+5)/20* یعنی ۰/۶ کیلو نیوتن بر متر است. بنابراین اگر ما بار ٤ کیلو نیوتن را در K قرار بدهیم و ۰/٦ کیلو نیوتن از بار را به AK اختصاص بدهیم بار به ازای طول واحد AK برابر است با *6/(3+0.6)* یعنی ۰/٦ کیلو نیوتن بر متر و بار به ازای طول واحد KB برابر است با *14/(3.4+5)* یعنی ۰/٦ کیلو نیوتن بر متر. بیشینه ممان خمشی در K بدین ترتیب با بار ٤ کیلو نیوتن در K رخ می‌دهد. در این مثال موقعیت بار بحرانی را می‌توان با بررسی استنتاج نمود، با موقعیت بارهای نسبی ای این چنین، بعدهای قائم زیر بار ۳ و ۵ کیلو نیوتن در خط تاثیر M_K به ترتیب برابر ۱/٤ و ۰/۳ هستند، بنابراین:

$$M_K(\max) = 3\times1.4 + 4\times4.2 + 5\times3 = 36.0kN.m$$

بارهای گسترده

شکل ۲۰–۷الف یک تیر با اتکای ساده AB را نشان می‌دهد که بار گسترده یکنواختی با شدت w در طول L تیر از سمت چپ به راست عبور می کند. فرض کنید که می‌خواهیم مقادیر نیروی برشی و ممان خمشی را در مقطع K تیر به دست بیاوریم.دوباره خطوط تاثیر S_K و M_K را با استفاده از یکی از روش های شرح داده شده در بخش های ۲۰–۱ و ۲۰–۲ به دست می آوریم.



شکل۲۰–۷ نیروی برشی و لنگر خمشی ناشی از بارگسترده

اگر ما طول المانی δl بار را بررسی کنیم، می‌توانیم آن را به عنوان یک بار متمرکز به بزرگی $w\delta l$ در نظر بگیریم. نیروی برشی δS_K در K ناشی از این طول المانی بار از شکل ٢٠-٧ب بدین ترتیب برابر خواهد بود با:

$$\delta S_K = w\delta l s$$

نیروی برشی نهایی S_K درK ناشی از طول کامل بار برابر است با:

$$S_K = \int_0^l ws.dl$$

یا از آنجایی که بار به صورت یکنواخت توزیع شده است:

$$S_K = w\int_0^l s.dl \qquad (٢٠-١٥)$$

از اینرو S_K مساوی w ضربدر مساحت تحت تصویر بار در خط تاثیر S_K است. به صورت مشابه:

$$M_K = w\int_0^l m.dl \qquad (٢٠-١٦)$$

از اینرو M_K مساوی w ضربدر مساحت تحت تصویر بار در خط تاثیر M_K است.

بیشینه نیروی برشی در K

از شکل ٢٠-٧ب روشن است که بیشینه نیروی برشی مثبت در K رخ می‌دهد و دارای سقف بار در K است در حالی که بیشینه نیروی برشی منفی در K رخ می‌دهد و دارای کف بار در K است. توجه داشته باشید که نیروی برشی در K هنگامی که بار به گونه‌ای قرار بگیرد که مساحت زیر بار در خط تاثیر S_K در قسمت مثبت و منفی با هم برابر شود، برابر صفر خواهد شد.

بیشینه ممان خمشی در K

اگر ما بار گسترده را به صورت تعداد نامحدودی از بارهای متمرکز در نظر بگیریم می‌توانیم از معیار معادله ٢٠-١٤ برای به دست آوردن بیشینه مقدار ممان خمشی در K استفاده کنیم، بنابراین بار به ازای طول واحد تمام تیر، برابر است با بار به ازای طول واحد سمت چپ K و بار به ازای طول واحد سمت راست K. بنابراین در شکل ٢٠-٨ ما بار را به صورتی قرار می دهیم که:

$$\frac{wck_1}{a_1k_1} = \frac{wdk_1}{k_1b_1}$$

یا:

$$\frac{ck_1}{a_1k_1}=\frac{dk_1}{k_1b_1} \quad (۱۷-۲۰)$$

از شکل ۲۰-۸:

$$\frac{fc}{hk_1}=\frac{a_1c}{a_1k_1}$$

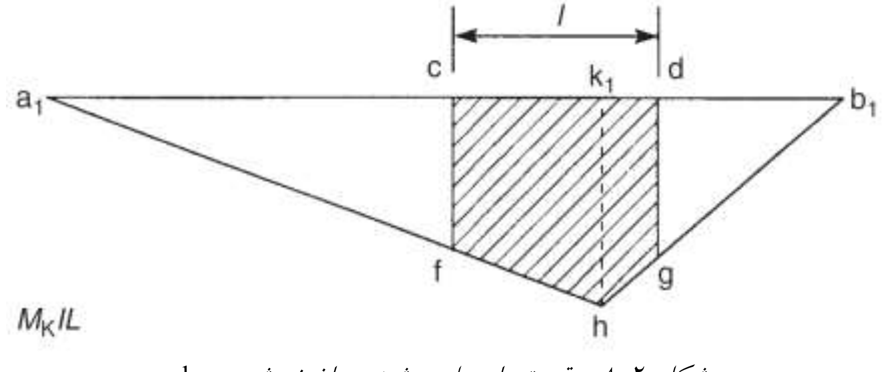
بنابراین:

$$fc=\frac{a_1c}{a_1k_1}hk_1=\left(\frac{a_1k_1}{a_1k_1}\right)hk_1=\left(\frac{a_1k_1-ck_1}{a_1k_1}\right)hk_1=\left(1-\frac{ck_1}{a_1k_1}\right)hk_1$$

به صورتی مشابه:

$$dg=\left(1-\frac{dk_1}{b_1k_1}\right)hk_1$$

بنابراین از معادله ۲۰-۱۷ می‌بینیم که $dg = fc$ خواهد بود و بعدهای قائم کران‌های بار در خط تاثیر M_K برابر هستند. همچنین می‌توان نشان داد که مساحت تحت بار در خط تاثیر M_K هنگامی که fc مساوی dg باشد بیشینه است. این روشی دیگر برای استنتاج موقعیت بار برای داشتن بیشینه ممان خمشی در K است. توجه داشته باشید که با توجه به معادله ۲۰-۱۷، K، بار را با نسبتی یکسان، همانطور که دهانه را تقسیم می کند، تقسیم می کند.

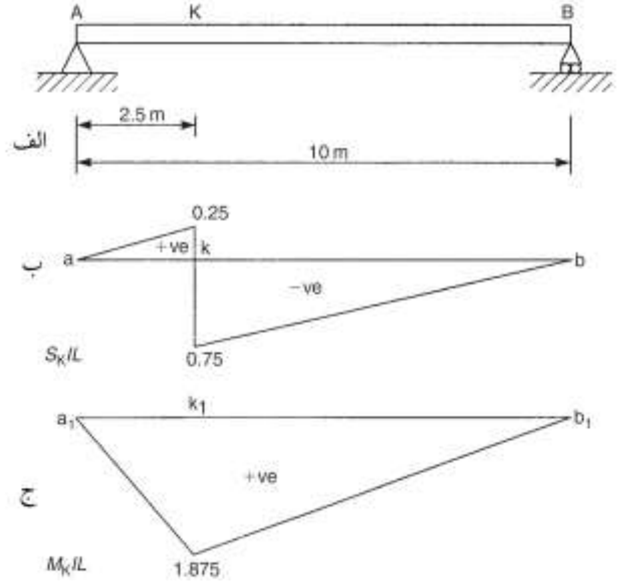


شکل۲۰-۸ موقعیت بار برای بیشینه ممان خمشی در k

مثال ۲۰-٤) باری با طول ۲ متر و شدت ۲ کیلو نیوتن در متر از تیر با اتکای ساده AB شکل ۲۰-۹الف عبور می کند، مقادیر بیشینه مثبت و منفی نیروی برشی و مقدار بیشینه ممان خمشی در یک چهارم دهانه را محاسبه کنید.

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

خطوط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی در یک چهارم دهانه و در نقطه K به روش مشابه قبل مانند شکل ۲۰-۹ ب و ج به دست می آیند.



شکل ۲۰-۹ بیشینه نیروی برشی و ممان خمشی در یک چهارم دهانه

نیروی برشی بیشینه در K

نیروی برشی بیشینه مثبت در K با سقف بار در K رخ می‌دهد. در این موقعیت بعد قایم تحت کف بار برابر ۰,۰۵ است، از اینرو:

$$S_K(\max + ve) = 2 \times \frac{1}{2}(0.05 + 0.25) \times 2 = 0.6kN$$

بیشینه نیروی برشی منفی در K با کف بار در K رخ می‌دهد، با وضعیت بار در این موقعیت بعد قایم تحت سقف بار برابر۰/۵۵ است، بنابراین:

$$S_K(\max - ve) = -2 \times \frac{1}{2}(0.75 + 0.55) \times 2 = -2.6kN$$

بیشینه ممان خمشی در K

بار را به گونه‌ای قرار می دهیم که K بار را با همان نسبتی که دهانه را تقسیم می کند، تقسیم کند. بنابراین ۰,۵ متر در سمت چپ K است و ۱/۵ متر از آن در سمت راست K. بعد قایم زیر کف بار در خط تاثیر M_K برابر است با ۱/۵. مانند بعد قایم تحت سقف بار. بیشینه مقدار M_K بدین ترتیب برابر است با:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

$$M_K(\max) = 2\left[\frac{1}{2}(1.5+1.875)\times 0.5 + \frac{1}{2}(1.875+1.5)\times 1.5\right]$$

که می‌دهد:

$$M_K(\max) = 6.75 kN.m$$

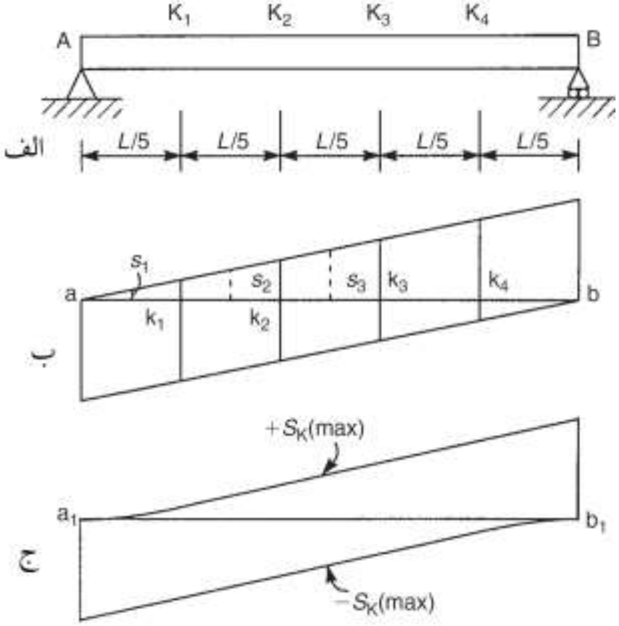
دیاگرام بیشینه نیروی برشی

تیر با اتکای ساده شکل ۲۰-۱۰الف را در نظر بگیرید و فرض کنید که یک بار گسترده یکنواخت با شدت w و طول $L/5$ (هر کسری از L را می‌توان انتخاب کرد) از تیر عبور می کند. ما می‌توانیم مجموعه ای از خطوط تاثیر را بر روی مقاطع A,K_1,K_2,K_3,K_4,B مانند شکل ۲۰-۱۰ ب رسم کنیم و سپس مقادیر بیشینه مثبت و منفی نیروی برشی در هر یک از مقاطع K_1,K_2 و غیره را با بررسی سقف بار در K_1,K_2 و غیره در ابتدا، و سپس کف بار در A,K_1,K_2 و غیره، به دست بیاوریم. این مقادیر را سپس مانند شکل ۲۰-۱۰ ج رسم می نماییم. با سقف بار در K_1,K_2,K_3,K_4,B بیشینه نیروی برشی مثبت با مقادیر زیر داده می‌شوند:

$w(ak_1)s_1$ و $w(k_1k_2)s_2$

که در آن s_1,s_2 و غیره میانه بعدهای قایم مساحت های ak_1,k_1k_2 و غیره هستند، از آنجایی که s_1,s_2و... به صورت خطی افزایش می یابند بیشینه نیروی برشی مثبت نیز در تمام مقاطع بین K_1 و B به صورت خطی افزایش می یابد، در مقطعی بین A و K_1 تمام طول بار بر روی تیر نخواهد بود بنابراین بیشینه مقدار مثبت نیروی برشی در این مقطع بر روی خط راست نخواهد بود و دیاگرام بیشینه نیروی برشی مثبت بین A و K_1منحنی خواهد بود.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



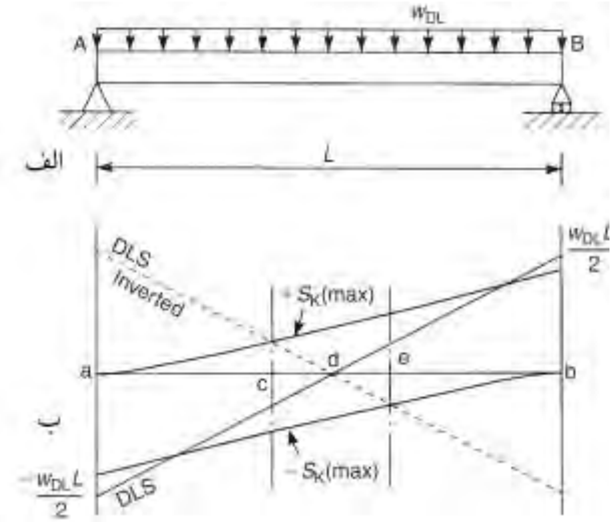
شکل۲۰-۱۰ دیاگرام بیشینه نیروی برشی

بیشینه نیروی برشی مثبت را حداقل باید برای مقطع بین A و K_1 محاسبه کرد ؛ استدلال مشابهی برای محاسبه بیشینه نیروی برشی منفی به کار می رود که در کف بار در مقطع تیر رخ می‌دهد. بنابراین در این مورد خطی نبودن هنگامی رخ می‌دهد که بار بین K_4 و B شروع به حرکت می کند.

وارونگی نیروی برشی

در برخی سازه‌ها مفید است تا بدانیم در کدام بخش های سازه (هر کدام) علامت بیشینه نیروی برشی تغییر می کند. در بخش ٤-٥ به عنوان مثال می‌بینیم که قطرهای یک خرپا در برابر نیروهای برشی مقاومت می‌کنند و می‌توانند در کشش یا فشار، بسته به جهت و علامت نیروی برشی قرار داشته باشند. بنابراین اگر بدانیم که علامت نیروی برشی تحت بارهای طراحی در یک قسمت خاص از خرپا یکسان باقی خواهد ماند می‌توانیم تمایل، مورب بودن و شیب قطرها را به گونه‌ای مرتب کنیم که همواره در کشش باشند و در معرض ناپایداری ناشی از نیروهای فشاری قرار نگیرند. اگر همزمان بدانیم که در کدام قسمت های خرپا علامت نیروی برشی تغییر می کند می‌توانیم از مهاربندی متقابل استفاده

کنیم.(بخش ۲۰-۵ را ببینید) تیر AB با اتکای ساده ۲۰-۱۱الف را در نظر بگیرید و فرض کنید که بار مرده گسترده یکنواخت دارای شدت w_{DL} را حمل می کند (وزن خود سازه و غیره) نیروی برشی ناشی از این بار مرده (برش بار مرده DLS) به صورت خطی از مقدار $-w_{DL}L/2$ در A تا $+w_{DL}L/2$ در B مانند شکل ۲۰-۱۱ ب تغییر می کند. حال فرض کنید که بار زنده گسترده یکنواخت با طولی کمتر از دهانه AB از تیر عبور می کند، مانند تیر شکل ۲۰-۱۰ می‌توانیم دیاگرام های نیروی برشی مثبت و منفی ناشی از بار زنده را رسم کنیم. این موارد در شکل ۲۰-۱۱ ب نشان داده شده است. در هر مقطع تیر بیشینه نیروی برشی برابر با جمع بیشینه نیروی برشی ناشی از بار زنده و نیروی DLS است یا برابر جمع نیروی برشی بیشینه منفی ناشی از بار زنده و نیروی DLS است. تفاوت در بیشینه نیروی برشی در طول تیر آسانتر فهمیده خواهد شد اگر ما دیاگرام نیروی DLS را وارونه کنیم.

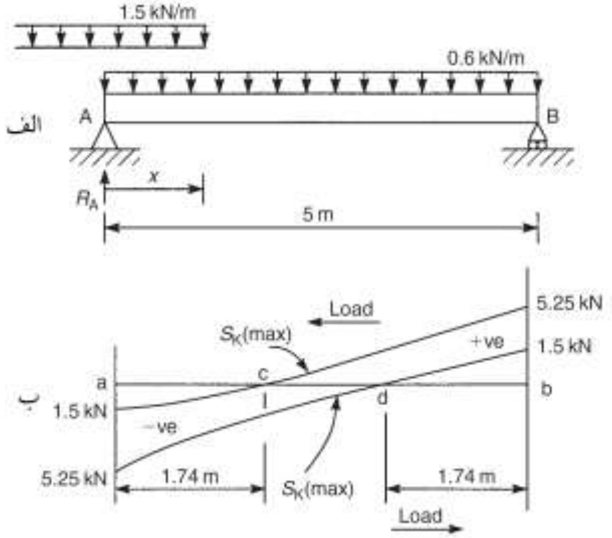


شکل۲۰-۱۱ وارونگی نیروی برشی در یک تیر

با ارجاع به شکل ۲۰-۱۱ ب می‌بینیم که جمع نیروی برشی منفی بیشینه ناشی از بار زنده و نیروی DLS بین A و C همواره منفی است. به صورت مشابهی بین E و B بیشینه نیروی برشی همواره مثبت است. هر چند بین C و E جمع بیشینه نیروی برشی منفی ناشی از بار زنده و نیروی DLS منفی است در حالی که جمع بیشینه نیروی برشی مثبت ناشی از بار

زنده و نیروی DLS مثبت است. بنابراین بیشینه نیروی برشی بین E و C ممکن است منفی یا مثبت باشند یعنی در این طول تیر امکان یک وارونگی نیروی برشی بیشینه وجود دارد.

مثال ۲۰-۵) یک تیر با اتکای ساده AB دارای دهانه ۵ متر است و یک بار مرده گسترده یکنواخت ۰٫۶ کیلو نیوتن بر متر را حمل می کند. شکل ۲۰-۱۲الف، بار زنده مشابه گسترده دیگری با طولی بزرگتر از ۵ متر و شدت ۱٫۵ کیلو نیوتن بر متر در طول تیر حرکت می کند. طولی از تیر که وارونگی نیروی برشی در آن رخ می‌دهد را محاسبه کنید و دیاگرام بیشینه نیروی برشی را برای تیر نشان دهید.



شکل ۲۰-۱۲ وارونگی نیرو برشی در تیر مثال ۲۰-۵

نیروی برشی در مقطع تیر هنگامی بیشینه خواهد بود که کف و سقف بار در مقطع واقع شود، در ابتدا پیش از نوشتن عبارتی برای نیروی برشی ما به عکس العمل تکیه‌گاهی R_A در A نیاز داریم. بنابراین با سقف بار در مقطعی با فاصله x از A عکس العمل R_A با ممان گرفتن حول B به دست می‌آید. بنابراین :

$$R_A \times 5 - 0.6 \times 5 \times 2.5 - 1.5x\left(5 - \frac{x}{2}\right) = 0$$

که:

$$R_A = 1.5 + 1.5x - 0.15x^2 \qquad (1)$$

بدین ترتیب بیشینه نیروی برشی:

$$S(\max) = -R_A + 0.6x + 1.5x \qquad (۲)$$

یا با جایگذاری R_A در معادله (۲) از معادله (۱) خواهیم داشت:

$$S(\max) = -1.5 + 0.6 + 1.5x^2 \qquad (۳)$$

معادله (۳) بیشینه نیروی برشی در هر مقطع تیر را با بار حرکت کننده از چپ به راست می‌دهد. بنابراین هنگامی که $x = 0$، $S(\max) = -1.5kN$ و هنگامی که $x = 5$، $S(\max) = +5.25kN$ می‌باشد

علاوه بر این از معادله (۳) وقتی $x = 1.74m$، $S(\max) = 0$ می‌باشد. بیشینه نیروی برشی برای بار جابجا شونده از راست به چپ به روش مشابهی به دست می‌آید. دیاگرام بیشینه نیروی برشی نهایی در شکل ۲۰-۱۲ ب نشان داده شده است که می‌توانیم بگوییم وارونگی نیروی برشی ممکن است از طول CD از تیر رخ بدهد. CD را گاهی اوقات، طول کانونی می نامند.

تعیین نقطه بیشینه ممان خمشی در یک تیر

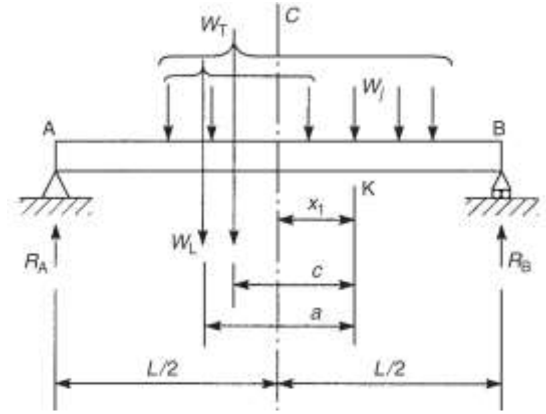
پیش از این برای ما تعیین موقعیت مجموعه‌ای از بارها بر روی تیر که می‌توانستند بیشینه ممان خمشی را در یک مقطع معین از تیر تولید کنند مورد نظر بود. حال ما مقطع و موقعیت بارهایی را که ممان خمشی کاملا در آنها بیشینه خواهد بود تعیین می‌کنیم. مقطع K با فاصله x_1 از میانه دهانه تیر را در شکل ۲۰-۱۳ در نظر بگیرید و مجموعه ای از بارها با بزرگی نهایی W_T که از تیر می گذرند را فرض کنید. ممان خمشی در K هنگامی که یکی از بارها در K است بیشینه است. فرض کنیم که این بار W_j است، همینطور فرض کنیم که مرکز گرانش مجموعه کامل بارها در فاصله c از بار W_j است و وزن نهایی تمام بارهای سمت چپ W_j برابر W_L است که در فاصله a از W_j اثر می کند. a و c مقادیری ثابت برای یک مجموعه معین از بارها هستند. در ابتدا با ممان گرفتن حول B مقدار R_A را به دست می آوریم:

$$R_A L - W_T\left(\frac{L}{2} - x_1 + c\right) = 0$$

که می‌دهد:

$$R_A = \frac{W_T}{L}\left(\frac{L}{2} - x_1 + c\right)$$

Web: www.M-Alirezaei.com　　استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۲۰-۱۳ تعیین ممان خمشی بیشینه مطلق در یک تیر

ممان خمشی M_K در K بدین ترتیب برابر است با:

$$M_K = R_A\left(\frac{L}{2}+x_1\right)-W_L a$$

یا با جایگذاری R_A:

$$M_K = \frac{W_T}{L}\left(\frac{L}{2}-x_1+c\right)\left(\frac{L}{2}+x_1\right)-W_L a$$

با دیفرانسیل گرفتن M_K نسبت به x_1 داریم:

$$\frac{dM_K}{dx_1} = \frac{W_T}{L}\left(-1\left(\frac{L}{2}+x_1\right)+1\left(\frac{L}{2}-x_1+c\right)\right)$$

یا:

$$\frac{dM_K}{dx_1} = \frac{W_T}{L}\left(-2x_1+c\right)$$

برای بیشینه مقدار M_K، $dM_K/dx1=0$ بنابراین:

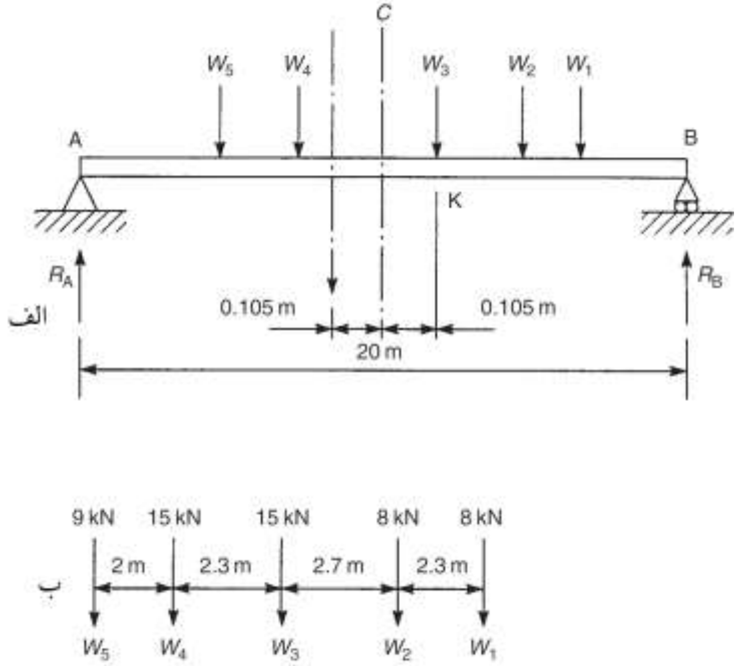
$$x_1 = \frac{c}{2} \qquad (۱۸-۲۰)$$

بنابراین بیشینه ممان خمشی در مقطع K تحت بار W_j رخ می‌دهد به گونه‌ای که مقطع K در مرکز گرانش مجموعه کامل بارها در فواصل مساوی از میان دهانه تیر قرار دارند. برای اعمال این قاعده ما یکی از بارهای بزرگ مرکزی را انتخاب می‌کنیم و آن را بر روی مقطع K به گونه‌ای قرار می دهیم که K و مرکز گرانش مجموعه بارها در فواصل مساوی از میان دهانه تیر قرار بگیرند. پس از آن کنترل می‌کنیم که بار به ازای طول واحد سمت چپ K

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

برابر بار به ازای طول واحد سمت راست K باشد. اگر این شرایط صدق نکند بار دیگر و مقطع دیگر K باید انتخاب شوند.

مثال ۲۰-۶) مجموعه بارهای شکل ۲۰-۱۴ ب از تیر با اتکای ساده AB شکل ۲۰-۱۴الف عبور می کند. موقعیت و بزرگی بیشینه ممان خمشی تیر را محاسبه کنید.



شکل ۲۰-۱۴ تعیین ممان خمشی بیشینه مطلق تیر مثال ۲۰-۶

در گام اول موقعیت مرکز گرانش مرکز بارها را محاسبه می‌کنیم، بنابراین با ممان گرفتن حول بار W_5 داریم:

$$(9+15+15+8+8)\bar{x} = 15\times 2+15\times 4.3+8\times 7.0+8\times 9.3 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 4.09m$$

بنابراین مرکز گرانش بارها ۰/۲۱ متر در سمت چپ بار W_3 قرار دارد. با بررسی شکل ۲۰-۱۴ب می‌بینیم که ممکن است بیشینه ممان خمشی تحت بار W_3 رخ دهد، بنابراین ما بار W_3 و مرکز گرانش مجموعه بارها را در فواصل مساوی از میان دهانه تیر مانند شکل ۲۰-۱۴الف قرار می دهیم. حال کنترل می‌کنیم که آیا این موقعیت بارها شرایط بار به ازای طول واحد را تامین می کند یا خیر. بار به ازای طول واحد AB برابر است با:

$$AB = \frac{55}{20} = 2.75 \frac{kN}{m}$$

بنابراین بار نهایی مورد نیاز در AK برابر است با:

$$AK = 2.75 \times 10.105 = 27.79 kN$$

این بار توسط W_5, W_4 و بخشی از W_3 (٣/٧٩ کیلو نیوتن) تامین می‌شود. با پیدا کردن موقعیت بار، ممان خمشی در K به وسیله محاسبه مستقیم به راحتی یافته می‌شود. بنابراین با ممان گرفتن حول B داریم:

$$R_A \times 20 - 55 \times 10.105 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 27.8 kN$$

بنابراین:

$$M_K = 27.8 \times 10.105 - 9 \times 4.3 - 15 \times 2.3 = 207.7 kN.m$$

ممکن است که در برخی از سیستم‌های بار بیش از یک موقعیت بار وجود داشته باشد که معیار بیشینه ممان خمشی را تامین می کند اما ممان های خمشی مربوط دارای مقادیر مختلفی باشند. عموما ممان خمشی بیشینه مطلق تحت یکی از بارها که نزدیکتر به مرکز گرانش سیستم است رخ می‌دهد. اگر مقدار بزرگتر این دو بار نزدیکتر به مرکز گرانش باشد، این بار، بار بحرانی است. در غیر این صورت هر دو مورد را باید تحلیل کرد.

٢٠-٤ خط تاثیر برای تیرهایی که در تماس با بار نیستند

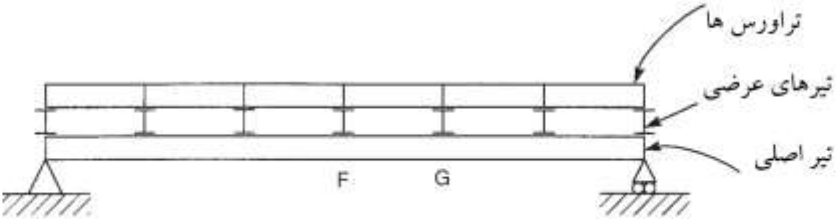
در بسیاری از شرایط عملی مانند ساخت پل، بارهای حرکت کننده در تماس مستقیم با تیر اصلی یا شاه تیر نیستند. شکل ٢٠-١٥ یک سازه پل معمولی را نشان می‌دهد که عرشه آن توسط تراورس های سوار شده بر تیرهای عرضی حمایت می‌شود و کل مجموعه توسط تیرهای اصلی یا شاه تیرها حمل می‌شود. بارهای عرشه بدین ترتیب توسط تراورس ها و تیرهای عرضی به تیرهای اصلی منتقل می‌شوند. عموما در تحلیل ما در نظر می گیریم که قطعات تراورس ها بر روی هر یک از تیرهای عرضی دارای اتکای ساده اند. در شکل ٢٠-١٥ بخشی از تیرهای اصلی بین تیرهای عرضی به عنوان مثال FG یک پنل نامیده می‌شود و نقاط F و G نقاط پنل نامیده می‌شوند. شکل ٢٠-١٦ یک تیر اصلی با اتکای ساده AB را نشان می‌دهد که عرشه یک پل را توسط چینشی از تیرهای عرضی و تراورس ها حمایت می کند، فرض کنیم که می‌خواهیم خط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی را برای مقطع K

تیر اصلی در پنل CD به دست آوریم. مانند قبل عبور یک بار واحد که در این مورد از عرشه پل عبور می کند را مورد بررسی قرار می دهیم.

خط تاثیر S_K

با بار واحد در بیرون و سمت چپ پنل CD (موقعیت ۱) نیروی برشی S_K در K برابر است با:

$$S_K = R_B = \frac{x_1}{L} \qquad (۲۰-۱۹)$$



شکل۲۰-۱۵ پل معمولی

بنابراین هنگامی که بار از A به C می رود S_K به صورت خطی تغییر می کند. بنابراین از معادله ۲۰-۱۹ هنگامی که $x_1=0$ ،$S_K=0$ و هنگامی که $x_1=a$ ،$S_K=a/L$. بعد قایم cf در خط تاثیر S_K در شکل ۲۰-۱٦ ب نشان داده شده است. علاوه بر این از شکل ۲۰-۱٦الف می‌بینیم که $S_K=S_C=S_D$ با بار بین A و C. بنابراین برای یک موقعیت معلوم بار، نیروی برشی در پنل CD، دارای مقدار یکسان در تمام مقاطع است. فرض کنید که بار واحد در سمت راست D بین B و D است (موقعیت ۲) بنابراین:

$$S_K = -R_A = -\frac{L-x_2}{L} \qquad (۲۰-۲۰)$$

و خطی است. بنابراین هنگامی که $x_2 = L$ باشد، $S_K = 0$ می‌باشد و هنگامی که $x_2 = e$ باشد، $S_K = -(L-e)/L$ می‌باشد.

بعد قایم dh در خط تاثیر S_K.

همینطور با بار واحد بین D و B داریم:

$$S_K = S_C = S_D(= -R_A)$$

بنابراین برای موقعیت معین بار، نیروی برشی در پنل CD دارای مقدار یکسان در تمام مقاطع است.

حال بار واحد را در نقطه ای بین C و D بررسی می‌کنیم (موقعیت ۳). در این حالت نیروهای عکس العمل R_C و R_D مانند شکل ۲۰-۱۶الف بر روی تراورس و تیر اثر می‌کنند که با بررسی بخشی از تراورس که دقیقا در بالای پنل CD قرار دارد متوجه می شویم که این بخش، یک تیر با اتکای ساده است. می‌بینیم که:

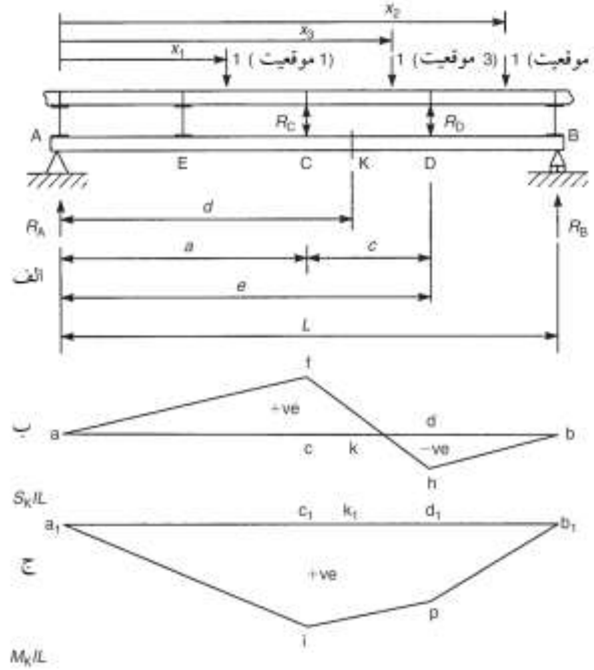
$$R_C = (e - x_3)/c \quad \text{و} \quad R_D = (x_3 - a)/c$$

بنابراین نیروی برشی در K برابر است با:

$$S_K = R_B - R_D \quad \text{یا} \quad S_K = -R_A + R_C$$

بنابراین:

$$S_K = \frac{x_3}{L} - \frac{(x_3 - a)}{c} \qquad (۲۰-۲۱)$$



شکل۲۰-۱۶ خطوط تاثیر برای یک تیر که در تماس مستقیم با بارهای متحرک نیست

بنابراین S_K هنگامی که بار بین C و D حرکت می کند به صورت خطی تغییر می‌کند، علاوه بر این هنگامی که $x_3 = a$، $S_K = a/L$ و برابر با بعد قایم cf در خط تاثیر S_K. و هنگامی

که $x_3 = e$، $S_K = -(L-e)/L$، و برابر با بعد قایم dh در خط تاثیر S_K. توجه داشته باشید که در محاسبه مقدار آخر:

$$e - a = c$$

همچنین توجه داشته باشید که برای تمام موقعیت‌های بین C و D:

$$S_K = R_B + R_D$$

که مستقل از موقعیت K است. بنابراین برای موقعیت بار معین بین C و D، نیروی برشی در تمام مقاطع پل یکسان است.

خط تاثیر M_K: با موقعیت بار واحد در موقعیت ۱ بین A و C ممان خمشی M_K در K برابر است با:

$$M_K = R_B(L-d) = \frac{x_1}{L}(L-d) \tag{۲۰-۲۲}$$

بنابراین M_K با موقعیت بار بین A و C به صورت خطی تغییر می کند. وقتی $x_1 = 0$، $M_K = 0$ و $x_1 = a$، $M_K = a(L-d)/L$ می‌باشد. با بار واحد در موقعیت ۲ بین D و B:

$$M_K = R_A d = \frac{L - x_2}{L} d \tag{۲۰-۲۳}$$

دوباره با موقعیت بار در این حالت M_K به صورت خطی تغییر می کند بنابراین هنگامی که $x_2 = e$، $M_K = (L-e)d/L$ برابر با بعد قایم $d_I p$ در خط تاثیر M_K. هنگامی که $x_2 = L$، $M_K = 0$ هنگامی که بار واحد بین C و D است (موقعیت ۳):

$$M_K = R_B(L-d) - R_D(e-d)$$

مانند قبل ما بخشی از تراورس را که بر بالای پنل CD قرار دارد را به عنوان تیر با اتکای ساده در نظر می گیریم، بنابراین:

$$R_D = (x_3 - a)/c$$

سپس از آنجایی که:

$$R_B = x_3 / L$$

و

$$M_K = \frac{x_3}{L}(L-d) - \left(\frac{x_3 - a}{c}\right)(e-d) \tag{۲۰-۲٤}$$

معادله ۲۰-۲٤ نشان می‌دهد که M_K با توجه به موقعیت این بار بین C و D به صورت خطی تغییر می کند بنابراین هنگامی که $x_3 = a$، $M_K = a(L-d)/L$ برابر بعد قایم c_1i در خط تاثیر M_K است. هنگامی که $x_3 = e$، $M_K = d(L-e)/L$ برابر بعد قایم d_1p در خط تاثیر M_K است. توجه داشته باشید که در محاسبه آخر $e-a=c$ می‌باشد.

بیشینه مقادیر S_K و M_K:

در تعیین بیشینه مقادیر نیروی برشی و ممان خمشی در یک مقطع از تیر که در تماس مستقیم با بار نیست برخی نقاط نیاز به توجه بیشتری دارند.

۱- هنگامی که مقطع K با نقطه ای از پنل تقاطع دارد (C یا D یا...) خطوط تاثیر S_K و M_K با خطوط تاثیر تیری که در تماس مستقیم با بار جابجا شونده است از نظر هندسه برابرند. روابط یکسانی بر بیشینه و کمینه مقادیر حاکم است.

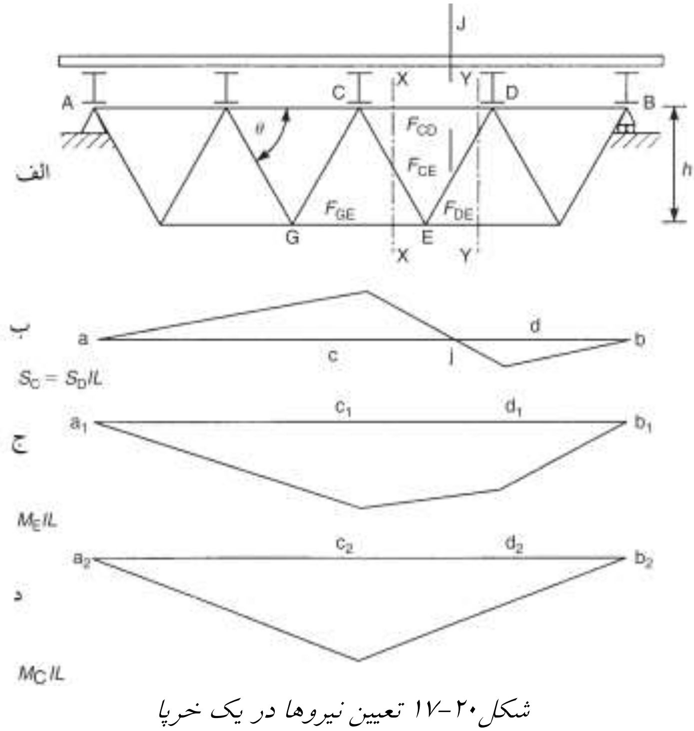
۲- مقدار بیشینه مطلق نیروی برشی در یک پنل انتهایی رخ می‌دهد، AE یا DB، که خط تاثیر S_K از نظر شکل، با خط تاثیر ممان خمشی برای مقطعی که برای یک تیر با اتکای ساده در تماس مستقیم با بار جابجا شونده است، یکسان است. بدین ترتیب معیار یکسانی را برای مکان دهی بار مورد استفاده برای تعیین بیشینه نیروی برشی می‌توان به کار برد. یعنی بار به ازای طول واحد تیر برابر با بار به ازای طول واحد سمت چپ E یا D و بار به ازای طول واحد سمت راست E یا D است.

۳- برای به دست آوردن بیشینه مقادیر نیروی برشی و ممان خمشی در یک پنل، روش سعی و خطا ساده ترین راهکار است. البته باید به یاد داشته باشیم برای بارهای متمرکز بار، باید در جایی قرار داده شود که شیب خط تاثیر تغییر می کند.

۲۰-۵ نیروها در اعضای یک خرپا

در برخی نمونه ها تیرهای اصلی در یک پل، خرپا هستند، در این موارد تیرهای عرضی بر گره های خرپا وارد می‌شوند. خطوط تاثیر نیروی برشی و ممان خمشی برای یک پنل خرپا را می‌توان برای تعیین تغییرات نیروهای عضو خرپا هنگامی که بارهای جابجا شونده از پل عبور می‌کنند مورد استفاده قرار داد.

خرپای با اتکای ساده (وارن) که در شکل ۲۰-۱۷الف نشان داده شده است را در نظر بگیرید که خرپا تیرهای عرضی را در گره های یال بالایی اش که برای حمایت از عرشه پل است، حمل می کند. علاوه بر این خرپا را می‌توان وارونه کرد و تیرهای عرضی را با گره های یال پایینی حمل کرد. همینطور فرض کنید که ما می‌خواهیم نیروها را در اعضای CD، CE، DE و GE از خرپا محاسبه کنیم. در بخش ٤,٥ ساز و کاری را که یک خرپا در برابر نیروهای برشی و ممان های خمشی مقاومت می کند را دیدیم. بنابراین نیروهای برشی توسط اعضای قطری حمل می‌شوند در حالی که ممان های خمشی به صورت عمده توسط ترکیبی از اعضای قطری و افقی حمل می‌شوند. بنابراین با توجه به شکل ۲۰-۱۷الف می‌بینیم که نیروها در اعضای CE و DE را می‌توان با نیروی برشی در پنل CD به دست آورد. در حالی که نیروهای اعضای CD و GE را می‌توان توسط ممان های خمشی در E و C به ترتیب به دست آورد. بنابراین ما خطوط تاثیر نیروی برشی پنل CD و ممان خمشی در E و C را مانند شکل ۲۰-۱۷ ب، ج، د به دست می آوریم.



شکل۲۰-۱۷ تعیین نیروها در یک خرپا

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

در بخش ۲۰-٤ دیدیم که برای موقعیت بار معین نیروی برشی در پنلی مانند CD در تمام مقاطع پنل ثابت است، ما این نیروی برشی را S_{CD} می نامیم. بنابراین با بررسی مقطع XX در CE,CD و GE داریم:

$$F_{CE}\sin\theta = S_{CD}$$

بنابراین:

$$F_{CE} = \frac{S_{CD}}{\sin\theta} \qquad (۲۰-۲۵)$$

به صورتی مشابه:

$$F_{DE} = \frac{S_{CD}}{\sin\theta} \qquad (۲۰-۲٦)$$

از شکل ۲۰-۱۷ب می‌بینیم که برای موقعیت بار بین A و J، S_{CD} مثبت است. بنابراین با ارجاع به شکل ۲۰-۱۷الف، F_{CE} فشاری است. در حالیکه F_{DE} کششی است. برای موقعیت بار بین J و B، S_{CD} منفی است. بنابراین F_{CE} کششی است و F_{DE} فشاری است. بدین ترتیب F_{DE} و F_{CE} همواره دارای علامت های مخالف هم خواهند بود، این امر را از بررسی تعادل عمودی در گره E نیز می‌توان استنتاج نمود. حال اگر تعادل ممان خرپا در یک برش عمودی از گره E را بررسی کنیم، خواهیم داشت:

$$F_{CD}h = M_E$$

یا:

$$F_{CD} = \frac{M_E}{h} \qquad (۲۰-۲۷)$$

از آنجایی که M_E برای تمام موقعیت‌های بار مثبت است (شکل ۲۰-۱۷ج)، F_{CD} فشاری است. نیرو در عضو GE از خط تاثیر M_C در شکل ۲۰-۱۷د به دست می‌آید.
بنابراین:

$$F_{GE}h = M$$

که می‌دهد:

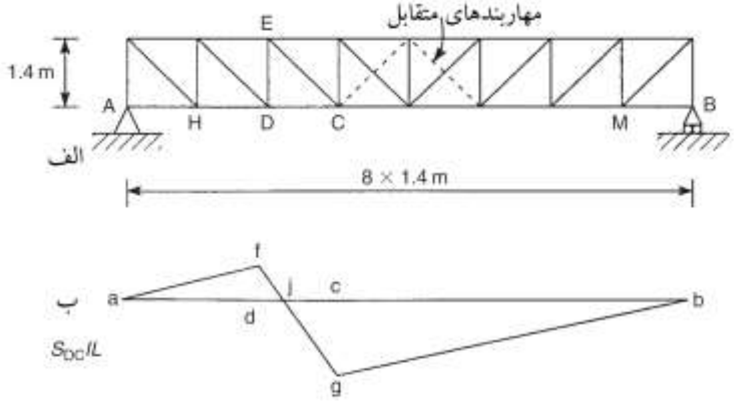
$$F_{GE} = \frac{M_C}{h} \qquad (۲۰-۲۸)$$

از آنجایی که M_C برای تمام موقعیت‌های بار مثبت است، F_{GE} کششی است. از معادله‌های ۲۰-۲۵ و ۲۰-۲۸ روشن است که می‌توان خطوط تاثیر نیروهای اعضا را با استفاده از

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

خطوط تاثیر مناسب مربوط به نیروی برشی و ممان خمشی به دست آورد. به عنوان مثال خط تاثیر F_{CE} دارای شکل خط تاثیر نیروی برشی در شکل ۲۰–۱۷ب خواهد بود، اما دارای بعدهای قائمی است که علامت آنها عوض شده است و در مقدار $1/\sin\theta$ ضرب شده‌اند. خط تاثیر F_{DE} نیز دارای شکل خط تاثیر S_{CD} است و دارای بعدهای قائمی است که در مقدار $1/\sin\theta$ ضرب شده اند:

مثال ۲۰–۷) نیروهای بیشینه فشاری و کششی در عضو EC از خرپای (پرات) شکل ۲۰–۱۸الف را تعیین کنید در حالتی که بار گسترده یکنواختی با شدت ۲٫۵ کیلو نیوتن بر متر و طول ٤ متر از آن عبور می‌کنند. بار بر روی یال پایینی خرپا وارد می‌شود.



شکل۲۰–۱۸ تعیین نیرو در یک عضو از شاه تیر پرات

مولفه عمودی نیرو در عضو EC در برابر نیروی برشی در پنل DC مقاومت می کند. بدین ترتیب ما خط تاثیر نیروی برشی را برای پنل BC مانند شکل ۲۰–۱۸ب به دست خواهیم آورد. از معادله ۲۰–۱۹ بعد قایم:

$$df = 2\times1.4/(8\times1.4) = 0.25$$

در حالی که از معادله ۲۰–۲۰ بعد قایم:

$$cg = (8\times1.4 - 3\times1.4)/(8\times1.4) = 0.625$$

علاوه بر این می‌بینیم که S_{DC} علامتش در J تغییر می کند. (شکل ۲۰–۱۸ ب) که مقدار jd از مثلث های متشابه برابر ۰/٤ است. هنگامی که نیروی برشی در پنل DC مثبت است عضو EC در فشار خواهد بود و بیشینه مقدار آن هنگامی رخ خواهد داد که سقف بار بر روی j قرار دارد که به موجب آن تمام طول aj در خط تاثیر S_{DC} را پوشش می‌دهد. بدین ترتیب:

$$F_{EC}\sin 45^{\circ}=S_{DC}=2.5\times\frac{1}{2}\times3.2\times0.25 \quad\Rightarrow\quad F_{EC}=1.41kN$$ فشار

نیرو در عضو EC هنگامی که نیروی برشی در پنل DC منفی است، کششی خواهد بود. برای یافتن بیشینه مقدار کششی F_{EC}، بار باید در قسمت jb از خط تاثیر S_{DC} به گونه‌ای قرار بگیرد که بیشینه مقدار S_{DC} رخ بدهد. از آنجایی که بخش مثبت خط تاثیر S_{DC} مثلثی است می‌توانیم از همان معیاری که پیش از این برای به دست آوردن ممان خمشی استفاده کردیم بهره ببریم. بنابراین بار به ازای طول واحد jb باید با بار به ازای طول واحد jc و بار به ازای طول واحد cb برابر باشد. به عبارت دیگر c، بار را با همان نسبتی که jb را تقسیم می کند، تقسیم می کند. یعنی ۱:۷. بنابراین نیم متر از بار در سمت چپ c قرار دارد و ۳/۵ متر در سمت راست آن. بعدهای قائم در کران های بار در خط تاثیر S_{DC} هر دو، مقدارشان برابر است با $0.3125m$ می‌باشد. از اینرو، نیروی برشی منفی بیشینه در پنل CD برابر است با:

$$S_{CD}(\max-ve)=2.5\left[\frac{1}{2}(0.3125+0.625)0.5+\frac{1}{2}(0.625+0.3125)3.5\right]$$

$$\Rightarrow\quad S_{CD}(\max-ve)=4.69kN$$

سپس از آنجاییکه:

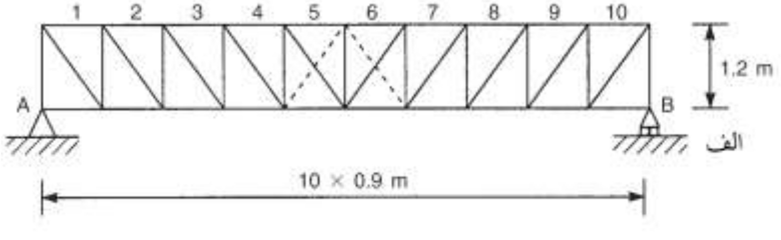
$$F_{EC}\sin 45^{\circ}=S_{DC} \quad\Rightarrow\quad F_{EC}=6.63kN$$

که برابر با بیشینه نیروی کششی در عضو EC است.

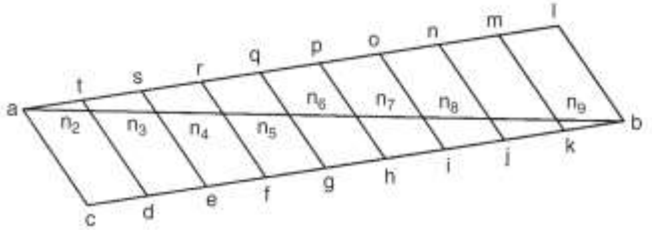
مهاربندی متقابل: عضو قطری خرپای پرات، همانطور که برای عضو BC در مثال ۲۰-۷ دیدیم می‌تواند در کشش و فشار باشد که این امر به علامت نیروی برشی در پنل خاصی که این عضو در آن قرار دارد، بستگی دارد. استثناهای این امر، قطرهای کران های انتهایی هستند که در آنها، با به دست آوردن خطوط تاثیر نیروی برشی برای پنل های AH و MB، مشخص می‌شود که نیروی برشی در پنل AH همواره منفی است و نیروی برشی در پنل MB همواره مثبت است. بنابراین قطرهای این پنل ها همواره در کششند. شکل ۲۰-۱۸الف خرپای پرات. در برخی موقعیت‌ها اعضای قطری برای نیروهای فشاری نامناسبند و بنابراین به مهاربندی متقابل نیاز است. این امر شامل اعضای قطری ای است که در جهت مخالف با قطرهای اصلی، شکل ۲۰-۱۸الف در خرپا، به صورت مایل قرار داده می‌شوند. مانند دو پنل

مرکزی در شکل ۲۰–۱۸الف. فرض می‌شود که قطرهای اصلی، نیروی صفر را حمل می‌کنند در حالی که مهاربندی متقابل در کشش است. از مثال ۲۰–۷ روشن است که نیروی برشی در تمام پنل ها به جز دو پنل بیرونی از خرپای پرات می‌تواند مثبت یا منفی باشد. بنابراین تمام قطرها در این پنل ها می‌تواند دچار فشار شود. بنابراین به نظر می رسد که تمام پنل های داخلی خرپای پرات نیاز به مهاربندی متقابل دارند. هر چند همانطور که در بخش ۲۰–۳ دیدیم بار مرده ای که بر تیر اثر می کند اثری سودمند دارد و در اینکه، طول تیر تحت وارونگی برشی، را کاهش می‌دهد، در نتیجه این امر تعداد پنل های لازم برای مهاربندی مثقابل را کاهش می‌دهد.

مثال ۲۰–۸) خرپای پرات شکل ۲۰–۱۹الف بار مرده ۱ کیلو نیوتن بر متر را در گره‌های یال بالایی حمل می کند. بار زنده گسترده یکنواختی که طولش به ۹ متر می رسد و دارای شدت ۱/۵ کیلو نیوتن بر متر است و دوباره بر روی گره های یال بالایی است، بر خرپا اعمال می‌شود. اگر اعضای قطری فقط برای مقاومت در برابر کشش طراحی شده باشند. تعیین کنید که کدام یک از پنل ها احتیاج به مهاربندی متقابل دارند.



الف



ب

شکل۲۰–۱۹ مهاربندی متقابل در یک خرپای پرات

مجموعه ای از خطوط تاثیر را می‌توان مانند شکل ۲۰–۱۹ ب برای نیروی برشی در هر یک از ده پنل رسم نمود. ما تحلیل را از مرکز خرپا که نیروی DLS برش بار مرده کمترین اثرش

را دارد آغاز می‌کنیم. در ابتدا ما پنل ۵ را مورد بررسی قرار می دهیم. نیروی برشی S_5 در پنل ۵، با سقف بار زنده در n_5 برابر است با:

$$S_5 = 1(\text{مساحت } n_5qa - \text{مساحت } n_5gb) + 1.5(\text{مساحت } n_5qa)$$

یعنی:

$$S_5 = -1\times \text{مساحت } n_5gb + 2.5\times \text{مساحت } n_5qa \qquad (1)$$

بعدهای قائم در خط تاثیر S_5 در نقاط g و q از مثلث های متشابه به دست می‌آیند و به ترتیب برابر با ۰/۵ و ۰/٤ هستند. همینطور از مثلث های متشابه، می‌بینیم که n_5 فاصله افقی بین g و q را با نسبت ۰/۵ : ۰/٤ تقسیم می کند. بنابراین از معادله (۱) داریم:

$$S_5 = -1\times\frac{1}{2}\times 5\times 0.5 + 2.5\times\frac{1}{2}\times 4\times 0.4 \quad \Rightarrow \quad S_5 = 0.75kN$$

بنابراین از آنجایی که S_5 مثبت است قطر در پنل ۵ در فشار خواهد بود و بدین ترتیب پنل ۵ و همینطور از تقارن، پنل ٦ نیازمند مهاربندی متقابل هستند. حال با سقف بار زنده در بعدهای قائم و طول قاعده ها در مثلث های n_4fb و n_4ra مانند مسئله قبل تعیین می‌شود. بنابراین:

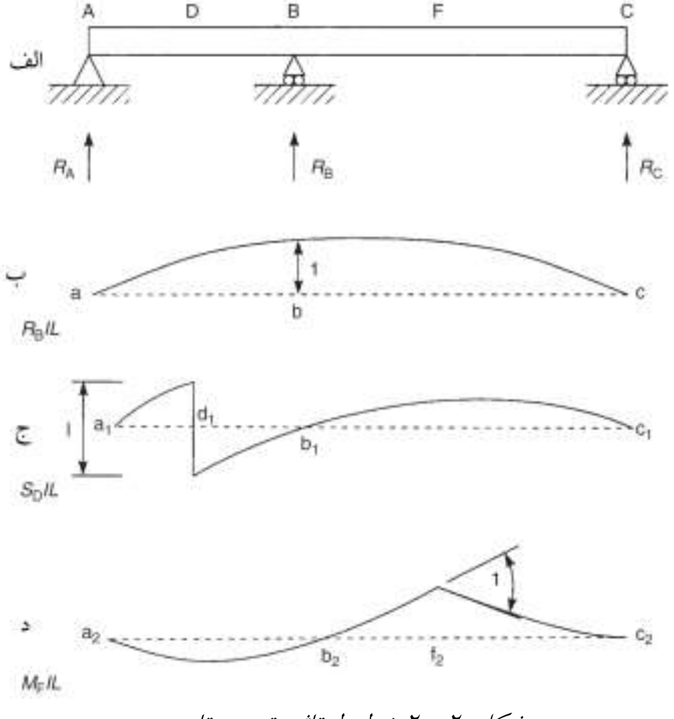
$$S_4 = -1\times\frac{1}{2}\times 6\times 0.6 + 2.5\times\frac{1}{2}\times 3\times 0.3 \quad \Rightarrow \quad S_4 = -0.675kN$$

بنابراین از آنجایی که S_4 منفی است پنل ٤ و بنابراین پنل ۷ نیاز به مهاربندی متقابل ندارد. واضح است که پنل های باقیمانده احتیاج به مهاربندی متقابل ندارند. توجه داشته باشید که برای یک خرپای پراتی که دارای تعداد پنل های فرد باشد مقدار خالص نیروی برشی بار مرده در پنل مرکزی برابر صفر است. بنابراین این پنل همواره نیازمند مهاربندی متقابل است.

۲۰-٦ خطوط تاثیر برای تیرهای سرتاسری

سازه‌هایی را که تا کنون در این فصل بررسی کرده بودیم، معین استاتیکی بودند و بدین ترتیب خطوط تاثیر توابع مختلف شامل قطعات خط راست بودند. موقعیت‌های دیگری برای سازه‌های نامعین استاتیکی مانند تیرهای سرتاسری رخ می‌دهد. تیر سرتاسری دو دهانه ABC شکل ۲۰-۲۰الف را در نظر بگیرید و فرض کنید که می‌خواهیم خطوط تاثیر را برای عکس العمل B نیروی برشی در مقطع D در AB و ممان خمشی در مقطع F در BC را به دست بیاوریم. شکل خطوط تاثیر را می‌توان با استفاده از اصل مولر برسلاو شرح داده شده

در بخش ۲۰-۲ به دست آورد. بنابراین در شکل ۲۰-۲۰ ب ما تکیه گاه در B را برداشته و یک جابجایی واحد در جهت عکس العمل تکیه گاه R_B وارد می‌کنیم. تیر مانند شکل نشان داده شده خم می‌شود زیرا همچنان در تکیه گاه های A و C مفصل شده است. اگر دهانه BC وجود نداشت این امر دیگر صادق نبود و تیر حول A مانند یک اتصال صلب دوران می کرد و خط تاثیر R_B مانند شکل ۲۰-۱ ج مستقیم بود.



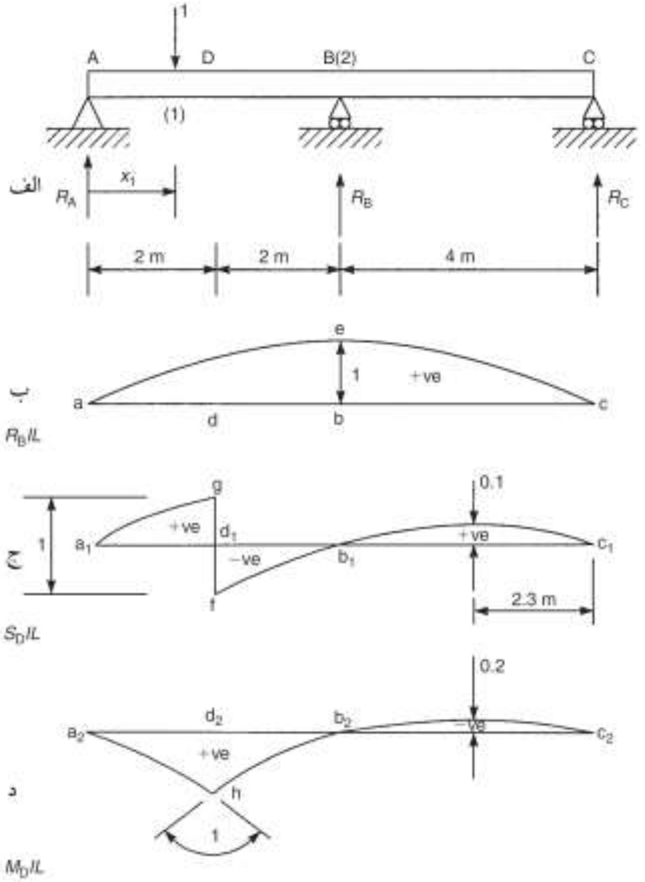
شکل۲۰-۲۰ خطوط تاثیر تیر سرتاسری

برای به دست آوردن خط تاثیر نیروی برشی در مقطع D، ما تیر را در D می بریم و یک جابجایی برش واحد، مانند شکل ۲۰-۲۰ ج اعمال می‌کنیم. دوباره از آنجایی که تیر در نقطه C به تکیه گاه وصل شده است. شکل جابجا شده منتج از این عمل، به صورت منحنی است. علاوه بر این شیب خط تاثیر باید در دو طرف D یکسان باشد زیرا در غیر این صورت، به حضور ممانی که یک دوران نسبی را ایجاد می کند، اشاره می کند. این امر ممکن نیست زیرا جابجایی ای که ما اختصاص دادیم ناشی از برش است. بدین ترتیب خط تاثیر بین A و D باید دوباره به صورت منحنی باشد. خط تاثیر ممان خمشی در F را با وارد

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

کردن یک لولا در F و اعمال یک دوران واحد نسبی مانند شکل ۲۰–۲۰د می‌توان به دست آورد. دوباره قسمت ABF تیر به صورت منحنی خواهد بود و همینطور قسمت FC. زیرا این قسمت از تیر باید دوران کند. بنابراین جمع دوران های دو قسمت تیر در F برابر واحد است.

مثال ۲۰–۹) خطوط تاثیر را برای عکس‌العمل‌ها در B و نیروی برشی و ممان خمشی در D در تیر سرتاسری دو دهانه شکل ۲۰–۲۱الف را به دست آورید.



شکل۲۰–۲۱ خط تاثیر تیر سرتاسری مثال۲۰–۹

شکل هر خط تاثیر را می‌توان با استفاده از اصل مولر برسلاو مانند شکل های ۲۰–۲۱ ج، د رسم نمود. هر چند قبل از اینکه بتوان برای تعیین مقادیر بیشینه توابع مختلف ناشی از عبور سیستم بارگذاری از این خطوط تاثیر استفاده نمود؛ باید بعدهای قایم را محاسبه نمود. به

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

همین دلیل از آنجایی که خطوط تاثیر دارای قطعات منحنی هستند باید معادله های آنها را به دست بیاوریم. وقتی خط تاثیر یک تکیه گاه (در اینجا R_B) به دست آمد خطوط تاثیر باقیمانده از تعادل استاتیکی پیروی می‌کنند.

خط تاثیر R_B در ابتدا فرض کنید که یک بار واحد در موقعیت x_1 از A بین A و B قرار دارد. برای تعیین R_B می‌توانیم از روش انعطاف پذیری در بخش ۱۶-٤ استفاده کنیم. بنابراین ما تکیه گاه در B را حذف می‌کنیم (نقطه ۲) و جابجایی a_{21} در B ناشی از بار واحد در x_1 (نقطه ۱) را محاسبه می‌کنیم. پس از آن جابجایی a_{22} در B ناشی از بار واحد عمودی و به سمت پایین در B را محاسبه می‌کنیم. جابجایی نهایی در B ناشی از بار واحد و x_1 و عکس العمل R_B برابر است با:

$$a_{21} - a_{22}R_B = 0 \qquad (۱)$$

از آنجایی که تکیه گاه در B جابجا نشده است، در معادله (۱) عبارت $a_{22}R_B$ منفی است زیرا R_B در جهت خلاف بار واحد اعمالی در B است. هر دو ضریب انعطاف پذیری معادله (۱) را می‌توان از اعمال یک بار واحد به دست آورد زیرا طبق قضیه اثرات متقابل (بخش ۱۵-٤) جابجایی درB ناشی از یک بار واحد در x_1 برابر جابجایی در x_1 ناشی از بار واحد در B است. بنابراین ما بار واحد عمودی و به سمت پایین را در B وارد می‌کنیم. معادله شکل جابجا شده تیر مانند یک تیر با اتکای ساده است که یک بار متمرکز را در مرکز حمل می کند. بنابراین از معادله ٤ مثال ۱۳-۵ داریم:

$$\upsilon = \frac{1}{48EI}\left(4x^3 - 3L^2x\right) \qquad (۲)$$

یا، برای تیر شکل ۲۰-۲۱الف:

$$\upsilon = \frac{x}{12EI}\left(x^2 - 48\right) \qquad (۳)$$

در B هنگامیکه $x=4m$:

$$\upsilon_B = -\frac{32}{3EI} = a_{22} \qquad (٤)$$

علاوه بر این جابجایی در B ناشی از بار واحد در x_1 (جابجایی در x_1 ناشی از بار واحد در B) از معادله(۳) برابر است با:

$$\upsilon_{x1} = \frac{x_1}{12EI}\left(x_1^2 - 48\right) = a_{21} \qquad (۵)$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

با جایگذاری a_{22} و a_{21} در معادله (۱) خواهیم داشت:

$$\frac{x_1}{12EI}\left(x_1^2-48\right)+\frac{32}{3EI}R_B=0$$

که از آن:

$$R_B=-\frac{x_1}{128}\left(x_1^2-48\right) \qquad \left(0\le x_1\le 4m\right) \qquad (۶)$$

معادله (۶) خط تاثیر R_B را با بار واحد بین A و B می‌دهد. بقیه خط تاثیر از تقارن به دست می آید. معادله ٤ را می‌توان کنترل کرد زیرا مقدار R_B با بار واحد در A و B را می دانیم. بنابراین از معادله (۶) هنگامی که $x_1=0\ ,R_B=0$ و هنگامی که $x_1=0.4m,R_B=1$ همانطور که انتظار می‌رفت. اگر تکیه گاه در B به صورت متقارن نبود، روند بالا برای بار واحد در در دهانه BC نیز تکرار می‌شد. در این مورد معادله های شکل خیزیافته AB و BC معادله‌های ۱٤ و ۱۵ مثال ۱۳–۶ می‌شدند. در این مثال ما به خط تاثیر S_D نیاز داریم، بنابراین در واقع ما به مقدار R_B با بار واحد در دهانه BC نیاز داریم. بنابراین معادله ۱۵ مثال ۱۳–۶:

$$\upsilon_{x1}=-\frac{1}{12EI}\left(x_1^3-24x_1^2+144x_1-128\right) \qquad \left(4\le x_1\le 8m\right) \qquad (۷)$$

از اینرو از معادله (۱):

$$R_B=\frac{1}{12EI}\left(x_1^3-24x_1^2+144x_1-128\right) \qquad \left(4\le x_1\le 8m\right) \qquad (۸)$$

بررسی معادله (۸) نشان می‌دهد که هنگامی $x_1=0.4\ m\ ,\ R_B=1$ و هنگامی که $x_1=0.8m\ ,$ $R_B=0$.

خط تاثیر S_D: با بار واحد در سمت چپ D، نیروی برشی S_D در D به سادگی برابر است با:

$$S_D=-R_A+1 \qquad (۹)$$

که با ممان گرفتن حول C داریم:

$$R_A\times 8-1\left(8-x_1\right)+R_B\times 4=0 \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری R_B از معادله (۶) در معادله (۱۰) و مرتب کردن، داریم:

$$R_A=\frac{1}{256}\left(x_1^3-80x_1+256\right) \qquad (۱۱)$$

در حالی که از معادله (۹) داریم:

$$S_D = -\frac{1}{256}\left(x_1^3 - 80x_1\right) \qquad \left(0 \le x_1 \le 2.0m\right) \qquad (۱۲)$$

بنابراین هنگامی که $x_1 = 0$ ، $S_D = 0$ و هنگامی که $x_1 = 2m$ ، $S_D = 0.59$ برابر با بعد قایم d_1g در خط تاثیر S_D در شکل ۲۰-۲۱ ج. با بار واحد بین D و B:

$$S_D = -R_A$$

بنابراین، با جایگذاری R_A از معادله (۱۱):

$$S_D = -\frac{1}{256}\left(x_1^3 - 80x_1 + 256\right) \qquad \left(2 \le x_1 \le 4.0m\right) \qquad (۱۳)$$

بنابراین هنگامی که $x_1=2m$, $S_D=-0.41$ برابر با بعد قایم d_1f در شکل ۲۰-۱ ج و هنگامی که $x_1=4m,S_D=0$ حال بار واحد بین B و C را بررسی می‌کنیم، دوباره $S_D = -R_A$ خواهد بود اما در این مورد R_B در معادله (۱۰) توسط معادله (۱۳) داده می‌شود. با جایگذاری R_B از معادله (۱۳) در معادله (۱۰) به دست خواهیم آورد:

$$R_A = -S_D = -\frac{1}{256}\left(x_1^3 - 24x_1^2 + 176x_1 - 384\right) \qquad \left(4 \le x_1 \le 8.0m\right) \qquad (۱٤)$$

بنابراین شامل خط تاثیر S_D سه قطعه a_1g,fb_1 و b_1c_1 را شامل می‌شود.

خط تاثیر M_D:با بار واحد بین A و D:

$$M_D = R_A \times 2 - 1\left(2 - x_1\right) \qquad (۱۵)$$

با جایگذاری R_A از معادله (۱۱) در معادله (۱۵) و ساده سازی به دست خواهیم آورد:

$$M_D = \frac{1}{128}\left(x_1^3 + 48x_1\right) \qquad \left(0 \le x_1 \le 2.0m\right) \qquad (۱٦)$$

هنگامی که $x_1=0$, $M_D=0$ و هنگامی که $x_1=2m,M_D=0.81$ برابر با بعد قایم d_2h در شکل ۲۰-۲۱ د. حال با بار واحد بین D و B:

$$M_D = R_A \times 2 \qquad (۱۷)$$

بنابراین با جایگذاری R_A از معادله (۱۱) خواهیم داشت:

$$M_D = \frac{1}{128}\left(x_1^3 - 80x_1 + 256\right) \qquad \left(2.0 \le x_1 \le 4.0m\right) \qquad (۱۸)$$

از معادله (۱۸) می‌بینیم که هنگامی که $x_1=2m$, $M_D=0.81$ دوباره برابر با بعد قایم d_2h در شکل ۲۰-۲۱ د و هنگامی که $x_1=4m,M_D=0$ در نهایت با بار واحد بین B و C، M_D دوباره توسط معادله ۱۷ به دست می آید اما مقدار RA آن توسط معادله ١٤ داده می‌شود، از اینرو:

استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است Web: www.M-Alirezaei.com

$$M_D = -\frac{1}{128}\left(x_1^3 - 24x_1^2 + 176x_1 - 384\right) \qquad \left(4.0 \le x_1 \le 8.0m\right) \qquad (۱۹)$$

بعدهای قایم بیشینه در خطوط تاثیر S_D و M_D در دهانه BC را می‌توان با دیفرانسیل گرفتن معادله های ١٤ و ١٩ نسبت به x_1 برابر قرار دادن مشتق با صفر و سپس جایگذاری مقادیر به دست آمده x_1 در معادله ها، به دست آورد. بنابراین به عنوان مثال از معادله (١٤):

$$\frac{dS_D}{dx_1} = \frac{1}{256}\left(3x_1^3 - 48x_1 + 176\right) = 0$$

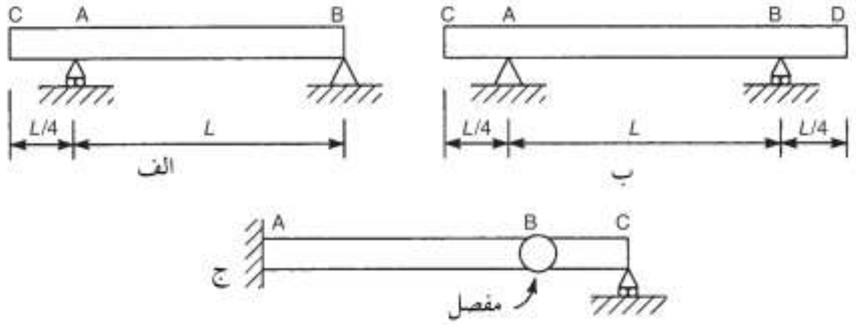
که از آن $x_1 = 5.7m$ بوده، از اینرو $S_D(\max) = 0.1$. به صورت مشابهی:

$$x_1 = 5.7m \quad \Rightarrow \quad M_D(\max) = -0.2$$

در این بخش ما خطوط تاثیر را برای تیرها، خرپاها و تیرهای سرتاسری به دست آوردیم. واضح است خطوط تاثیر را می‌توان برای گستره زیادی از سازه‌هایی که بارهای جابجا شونده را حمل می‌کنند، می‌توان رسم نمود. به دست آوردن خط تاثیر، سازه هر چه می‌خواهد باشد، بر مبنای عبور بار واحد از سازه است.

مسائل

۱) خطوط تاثیر را برای عکس العمل تکیه‌گاهی در A در تیرهای شکل ۲۰-۲۲الف، ب و ج به دست بیاورید.

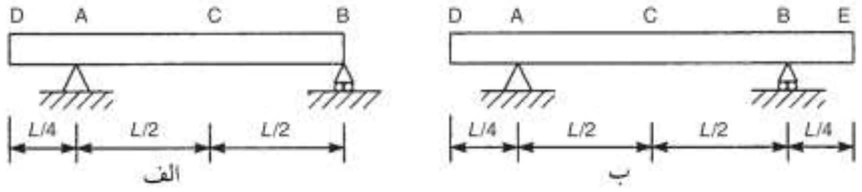


شکل ۲۰-۲۲

۲) خطوط تاثیر را برای نیروی برشی در C در تیرهای شکل ۲۰-۲۳الف و ب رسم کنید.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

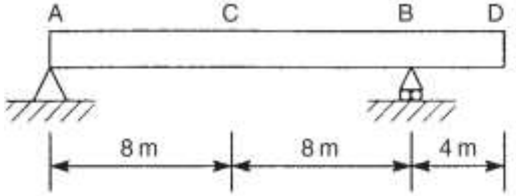
استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است
Web: www.M-Alirezaei.com



شکل ۲۰-۲۳

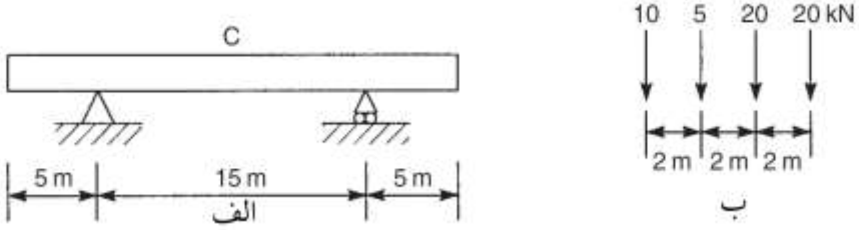
۳) خطوط تاثیر را برای ممان خمشی در C در تیرهای شکل ۲۰-۲۳ الف و ب رسم کنید.

٤) تیر با اتکای ساده شکل ۲۰-۲۵ بار گسترده یکنواخت جابجا شونده ای با طول ۱۰ متر و شدت ۲۰ کیلو نیوتن در متر را حمل می کند. بیشینه مقادیر مثبت و منفی نیروی برشی و ممان خمشی در مقطع C تیر را محاسبه کنید.



شکل ۲۰-۲٤

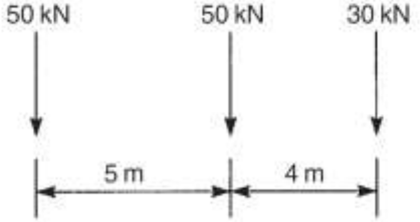
۵) از تیر شکل ۲۰-۲٦ الف یک قطار با ٤ بار شکل ۲۰-۲۵ب عبور می کند. برای مقطعی در میان دهانه، بیشینه ممان خمشی محدب و مقعر را تعیین کنید.



شکل ۲۰-۲۵

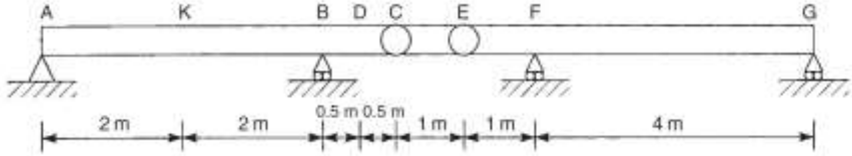
٦) از تیر با اتکای ساده AB دارای دهانه ۲۰ متر، قطاری با بارهای شکل ۲۰-۲٦ عبور می‌کند. موقعیت و بزرگی ممان خمشی بیشینه مطلق را در تیر تعیین کنید، همچنین بیشینه مقادیر مثبت و منفی نیروی برشی را در هر قسمتی از تیر تعیین کنید.

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel



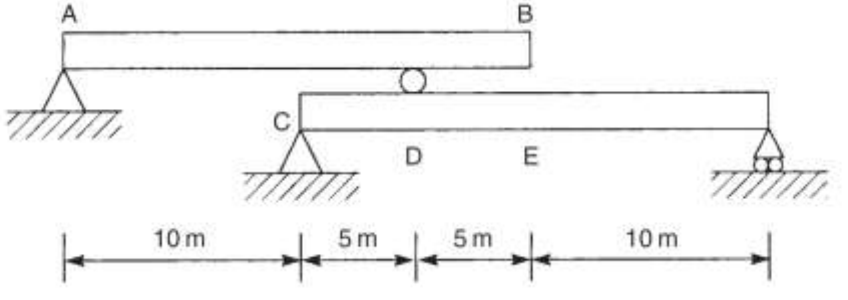
شکل ۲۰-۲۶

۷) تیر سه دهانه شکل ۲۰-۲۷ دارای لولاهایی ر C و E در میان دهانه‌اش است. خطوط تاثیر را برای عکس العمل در B و نیروی برشی و ممان خمشی در مقاطع K و D به دست آورید.



شکل ۲۰-۲۷

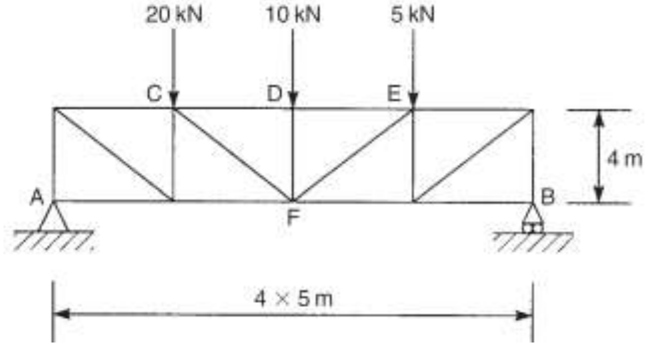
۸) خطوط تاثیر را برای عکس‌العمل‌های A و C و برای ممان خمشی در E در سیستم تیر شکل ۲۰-۲۸ رسم کنید. توجه داشته باشید که تیر AB توسط یک غلتک در D بر روی تیر پایینی تکیه داده شده است. اگر دو بار ۱۰ کیلو نیوتنی در فاصله ۵ متری از تیر بالایی AB عبور کنند، مقادیر بیشینه عکس‌العمل‌ها در A و C و ممان خمشی در E را تعیین کنید.



شکل ۲۰-۲۸

۹) تیر با اتکای ساده ای دارای دهانه ۵ متر دارای وزن ۰/۵ کیلو نیوتن بر متر است و بار گسترده یکنواختی با شدت ۱/۲ کیلو نیوتن بر متر و طول ۱ متر را حمل می کند. طولی از تیر که در آن وارونگی برشی رخ می‌دهد را محاسبه کنید.

۱۰) یک خط تاثیر نیرو برای عضو CD خرپای شکل۲۰-۲۹ به دست بیاورید و نیروی عضو ناشی از بارهای قرار داده شده در C، D و E را محاسبه کنید.

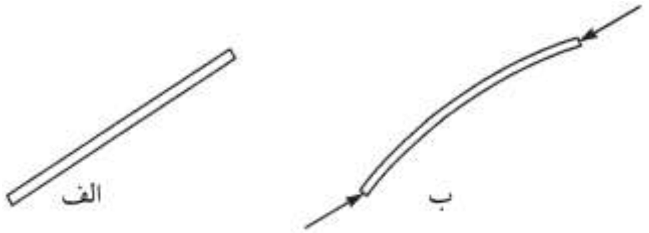


شکل۲۰-۲۹

فصل بیست و یکم
ناپایداری سازه‌ها

مقدمه

تاکنون در بررسی رفتار اعضای سازه‌ای تحت بار برای ما توانایی مقابله آنها با اشکال مختلف تنش مورد نظر بود، بنابراین مقاومت آنها وابسته به خواص مقاومتی مصالحی بود که از آن ساخته شده بودند، با این وجود، اعضای سازه‌ای در معرض بارهای محوری فشاری ممکن است با توجه به خواص هندسی گسیخته شوند و نه با توجه به خواص مصالح خود. برای مثال یک عضو سازه‌ای دراز لاغر مانند آنچه در شکل ۲۱-۱الف نشان داده شده است هنگامی که تحت اثر بار فشاری محوری قرار می‌گیرد ناگهان با مقادیر زیاد جابجایی‌های جانبی مانند شکل ۲۱-۱ب دچار انحناء می‌شود.



شکل۲۱-۱ کمانش یک ستون لاغر

این پدیده با عنوان ناپایداری شناخته می‌شود و گفته می‌شود که عضو کمانش می‌کند. اگر عضو به صورتی خاص، بلند و لاغر باشد ممکن است شکل مستقیم اولیه خود را هنگامی که بار برداشته می‌شود دوباره به دست آورد. اعضای سازه‌ای تحت بارهای محوری فشاری به عنوان ستون یا قطعه فشاری شناخته می‌شوند، هر چند اصطلاح ستون معمولاً برای اعضای عمودی نسبتاً سنگینی که برای تحمل تیرها و دال‌ها به کار می روند مورد استفاده قرار می‌گیرد، قطعه فشاری، اعضای قاب و خرپاها را تشکیل می‌دهد. از بحث بالا کاملاً مشخص است که در طراحی اعضای فشاری نه تنها باید مقاومت مصالح عضو را در نظر گرفت بلکه باید پایداری آن را در برابر کمانش نیز در نظر داشته باشد. آشکار است که هر چه عضو نسبت به ابعاد سطح مقطعش کوتاهتر باشد، محتمل تر است که شکست، بیشتر بر

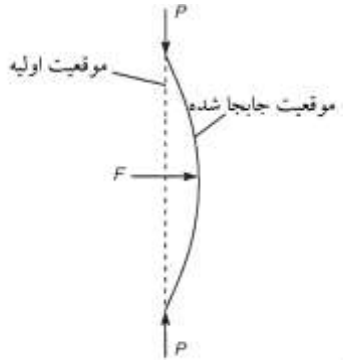
اثر فشار مصالح رخ بدهد تا بر اثر ناپایداری آن. متعاقب این امر در برخی بازه‌های میانی، شکست، ترکیبی از هر دو است. ما کمانش را در ستون‌های لاغر بلند[1] بررسی خواهیم کرد و عبارت‌هایی را برای کمانش یا بار بحرانی به دست خواهیم آورد و سپس این بحث را به طراحی ستون‌ها با هر طولی بسط خواهیم داد. همچنین به بررسی تیرهای تحت اثر بارهای محوری و ممان خمشی نیز می‌پردازیم.

۲۱-۱ تئوری اولر برای ستون‌های لاغر

اولین حرکت مهم در تئوری‌های کمانش ستون‌ها در قرن هجدهم توسط اولر[2] انجام شد. راهکار کلاسیک او هم اکنون نیز برای ستون‌های بلند لاغر که دارای گستره ای از قیدهای انتهایی هستند معتبر است. قبل از ارائه تئوری، ما طبیعت کمانش و تفاوت بین تئوری و واقعیت را مورد بررسی قرار خواهیم داد. دیده‌ایم که اگر یک بار محوری فشاری افزاینده به یک ستون بلند لاغر وارد شود، مقداری از بار وجود دارد که در آن، ستون ناگهان شروع به خم شدن یا کمانش در جهت‌هایی نامعین خواهد کرد. این بار یا بار کمانشی ستون است یا چیزی نزدیک به بار کمانشی است. این حقیقت که ستون در یک جهت خاص کمانش می‌کند، به عدم تقارن در صفحه کمانش اشاره دارد که ممکن است ناشی از نواقص هندسی یا مصالحی ستون و بارش، هر کدام به تنهایی یا به صورت همزمان باشد. هر چند از نظر تئوری ما در تحلیل خود، یک ستون همگن کاملاً مستقیم که در آن بار به صورت کاملاً دقیق به صورت مستقیم بر روی محور مرکزی آن وارد شده است را فرض کرده‌ایم. بنابراین از نظر تئوری، کمانش یا خم شدن ناگهانی بر اثر فشار محوری وجود نخواهد داشت، بنابراین ما به یک تعریف دقیق از بار کمانشی احتیاج داریم تا از آن در تحلیل یک ستون کامل استفاده کنیم. در ستون شکل ۲۱-۲ که تحت بار فشاری P قرار دارد، بدون توجه به مقدار P ستون کوتاهتر می‌شود. روشن است که اگر P تنشی بیش از تنش تسلیم مصالح ستون ایجاد کند در این حالت شکست مصالح رخ خواهد داد، با این وجود اگر ستون توسط یک بار جانبی کوچک F جابجا شود در مقادیر P پایین بار بحرانی یا بار کمانشی P_{CR}، حذف F منجر به بازگشت ستون به وضعیت غیر تغییر یافته‌اش می‌شود که نشان

[1] Long slender columns
[2] Euler

می‌دهد شرایط تعادل پایدار است. هنگامی که $P=P_{CR}$ باشد جابجایی ناپدید نمی‌شود و ستون در موقعیت تغییر مکان یافته خود باقی خواهد ماند. هر چند که جابجایی کوچک است. بنابراین بار کمانشی P_{CR} با شرایط تعادل خنثی همراه است. برای $P>P_{CR}$ جابجایی های جانبی به وجود آمده افزایش خواهند یافت و ستون ناپایدار است.



شکل۲۱-۲ تعریف بار کمانشی یک ستون

بار کمانشی برای یک ستون با انتهای مفصلی

ستون با انتهای مفصلی شکل۲۱-۳ را در نظر بگیرید، ما فرض می‌کنیم که این ستون در موقعیت جابجا شده تعادل خنثی در کمانش است. بنابراین بار محوری فشاری به مقدار P_{CR} رسیده است. همینطور فرض می‌کنیم که ستون خیز داشته است. بنابراین تغییر مکان‌هایش υ، نسبت به محورهای oxy مثبت است. ممان خمشی M در هر مقطع x برابر است با:

$$M=-P_{CR}\upsilon$$

بنابراین با جایگذاری M از معادله ۱۳-۳ به دست خواهیم آورد:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=-\frac{P_{CR}}{EI}\upsilon \qquad (۱-۲۱)$$

با مرتب کردن به دست خواهیم آورد:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}+\frac{P_{CR}}{EI}\upsilon=0 \qquad (۲-۲۱)$$

حل معادله ۲۱-۲ به صورت استاندارد است و برابر است با:

$$\upsilon=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x \qquad (۳-۲۱)$$

که C_1 و C_2 ثابت های دلخواه هستند، بنابراین:

$$\mu^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

شرایط تکیه گاهی این مورد خاص، در $x=L$ داریم $\upsilon=0$. اولی می‌دهد $C_1=0$ در حالی که از دومی داریم:

$$0 = C_2 \sin \mu L$$

در حالتی که υ مخالف صفر باشد و C_2 مخالف صفر باشد، $\sin\mu L=0$ مخالف صفر است بنابراین:

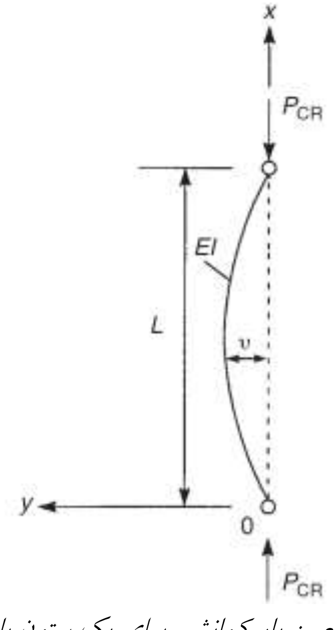
$$\mu L = n\pi \quad \text{که} \quad n = 1,2,3,...$$

که از آنجا:

$$\frac{P_{CR}}{EI} L^2 = n^2 \pi^2$$

که از آن:

$$P_{CR} = \frac{n^2 \pi^2 EI}{L^2} \qquad (٤-٢١)$$



شکل۲۱-۳ تعیین بار کمانشی برای یک ستون با انتهای مفصلی

توجه داشته باشید که C_2 نامعین است و جابجایی ستون قابل یافتن نیست، این امر غیر قابل انتظار نبود، زیرا ستون در تعادل خنثی و در موقعیت کمانش یافته خود است، کمترین مقدار بار کمانشی، مربوط به مقدار $n=1$، در معادله ۲۱-٤ است یعنی:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (۲۱-۵)$$

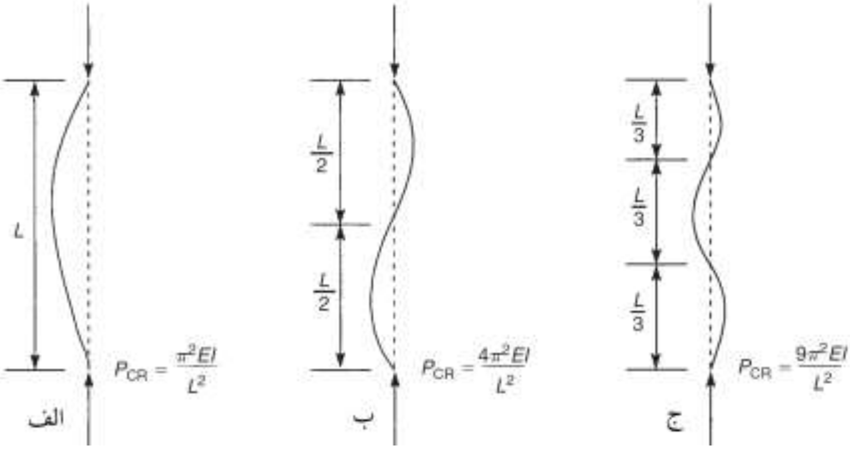
پس از آن ستون دارای موقعیت تغییر مکان یافته زیر است:

$$\upsilon = C_2 \sin \mu x$$

و به صورت موج نیم سینوسی طولی نشان داده شده در شکل ۲۱-٤الف کمانش می‌کند، مقادیر دیگر P_{CR} برای $n=1,2,3,...$ برابرند با:

$$P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \qquad P_{CR} = \frac{9\pi^2 EI}{L^2},....$$

این مقادیر بالاتر بار کمانش برای مدل‌های کمانش پیچیده‌تر هستند که در شکل‌های ۲۱-٤ب و ۲۱-٤ج نشان داده شده اند. از نظر تئوریک این مدل‌های مختلف را می‌توان با اعمال قیدهای خارجی بر یک ستون لاغر در نقاط عطف برای جلوگیری از حرکت جانبی ایجاد کرد، هر چند در عمل از کمترین مقدار تجاوز نمی‌شود زیرا تنش‌های بالا در این بار توسعه می‌یابند و شکست ستون در پی آن رخ می‌دهد. بنابراین ما نگران بارهای کمانشی بالاتر از آن نیستیم.



شکل۲۱-٤ مدل‌های کمانشی یک ستون با انتهای مفصلی

بار کمانشی برای ستون دو سرگیردار

در عمل ستون‌ها اغلب در انتهاها دوران‌شان بسته شده است و در واقع گیردار هستند. شکل ۲۱-۵ نشان می‌دهد ستون در انتهای خود گیردار است و تحت یک بار محوری فشاری قرار دارد که به مقدار بحرانی P_{CR} رسیده است، بنابراین ستون در موقعیت تعادل خمشی قرار دارد، در این مورد انتهاهای ستون تحت اثر لنگرهای گیرداری M_F علاوه بر بارهای محوری قرار دارد، بنابراین در هر مقطع x ممان خمشی M برابر است با:

$$M = -P_{CR}\upsilon + M_F$$

با جایگذاری M از معادله ۱۳-۳ خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -\frac{P_{CR}}{EI}\upsilon + \frac{M_F}{EI} \qquad (۲۱-۶)$$

با مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P_{CR}}{EI}\upsilon = \frac{M_F}{EI} \qquad (۲۱-۷)$$

که حل آن می‌شود:

$$\upsilon = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x + \frac{M_F}{P_{CR}} \qquad (۲۱-۸)$$

که در آن:

$$\mu^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

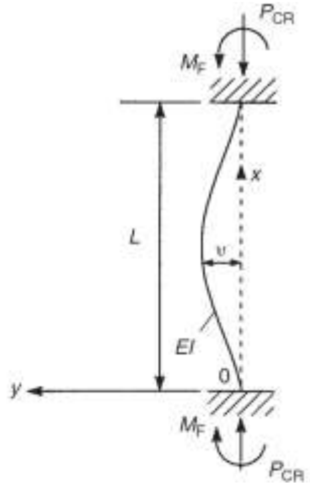
هنگامی که $x=0$ است $\upsilon=0$ است بنابراین:

$$C_1 = -\frac{M_F}{P_{CR}}$$

علاوه بر این در $x=L$ مقدار $\upsilon=0$ است، از اینرو:

$$0 = -\frac{M_F}{P_{CR}}\cos\mu L + C_2\sin\mu L + \frac{M_F}{P_{CR}}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است



شکل۲۱-۵ کانش یک ستون لاغر با دو انتهای گیردار

که می‌دهد:

$$C_2 = -\frac{M_F}{P_{CR}}\frac{(1-\cos\mu L)}{\sin\mu L}$$

که در نتیجه معادله ۲۱-۸ به صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon = -\frac{M_F}{P_{CR}}\left[\cos\mu L + \frac{(1-\cos\mu L)}{\sin\mu L}\sin\mu L - 1\right] \qquad (۲۱-۹)$$

توجه داشته باشید که دوباره از آنجایی که M_F را نمی‌توان یافت مقدار υ نامعین است، همینطور از آنجایی که در $x=L$ مقدار $d\upsilon/dx=0$، از معادله ۲۱-۹ داریم:

$$0 = 1 - \cos\mu L$$

که می‌دهد:

$$\cos\mu L = 1$$

و:

$$n = 0,2,4,\ldots \quad \text{وقتی که} \quad \mu L = n\pi$$

برای زمانی که n مخالف صفر باشد و کمترین مقدار بار کمانشی را در نظر بگیریم $(n=2)$ داریم:

$$P_{CR} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} \qquad (۲۱-۱۰)$$

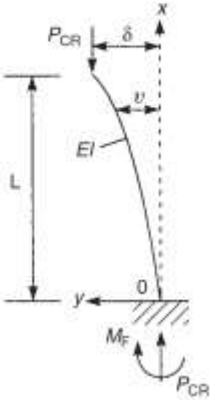
Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

بار کمانشی برای یک ستون دارای یک انتهای گیردار و یک انتهای آزاد

در این پیکر بندی، انتهای بالایی ستون آزاد است تا به صورت جانبی حرکت کند و دوران کند مانند شکل ۲۱-۶. در هر مقطع x ممان خمشی M از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M = P_{CR}(\delta - \upsilon) = -P_{CR}\upsilon + M_F$$



شکل۲۱-۶ تعیین بار کمانشی برای یک ستون با یک انتهای گیردار و یک انتهای آزاد

با جایگذاری M در اولین این عبارت‌ها از معادله ۱۳-۳ (می‌توانیم از معادله دومی هم استفاده کنیم) به دست خواهیم آورد:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = \frac{P_{CR}}{EI}(\delta - \upsilon) \qquad (۲۱-۱۱)$$

که با مرتب کردن به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P_{CR}}{EI}\upsilon = \frac{P_{CR}}{EI}\delta \qquad (۲۱-۱۲)$$

با حل معادله ۲۱-۱۲ داریم:

$$\upsilon = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \delta \qquad (۲۱-۱۳)$$

که:

$$\mu^2 = \frac{P_{CR}}{EI}$$

هنگامی که $x = 0$ باشد، $\upsilon = 0$ خواهد بود. بنابراین:

$$C_1 = -\delta$$

همینطور وقتی $x = L$ باشد، $\upsilon = \delta$ خواهد بود. بنابراین از معادله ۲۱-۱۳ داریم:

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

$$\delta = -\delta \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \delta$$

که می‌دهد:

$$C_2 = \delta \frac{\cos \mu L}{\sin \mu L}$$

از اینرو:

$$\upsilon = -\delta\left(\cos \mu x - \frac{\cos \mu L}{\sin \mu L}\sin \mu x - 1\right) \qquad (۲۱-۱٤)$$

دوباره از آنجایی که نمی‌توان δ را تعیین کرد مقدار υ نامعین است. در نهایت در $x=o$ داریم $d\upsilon/dx=0$ که در نتیجه از معادله ۲۱-۱٤ داریم:

$$\cos \mu L = 0$$

زمانی که:

$$\mu L = n\frac{\pi}{2} \quad \text{وقتی} \quad n = 1,3,5,...$$

حال با گرفتن کمترین مقدار بار کمانش (n برابر با ۱) به دست خواهیم آورد:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{4L^2} \qquad (۲۱-۱٥)$$

کمانش یک ستون که یک انتهای آن گیردار است و دیگری مفصلی است

ستون در این حالت مجاز است در یک انتهای خود دوران کند ولی به یک نیروی جانبی F برای حفظ موقعیتش (شکل ۲۱-۷) نیاز دارد. در هر مقطع x ممان خمشی برابر است با:

$$M = -P_{CR}\upsilon - F(L-x)$$

با جایگذاری M از معادله ۱۳-۳ به دست خواهیم آورد:

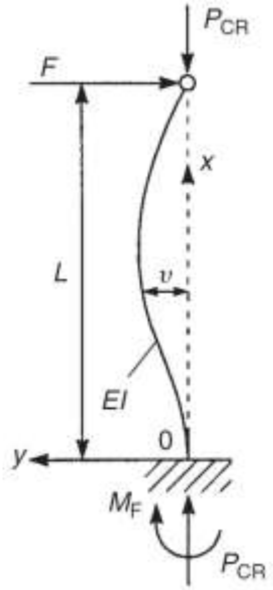
$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -\frac{P_{CR}}{EI}\upsilon - \frac{F}{EI}(L-x) \qquad (۲۱-۱٦)$$

که با مرتب کردن به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P_{CR}}{EI}\upsilon - \frac{F}{EI}(L-x) \qquad (۲۱-۱۷)$$

با حل معادله ۲۱-۱۷ خواهیم داشت:

$$\upsilon = C_1 \cos \upsilon x + C_2 \sin \upsilon x - \frac{F}{P_{CR}}(L-x) \qquad (۲۱-۱۸)$$



شکل۲۱-۷ تعیین بار کمانش برای ستونی با یک انتها مفصل و یک انتها گیردار

در $x=0$ داریم $d\upsilon/dx=0$، بنابراین:

$$0 = \mu C_2 + \frac{F}{P_{CR}}$$

که از آن:

$$C_2 = -\frac{F}{\mu P_{CR}}$$

هنگامی که $x=L$ داریم $\upsilon=0$، که از آن:

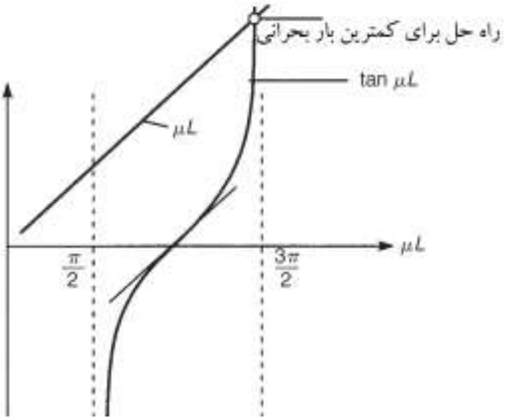
$$0 = C_1 \cos \mu L + C_2 \sin \mu L$$

که می‌دهد:

$$C_1 = \frac{F}{\mu P_{CR}} \tan \mu L$$

بنابراین معادله ۲۱-۱۸ به صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon = \frac{F}{\mu P_{CR}}\left[\tan \mu L \cos \mu x - \sin \mu x - \mu(L-x)\right] \qquad (۲۱-۱۹)$$



شکل۸-۲۱ راه حل یک معادله غیر جبری

همینطور در $x=0$ $\upsilon=0$، بنابراین:

$$0 = \tan \mu L - \mu L$$

یا:

$$\mu L = \tan \mu L \quad (۲۱-۲۰)$$

معادله ۲۱-۲۰ یک معادله غیر جبری است که می‌توان به صورت ترسیمی مانند آنچه در شکل ۲۱-۸ نشان داده شده است آن را حل کرد، کمترین مقدار غیر صفر صدق کننده در معادله ۲۱-۲۰ تقریباً برابر ٤/٤۹ است.این مقدار به ما خواهد داد:

$$P_{CR} = \frac{20.2EI}{L^2}$$

که می‌توان آن را به صورت تقریبی به صورت زیر نوشت:

$$P_{CR} = \frac{20.2\pi^2 EI}{L^2} \quad (۲۱-۲۱)$$

از معادله‌های ۲۱-۵، ۲۱-۱۰، ۲۱-۱۵ و ۲۱-۲۱ می‌توان دید که بار کمانشی در همه موارد دارای شکل زیر است:

$$P_{CR} = \frac{K^2\pi^2 EI}{L^2} \quad (۲۱-۲۲)$$

که K یک ثابت است، معادله ۲۱-۲۲ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad (۲۱-۲۳)$$

که درآن $L_e(=L/K)$ طول هم عرض ستون است، یعنی طول ستون دارای انتهای مفصلی که دارای بار کمانشی همسان با ستون واقعی است. (با مقایسه معادله‌های ۲۱-۲۳ و ۲۱-۵) روشن است که بار کمانشی هر ستون را می‌توان به این صورت بیان کرد، البته تا هنگامی که طول هم ارز آن از رابطه بالا مشخص است. با بررسی معادلات ۲۱-۵، ۲۱-۱۰، ۲۱-۱۵ و ۲۱-۲۱ می بینیم که طول های هم ارز انواع مختلف ستون‌ها برابرند با:

هر دو انتها مفصلی $L_e = 1.0L$

هر دو انتها گیردار $L_e = 0.5L$

یک انتها گیردار و یک انتها آزاد $L_e = 2.0L$

یک انتها گیردار و یک طرف مفصلی $L_e = 0.7L$

۲۱-۲ محدودیت های تئوری اولر

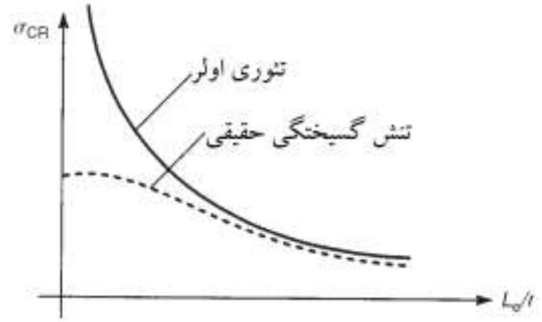
برای یک ستون با سطح مقطع A، تنش بحرانی σ_{CR} از معادله ۲۱-۲۳ برابر است با:

$$\sigma_{CR} = \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EI}{AL_e^2} \qquad (۲۱-۲٤)$$

ممان دوم سطح I برای مقطع برابر است با Ar^2 که r شعاع ژیراسیون مقطع است، بنابراین ما می‌توانیم معادله ۲۱-۲٤ را به صورت زیر نمایش دهیم:

$$\sigma_{CR} = \frac{\pi^2 E}{(L_e / r)^2} \qquad (۲۱-۲۵)$$

بنابراین برای یک ستون با مصالح مشخص، تنش بحرانی یا تنش کمانشی با پارامتر $(L_e/r)^2$ نسبت عکس دارد. نسبت L_e/r بیانگر نسبتی از طول و ابعاد مقطع ستون است و به عنوان ضریب لاغری شناخته می‌شود. روشن است که اگر ستون دراز و لاغر باشد L_e/r بزرگ است و σ_{CR} کوچک است. در مقابل برای یک ستون کوچک که دارای سطح مقطع نسبتا بزرگی است L_e/r کوچک است و σ_{CR} بزرگ است. نمودار σ_{CR} نسبت به L_e/r برای یک مصالح خاص دارای شکلی شبیه به شکل ۲۱-۹ است. برای مقادیر L_e/r کمتر از یک مقدار خاص، که به مصالح بستگی دارد، ستون بیشتر تحت فشار گسیخته می‌شود تا بر اثر کمانش. بنابراین σ_{CR} ای که توسط تئوری اولر پیش بینی شده است، دیگر معتبر نیست. بنابراین در شکل ۲۱-۹ تنش گسیختگی حقیقی از منحنی نقطه چین پیروی می‌کند و نه از خط ممتد.



شکل۲۱-۹ تغییرات تنش بحرانی بر حسب ضریب لاغری

۲۱-۳ شکست ستون‌ها در هر طولی

اغلب روش‌های تجربی یا نیمه تجربی برای شکست ستون‌ها در هر طولی مورد استفاده قرار می گیرند. این امر مبنای شکل گیری اساس جداول بار ایمن یا تنش ایمن در آیین نامه هاست. یکی از این روش‌ها که تطابق خوبی با واقعیت دارد. تئوری رانکین است.

تئوری رانکین

فرض کنید که P بار شکست یک ستون با مصالح مشخص و طول دلخواه است. همینطور فرض کنید که P_S بار گسیختگی در فشار برای یک ستون کوتاه با همان مصالح است و فرض کنید که P_{CR} بار کمانشی یک ستون بلند لاغر با همان مصالح است. تئوری رانکین بیان می‌کند که:

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{P_S}+\frac{1}{P_{CR}} \qquad (۲۱-۲٦)$$

معادله ۲۱-۲٦ برای ستون‌های بسیار کوتاه معتبر است زیرا هنگامی که $1/P_{CR} \to 0$ مقدار $P \to P_S$ خواهد رفت. این معادله برای ستون بلند لاغر معتبر است زیرا در مقایسه با $1/P_{CR}$ مقدار $1/P_S$ کوچک است، بنابراین P به سمت P_{CR} میل می‌کند. بنابراین معادله ۲۱-۲٦ در گستره طول ستون در نقاط ابتدایی و انتهایی معتبر است. با فرض اینکه σ_S تنش تسلیم در فشار، برای مصالح ستون باشد و A مساح سطح مقطع باشد، خواهیم داشت:

$$P_S=\sigma_S A$$

همینطور از معادله ۲۱-۲۳ خواهیم داشت:

$$P_{CR}=\frac{\pi^2 EI}{L_e^2}$$

با جایگذاری P_S و P_{CR} در معادله ۲۱-۲٦ داریم:

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{\sigma_S A}+\frac{1}{\pi^2 EI/L_e^2}$$

بنابراین:

$$\frac{1}{P}=\frac{\pi^2 EI/L_e^2+\sigma_S A}{\sigma_S A\pi^2 EI/L_e^2}$$

بنابراین:

$$P=\frac{\sigma_S A\pi^2 EI/L_e^2}{\pi^2 EI/L_e^2+\sigma_S A}$$

با تقسیم بالا و پایین سمت راست این معادله بر $\pi^2 EI/L_e^2$ خواهیم داشت:

$$P=\frac{\sigma_S A}{1+\sigma_S AL_e^2/\pi^2 EI}$$

اما $I=Ar^2$ بنابراین:

$$P=\frac{\sigma_S A}{1+\left(\sigma_S/\pi^2 E\right)\left(L_e/r\right)^2}$$

که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت:

$$P=\frac{\sigma_S A}{1+k\left(L_e/r\right)^2} \qquad (۲۱-۲۷)$$

که k در آن یک ثابت است و به مصالح ستون بستگی دارد. تنش شکست در فشار σ_c برای یک ستون با هر طولی از معادله ۲۱-۲۷ برابر است با:

$$\sigma_C=\frac{P}{A}=\frac{\sigma_S}{1+k\left(L_e/r\right)^2} \qquad (۲۱-۲۸)$$

توجه داشته باشید که برای ستون دارای یک مصالح معین σ_c تابعی از ضریب لاغری یعنی L_e/r است.

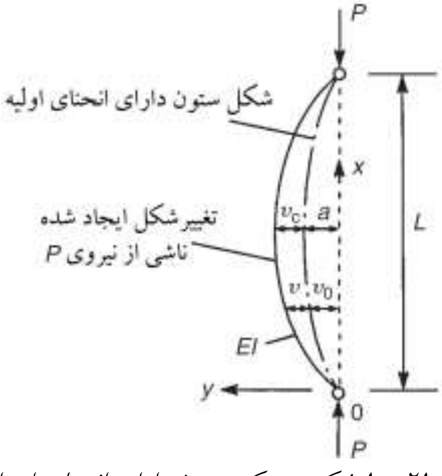
ستون‌های دارای انحنای ابتدایی

راهکار دیگری به تئوری رانکین، فرمول طراحی ای را در شکست یک ستون دارای انحنای ابتدایی، بنا می‌نهد. این استدلال عملی است زیرا ستون‌ها هرگز کاملاً مستقیم نیستند.

ستون دارای انتهاهای مفصلی شکل ۲۱-۱۰ را در نظر بگیرید. در حالت بارگذاری نشده، ستون دارای انحنای ابتدایی کوچکی است، به گونه‌ای که تغییر مکان جانبی در هر مقدار x برابر υ_o است. بیایید فرض کنیم که:

$$\upsilon_0 = a \sin \pi \frac{x}{L} \qquad (۲۱-۲۹)$$

که در آن a مقدار ابتدایی تغییر مکان در مرکز ستون است. معادله ۲۱-۲۹ شرایط مرزی را در $\upsilon_o=0$ در $x=0$ و $x=L$ و همینطور $d\upsilon_o/dx=0$ ارضا می‌کند. بنابراین شکل خیز یافته فرضی، منطقی است. به ویژه آنکه ما توجه داریم که شکل کمانش یافته یک ستون با انتهای مفصلی، موج نیم سینوسی است.



شکل۲۱-۱۰ شکست یک ستون دارای انحنای ابتدایی

از آنجایی که ستون، دارای انحنای ابتدایی است یک بار محوری P سریعا تولید خمش می‌کند و بنابراین تغییر مکان های جانبی بیشتر υ از مکان ابتدایی تغییر مکان یافته اندازه گیری می‌شود. ممان خمشی M در هر مقطع Z برابر است با:

$$M = -P(\upsilon + \upsilon_0) \qquad (۲۱-۳۰)$$

اگر ستون در ابتدا تحت تنش نباشد ممان خمشی در هر مقطع متناسب با تغییر در انحنای آن مقطع نسبت به حالت ابتدایی اش است و تابع مقدار مطلق آن نیست، از معادله ۱۳-۳ داریم:

$$M = EI \frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

بنابراین:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} = -\frac{P}{EI}\left(\upsilon - \upsilon_0\right) \quad (۲۱-۳۱)$$

با مرتب کردن معادله ۲۱-۳۱ داریم:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P}{EI}\upsilon = -\frac{P}{EI} - \upsilon_0 \quad (۲۱-۳۲)$$

توجه داشته باشید که P در این مورد بار کمانشی ستون نیست. با جایگذاری υ_o از معادله ۲۱-۲۹ به دست خواهیم آورد:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P}{EI}\upsilon = -\frac{P}{EI} a \sin \pi \frac{x}{L} \quad (۲۱-۳۳)$$

با حل معادله ۲۱-۳۳ داریم:

$$\upsilon = C_1 \cos \mu x + C_2 \sin \mu x + \frac{\mu^2 a}{\left(\pi^2 / L^2\right) - \mu^2} \sin \pi \frac{x}{L} \quad (۲۱-۳۴)$$

که در آن $\mu^2 = P/EI$ می‌باشد. اگر انتهاهای ستون مفصلی باشند در $x=0$ و $x=L$ مقدار υ برابر صفر است. اولین شرط از این شرایط مرزی می‌دهد $C_1=0$، در حالی که از دومی خواهیم داشت:

$$0 = C_2 \sin \mu L$$

هر چند این معادله با معادله‌ای که از شرایط مرزی تیر دارای انتهای مفصلی کمانش یافته سمت راست به دست می‌آید، یکسان است اما این دو پدیده از هم متفاوت هستند. اگر $\sin \mu L=0$ باشد سپس $\mu L=\pi$ بنابراین $\mu^2=\pi^2/L^2$. این امر منجر می‌شود تا عبارت سوم در معادله ۲۱-۳۴ بینهایت شود، که واضح است این امر برای یک ستون در تعادل پایدار ($P<P_{CR}$) غیر ممکن است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $C_2=0$ است و از آنجا معادله ۲۱-۳۴ به صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon = \frac{\mu^2 a}{\left(\pi^2 / L^2\right) - \mu^2} \sin \pi \frac{x}{L} \quad (۲۱-۳۵)$$

با تقسیم بالا و پایین معادله ۲۱-۳۵ بر μ^2 به دست خواهیم آورد:

$$\upsilon = \frac{a \sin \pi x / L}{\left(\pi^2 / \mu^2 L^2\right) - 1}$$

اما $\mu^2 = P/EI$ می‌باشد و $\sin \pi x/L=\upsilon_o$ بنابراین:

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

$$\upsilon=\frac{\upsilon_0}{\left(\pi^2 EI/PL^2\right)-1} \qquad (۲۱-۳۶)$$

از معادله ۲۱-۵ می‌بینیم که $\pi^2 EI/PL^2=P_{CR}$، بار کمانشی برای ستون دارای انتهای مفصلی کاملا مستقیم است. که از آنجا معادله ۲۱-۳۶ به صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon=\frac{\upsilon_0}{\left(P_{CR}/P\right)-1} \qquad (۲۱-۳۷)$$

از معادله ۲۱-۳۷ می‌توان مشاهده کرد که اثر بار فشاری P آن است که خیز ابتدایی υ_o را با ضریب $1/(P_{CR}/P)-1$ افزایش می‌دهد. واضح است که هنگامی که P به سمت P_{CR} نزدیک می‌شود υ به سمت بینهایت میل می‌کند. در عمل این امر غیر ممکن است زیرا انهدام مصالح پیش از رسیدن به P_{CR} رخ می‌دهد، اگر ما، جابجایی ها در میانه ارتفاع ستون را مورد بررسی قرار دهیم از معادله ۲۱-۳۷ خواهیم داشت:

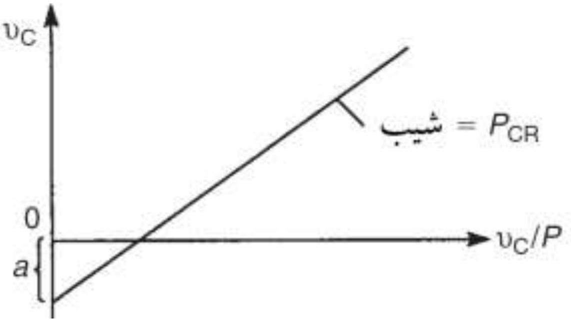
$$\upsilon_c=\frac{a}{\left(P_{CR}/P\right)-1}$$

با مرتب کردن خواهیم داشت:

$$\upsilon_c=P_{CR}\frac{\upsilon_c}{P}-a \qquad (۲۱-۳۸)$$

معادله ۲۱-۳۸ رابطه خطی بین υ_c و υ_c/P را بیان می‌کند. بنابراین در یک آزمایش حقیقی بر روی یک ستون دارای انحنای ابتدایی نمودار υ_c به υ_c/P هنگامی که شرایط بحرانی نزدیک می‌شود، یک خط مستقیم خواهد بود. شیب خط برابر P_{CR} است و عرض از مبدا آن برابر a است که مقدار آن برابر جابجایی ابتدایی در نیمه ارتفاع ستون است. نمودار ۲۱-۱۱ با عنوان نمودار ساوث ول شناخته می‌شود و روشی ساده برای تعیین بار کمانشی ستون‌ها به ما می‌دهد. بیشینه ممان خمشی ستون، شکل ۲۱-۱۰ در میانه ارتفاع رخ می‌دهد و برابر است با:

$$M_{\max}=-P\left(a+\upsilon_c\right)$$



شکل۲۱-۱۱ تعیین تجربی بار کمانشی

با جایگذاری υ_c از معادله ۲۱-۳۸ داریم:

$$M_{\max} = -Pa\left(1+\frac{1}{(P_{CR}/P)-1}\right)$$

یا:

$$M_{\max} = -Pa\left(\frac{P_{Cr}}{P_{CR}-P}\right) \qquad (۳۹-۲۱)$$

بیشینه تنش فشاری در یک تار انتهایی ستون رخ می‌دهد و از معادله ۹-۱۵ برابر است با:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + Pa + Pa\left(\frac{P_{Cr}}{P_{CR}-P}\right)\left(\frac{c}{I}\right)$$

که A در آن مساحت مقطع است، c فاصله تار انتهایی از محور مرکزی است و I ممان دوم سطح مقطع ستون است. از آنجایی که $I=Ar^2$ (r شعاع ژیراسیون است) می‌توانیم معادله بالا را دوباره به صورت زیر بنویسیم:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A}\left[1+\frac{P_{Cr}}{P_{CR}-P}\left(\frac{ac}{r^2}\right)\right] \qquad (۴۰-۲۱)$$

حال P/A تنش متوسط است، یعنی σ در مقطع ستون. بنابراین با نوشتن معادله ۲۱-۴۰ بر حسب تنش، خواهیم داشت:

$$\sigma_{\max} = \sigma\left[1+\frac{\sigma_{Cr}}{\sigma_{CR}-\sigma}\left(\frac{ac}{r^2}\right)\right] \qquad (۴۱-۲۱)$$

که در آن $\sigma_{Cr} = P_{CR}/A = \pi^2 E(r/L)^2$ (معادله ۲۱-۲۵ را ببینید) می‌باشد.

عبارت ac/r^2 بیانی از ساخت هندسی ستون است و برای یک ستون معین دارای یک انحنای ابتدایی معین، مقداری ثابت است. بنابراین با نوشتن $ac/r^2=\eta$، معادله ۲۱-۴۱ به صورت زیر می‌شود:

$$\sigma_{\max} = \sigma\left(1+\frac{\eta\sigma_{Cr}}{\sigma_{CR}-\sigma}\right) \qquad (۲۱-۴۲)$$

با بسط دادن معادله ۲۱-۴۲ خواهیم داشت:

$$\sigma_{\max}\left(\sigma_{CR}-\sigma\right) = \sigma\left[(1+\eta)\sigma_{CR}-\sigma\right]$$

که با مرتب کردن به صورت زیر خواهد شد:

$$\sigma^2 - \sigma\left[\sigma_{\max}+(1+\eta)\sigma_{CR}\right]+\sigma_{\max}\sigma_{CR} = 0 \qquad (۲۱-۴۳)$$

و حل آن نتیجه زیر را می‌دهد:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[\sigma_{\max}+(1+\eta)\sigma_{CR}\right]-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\sigma_{\max}+(1+\eta)\sigma_{CR}\right]^2-\sigma_{\max}\sigma_{CR}} \qquad (۲۱-۴۴)$$

پس از حل معادله ۲۱-۴۳ از آنجایی که برای ما کوچکترین مقدار σ مهم است از ریشه‌های مثبت معادله صرف نظر می‌کنیم. معادله ۲۱-۴۴ به ما تنش متوسط σ در ستون را خواهد داد که در آن، بیشینه تنش برشی برای هر مقدار η میسر است. بنابراین اگر ما بیشینه تنش را برابر σ_Y بگیریم، یعنی برابر با تنش تسلیم مصالح ستون، در این حالت معادله ۲۱-۴۴ را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\sigma = \frac{1}{2}\left[\sigma_Y+(1+\eta)\sigma_{CR}\right]-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\sigma_Y+(1+\eta)\sigma_{CR}\right]^2-\sigma_Y\sigma_{CR}} \qquad (۲۱-۴۵)$$

از آزمایشات دریافته شده است که در ستون‌های دارای انتهاهای مفصلی از جنس فولاد نرم هنگامی که بیشینه تنش در تار انتهایی به تنش تسلیم σ_Y می رسد، شکست در یک ستون دارای انحنای اولیه، رخ می‌دهد. همینطور از تعداد زیادی از آزمایشات بر روی ستون‌هایی از جنس فولاد نرم، رابرتسون نتیجه گیری کرد که:

$$\eta = 0.003\left(\frac{L}{r}\right)$$

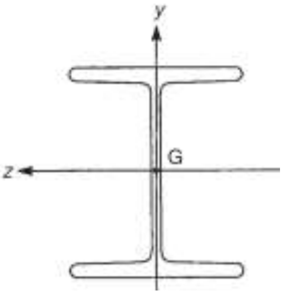
با جایگذاری مقدار η در معادله ۲۱-۴۵ به دست خواهیم آورد:

$$\sigma=\frac{1}{2}\left[\sigma_Y+\left(1+0.003\frac{L}{r}\right)\sigma_{CR}\right]-\sqrt{\frac{1}{4}\left[\sigma_Y+\left(1+0.003\frac{L}{r}\right)\sigma_{CR}\right]^2-\sigma_Y\sigma_{CR}} \quad (۲۱-۴۶)$$

در معادله ۲۱-۴۶، σ_Y خاصیتی از مصالح است در حالیکه σ_{CR} (از معادله ۲۱-۲۵)، به مدول یانگ و ضریب لاغری ستون بستگی دارد، بنابراین معادله ۲۱-۴۶ را می‌توان برای تعیین بارها یا تنش‌های محوری ایمن ستون‌های دارای یک مصالح خاص، بر حسب ضریب لاغری، مورد استفاده قرار داد. آیین نامه ها بیشینه مقادیر مجاز تنش فشاری متوسط را در بازه ای از ضریب های لاغری به صورت جدول ارائه کرده‌اند.

۲۱-۴ اثر سطح مقطع بر کمانش ستون‌ها

ستون‌هایی که ما تا اینجا بررسی کرده‌ایم دارای سطح مقطع با تقارن دو محوری و ممان دوم سطح یکسان حول هر دو محور بوده اند. عملاً ستون‌ها بیشتر دارای مقطع I هستند، به عنوان مثال ستونی که دارای مقطع I شکل ۲۱-۱۲ است حول محور مرکزی که صلبیت خمشی آن EI کمترین مقدار است کمانش می‌کند. یعنی Gy که بزرگترین مقطع موثر است از دیدگاه ناپایداری برابر است با یک مقطع توخالی دایروی که ممان دوم سطح آن حول هر محور مرکزی برابر ممان دوم سطح ماست و دارای کمترین مقدار مصالح ممکن در نزدیکی محور است.



شکل ۲۱-۱۲ تاثیر سطح مقطع بر کمانش ستون‌ها

یکی از معایب این نوع مقطع آن است که اتصال دادن در آن سخت است. در طراحی ستون‌های دارای تقارن تک محوری در سطح مقطع (به عنوان مثال مقطع کانال) یا اصلا فاقد تقارن (مقطع زاویه دار مانند بازوهای نامساوی) کمترین شعاع ژیراسیون در محاسبات

ضریب لاغری، مورد نظر است. در مورد آخر، شعاع ژیراسیون حول یکی از محورهای اصلی مورد نظر است. فاکتور مهم دیگر در تعیین بار کمانشی یک ستون، روش تکیه گاه های انتهایی است، در بخش ۲۱-۱ دیدیم که تغییرات قابل توجه بار کمانشی از تغییرات در شرایط انتهایی ناشی می‌شود، بنابراین یک ستون با انتهاهای گیردار دارای مقادیر بیشتری از بار کمانشی نسبت به حالتی است که انتهاها مفصلی هستند. (مقایسه معادله های ۲۱-۵ و ۲۱-۱۰). هر چند دیده ایم که با ارائه مفهوم طول معادل، می‌توان بارهای کمانشی انواع ستون‌ها را بدون توجه به شرایط انتهایی، به صورت ستون دارای انتهای مفصلی نمایش داد. متعاقب این امر در حالی که طول معادل L_e برای ستون مورد استفاده قرار می‌گیرد می‌توان معادله ۲۱-٤٦ را برای انواع شرایط انتهایی، به کار برد. آیین نامه ها طول موثر یا هم ارز ستون‌ها را برای گستره زیادی از شرایط انتهایی فهرست کرده اند. علاوه بر این هر چند یک ستون به صورت طبیعی در جهتی عمود بر محوری که در آن EI کمترین است کمانش می‌کند، اما ممکن است ستون به گونه ای توسط وسایل خارجی در این جهت مقید شود که کمانش فقط در یک محور دیگر، قابل رخ دادن باشد.

۲۱-۵ پایداری تیرها تحت بارهای محوری و عرضی

تنش‌ها و خیزها در یک تیر الاستیک خطی که تحت بارهای عرضی قرار دارد همانطور که توسط تئوری تیر ساده پیش بینی شده است به صورت مستقیم، متناسب با بارهای اعمالی هستند. این رابطه زمانی معتبر است که خیزها به گونه ای کوچک باشند که تغییری کوچک در هندسه تیر بارگذاری شده تاثیر غیر مهمی بر روی خود بارها داشته باشد. این شرایط هنگامی که بارهای محوری به صورت همزمان با بارهای عرضی وارد می‌شوند به صورت شدیدی تغییر می‌کند، ممان های داخلی، نیروهای برشی، تنش‌ها و خیزها در این حالت وابسته به بزرگی خیز و بزرگی بارهای خارجی هستند. علاوه بر این همانطور که در بخش ۲۱-۳ مشاهده کردیم به نقایص تیر مانند انحنای ابتدایی و برون محوری بارهای محوری حساس هستند، تیرهایی که بارهای محوری عرضی را به صورت همزمان حمل می‌کنند، گاهی اوقات با نام تیر ستون یا به صورت ساده تر ستون‌هایی با بار عرضی شناخته می‌شوند.

در ابتدا یک تیر دارای انتهای مفصلی را در نظر می‌گیریم که بار گسترده یکنواخت با شدت w و بار محوری P را مانند آنچه در شکل ۲۱–۱۳ نشان داده شده است، حمل می‌کند. ممان خمشی در هر مقطع تیر برابر است با:

$$M = -P\upsilon - \frac{wLx}{2} + \frac{wx^2}{2} = EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}$$ از رابطه۱۳–۳

که می‌دهد:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2} + \frac{P}{EI}\upsilon = \frac{w}{2EI}\left(x^2 - Lx\right) \qquad (۲۱–۴۷)$$

حل استاندارد معادله ۲۱–۲۷ برابر است با:

$$\upsilon = C_1\cos\mu x + C_2\sin\mu x + \frac{w}{2EI}\left(x^2 - Lx - \frac{2}{\mu^2}\right)$$

که C_1 و C_2 ثابت‌هایی مجهول هستند و $\mu^2=P/EI$ با جایگذاری شرایط مرزی $\upsilon=0$ در $x=0$ و $x=L$ می‌دهد:

$$C_1 = \frac{w}{\mu^2 P} \qquad C_2 = \frac{w}{\mu^2 P\sin\mu L}\left(1 - \cos\mu L\right)$$

بنابراین خیز برای هر مقدار w و P معین است و برابر است با:

$$\upsilon = \frac{w}{\mu^2 P}\left[\cos\mu x + \left(\frac{1-\cos\mu L}{\sin\mu L}\right)\sin\mu x\right] + \frac{w}{2P}\left(x^2 - Lx - \frac{2}{\mu^2}\right) \qquad (۲۱–۴۸)$$

در تیرستون‌ها مانند تیرها در ابتدا مقادیر بیشینه تنش و خیز برای ما مهم است. در این مورد خاص، بیشینه خیز در مرکز تیر رخ می‌دهد و پس از برخی تغییرات در معادله ۲۱–۴۸ خواهیم داشت:

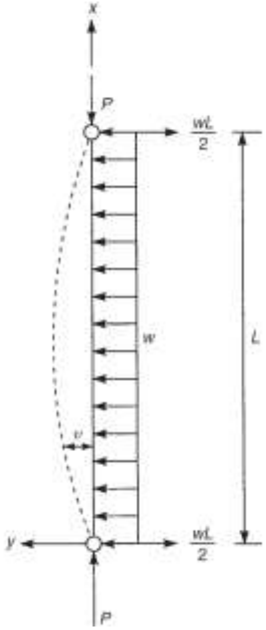
$$\upsilon_{\max} = \frac{w}{\mu^2 P}\left(\sec\frac{\mu L}{2} - 1\right) - \frac{wL^2}{8P} \qquad (۲۱–۴۹)$$

ممان خمشی بیشینه مربوط به آن برابر است با:

$$M_{\max} = -P\upsilon_{\max} - \frac{wL^2}{8}$$

یا از معادله ۲۱–۴۹:

$$M_{\max} = \frac{w}{\mu^2}\left(1 - \sec\frac{\mu L}{2}\right) \qquad (۲۱–۵۰)$$



شکل۲۱-۱۳ خمش تیر ستون با بارگذاری یکنواخت

می‌توانیم معادله ۲۱-۵۰ را بر حسب بار کمانشی اولر $P_{CR}=\pi^2 EI/L^2$، برای یک ستون دارای انتهای مفصلی دوباره بنویسیم، از اینرو:

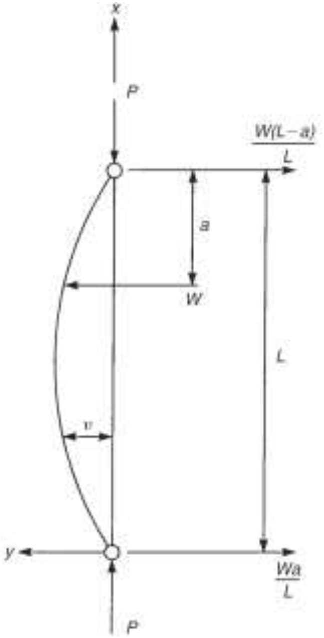
$$M_{\max}=\frac{wL^2}{\pi^2}\frac{P_{CR}}{P}\left(1-\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{CR}}}\right) \quad (۲۱-۵۱)$$

هنگامی که P به P_{CR} نزدیک می‌شود ممان خمشی (و خیز) بینهایت می‌شود، هر چند تئوری بالا با فرض خیزهای کوچک بنا شده است (و گرنه $d^2\upsilon/dx^2$ تخمین نزدیکی برای انحنا نبود)، بنابراین چنین استنباطی نامعتبر است. به هر حال این برهان بیان می‌کند که خیزهای بزرگ بدون توجه به اینکه بار عرضی چقدر کوچک است، بر اثر یک بار محوری فشاری ایجاد می‌شوند. حال بیایید تیر ستون شکل ۲۱-۱۴ را که دارای انتهاهای مفصلی است و بار متمرکز w را در فاصله a از تکیه گاه بالایی حمل می‌کند، مورد بررسی قرار دهیم، برای $x\le L-a$ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M=-P\upsilon-\frac{Wax}{L} \quad (۲۱-۵۲)$$

و برای $x\ge L-a$ داریم:

$$EI\frac{d^2\upsilon}{dx^2}=M=-P\upsilon-\frac{W}{L}(L-a)(L-x) \qquad (۲۱-۵۳)$$



شکل۲۱-۱٤ تیز ستون حمل کننده یک بار محوری

با نوشتن:

$$\mu^2=\frac{P}{EI}$$

معادله ۲۱-۵۲ به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{d^2\upsilon}{dx^2}+\mu^2\upsilon=-\frac{Wa}{EIL}x$$

که حل عمومی آن برابر است با:

$$\upsilon=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x-\frac{Wa}{PL}x \qquad (۲۱-٥٤)$$

به صورت مشابه حل عمومی معادله ۲۱-۵۳ برابر است با:

$$\upsilon=C_3\cos\mu x+C_4\sin\mu x-\frac{W}{PL}(L-a)(L-x) \qquad (۲۱-۵۵)$$

که C_1,C_2,C_3 و C_4 ثابت‌هایی هستند که از شرایط مرزی مانند آنچه توضیح داده می‌شود به دست می‌آیند. هنگامی که $x=0,\upsilon=0$ بنابراین از معادله ۲۱-٥٤، $C_1=0$ است. در $x=L$

$\upsilon=0$، که از معادله ۲۱-۵۵ می‌دهد. $C_3=-C_4 \tan \mu L$. در نقطه اعمال بار، خیز و شیب تیر توسط معادله‌های ۲۱-۵٤ و ۲۱-۵۵ باید برابر باشند. از اینرو با مساوی قرار دادن خیزها:

$$C_2 \sin \mu(L-a)-\frac{Wa}{PL}(L-a)=C_4[\sin \mu(L-a)-\tan \mu L \cos \mu(L-a)]-\frac{Wa}{PL}(L-a)$$

و مساوی قرار دادن شیب‌ها:

$$C_2\mu \cos \mu(L-a)-\frac{Wa}{PL}=C_4\mu[\cos \mu(L-a)+\tan \mu L \sin \mu(L-a)]+\frac{Wa}{PL}(L-a)$$

با حل معادلات بالا برای C_2 و C_4 و جایگذاری C_1,C_2,C_3 و C_4 در معادله‌های ۲۱-۵٤ و ۲۱-۵۵ خواهیم داشت:

$$\upsilon=\frac{W \sin \mu a}{P\mu \sin \mu L}\sin \mu x-\frac{Wa}{PL} \qquad x \le L-a \qquad (۲۱-۵٦)$$

$$\upsilon=\frac{W \sin \mu(L-a)}{P\mu \sin \mu L}\sin \mu(L-x)-\frac{W}{PL}(L-a)(L-x) \qquad x \ge L-a \qquad (۲۱-۵۷)$$

این معادلات خیز، ما را قادر می‌سازند ممان خمشی و تنش‌های خمشی ناشی از آن را در تمام مقاطع تیر ستون به دست آوریم. هنگامی که بار در مرکز دهانه وارد می‌شود یک مورد خاص رخ می‌دهد. منحنی خیز در این حالت متقارن است و دارای خیز بیشینه در بار زیر است:

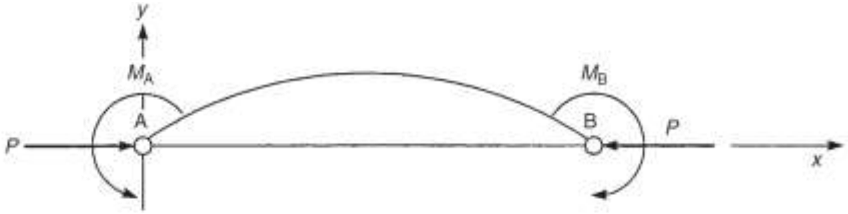
$$\upsilon_{\max}=\frac{W}{2P\mu}\tan\frac{\mu L}{2}-\frac{WL}{4P}$$

در نهایت ما یک تیر ستون تحت اثر ممان های انتهایی M_A و M_B، یک بار محوری P (شکل ۲۱-۱۵) را مورد بررسی قرار می دهیم، شکل خیز یافته تیر ستون را می‌توان با استفاده از اصل جمع آثار قوا و نتایج مورد قبل به دست آورد. در ابتدا ما فرض می‌کنیم که همراه با بار محوری P فقط M_B عمل می‌کند. اگر ما فرض کنیم که بار نقطه ای W به سمت B حرکت می‌کند و به صورت همزمان مقدارش به گونه ای افزایش می یابد که حاصلضرب $M_B=Wa$ (مقدار ثابت) باشد، در حالت حدی هنگامی که a به سمت صفر میل می‌کند ما ممان M_B اعمال شده در B را خواهیم داشت. منحنی خیز را می‌توان از معادله ۲۱-٥٦ با جایگذاری μa به جای $\sin\mu a$ (زیرا μa بسیار کوچک است) و M_B به جای Wa به دست آورد، بنابراین:

$$\upsilon=\frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin \mu x}{\sin \mu L}-\frac{x}{L}\right) \qquad (۲۱-۵۸)$$

به روش مشابه، منحنی خیز مربوط به M_A را که به صورت تنها اثر می‌کند، به دست خواهیم آورد. فرض کنید که W به سمت A به گونه ای حرکت می‌کند که حاصلضرب $M_A=W(L-a)$ مساوی مقداری ثابت است. بنابراین وقتی که $L-a$ به سمت صفر میل می‌کند خواهیم داشت $\sin\mu(L-a)=\mu(L-a)$ و معادله ۲۱–۵۷ به صورت زیر می‌شود:

$$\upsilon=\frac{M_A}{P}\left[\frac{\sin\mu(L-x)}{\sin\mu L}-\frac{(L-x)}{L}\right] \qquad (۲۱–۵۹)$$



شکل ۲۱–۱۵ تیر ستون تحمل کننده ممان‌های انتهایی

اثر همزمان دو ممان با برهم نهی نتایج معادله های ۲۱–۵۸ و ۲۱–۵۹ به دست می‌آید، از اینرو برای تیرستون‌های شکل ۲۱–۱۵ داریم:

$$\upsilon=\frac{M_B}{P}\left(\frac{\sin\mu x}{\sin\mu L}-\frac{x}{L}\right)+\frac{M_A}{P}\left[\frac{\sin\mu(L-x)}{\sin\mu L}-\frac{(L-x)}{L}\right] \qquad (۲۱–۶۰)$$

معادله ۲۱–۶۰ همینطور شکل خیز یافته تیر ستون‌هایی است که بارهای دارای برون محوری را در انتهای A و B خود، حمل می‌کنند. به عنوان مثال اگر e_A و e_B برون محوری‌های P در انتهاهای A و B باشند. بنابراین $M_A=Pe_A$ و $M_B=Pe_B$ که شکل خیزیافته ای به صورت زیر خواهد داشت:

$$\upsilon=e_B\left(\frac{\sin\mu x}{\sin\mu L}-\frac{x}{L}\right)+e_A\left[\frac{\sin\mu(L-x)}{\sin\mu L}-\frac{(L-x)}{L}\right] \qquad (۲۱–۶۱)$$

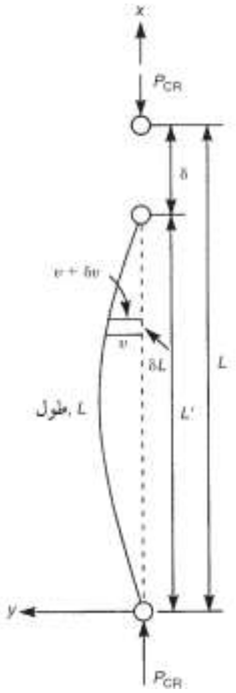
پیکر بندی های دیگر تیر ستون دارای گستره ای از ویژگی های شرایط انتهایی و حالات بارگذاری است که می‌توان با روندهایی مشابه، آنها را تحلیل کرد.

۲۱–۶ روش انرژی برای محاسبه بارهای کمانشی در ستون‌ها (روش ریلی – ریتز)

این حقیقت که انرژی پتانسیل نهایی یک جسم الاستیک در شرایط تعادل دارای مقداری ثابت است (بخش ۱۵–۳ را ببینید) می‌تواند در بررسی تعادل خنثی یک ستون کمانش یافته،

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

مورد استفاده قرار بگیرد. به ویژه هنگامی که شکل خیز یافته یک ستون کمانش یافته مجهول است و باید حدس زده شود، روش انرژی بینهایت سودمند است.



شکل ۲۱-۱٦ کوتاه شدن یک ستون بر اثر کمانش

در ابتدا ما ستون دارای انتهاهای مفصلی را در موقعیت کمانش یافته‌اش در شکل ۲۱-۱٦ مورد بررسی قرار می دهیم. انرژی داخلی یا کرنش U، برای ستون از رابطه ۹-۲۱ به دست می‌آید و فقط ناشی از اثر خمش فرض می‌شود. یعنی:

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx \qquad (۲۱-٦۲)$$

یا در حالت دیگر از آنجایی که $EId^2\upsilon/dx^2=M$ (معادله ۱۳-۳) خواهیم داشت:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2} \right)^2 dx \qquad (۲۱-٦۳)$$

انرژی پتانسیل V برای بار کمانشی P_{CR} نسبت به موقعیت راست ستون (به عنوان مبدا) برابر است با:

$$V = -P_{CR}\delta$$

Telegram Channel: @AlirezaeiChannel کانال تلگرام:

که δ حرکت محوری P_{CR} ناشی از خمش ستون از موقعیت راست اولیه اش است، از شکل ۲۱–۱۶ طول δL در ستون کمانش یافته برابر است با:

$$\delta L = \sqrt{\delta x^2 + \delta \upsilon^2}$$

از آنجا که $d\upsilon/dx$ کوچک است خواهیم داشت:

$$\delta L \approx \delta x \sqrt{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2}$$

که از آنجا:

$$L = \int_0^{L'} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2\right] dx$$

می‌دهد:

$$L = L' + \int_0^{L'} \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx$$

بنابراین:

$$\delta = L - L' = \int_0^{L'} \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx$$

از آنجاییکه:

$$\int_0^{L'} \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx$$

فقط تفاوت دارد از:

$$\int_0^{L} \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx$$

به اندازه عبارتی قابل چشم پوشی، می‌نویسیم:

$$\delta = \int_0^{L} \frac{1}{2}\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx$$

که می‌دهد:

$$V = -\frac{P_{CR}}{2}\int_0^{L} \left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx \qquad (۲۱–۶٤)$$

انرژی پتانسیل نهایی ستون در تعادل خنثی حالت کمانش یافته‌اش، برابر است با:

$$U+V=\int_0^L \frac{M^2}{2EI}dx-\frac{P_{CR}}{2}\int_0^L\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx \qquad (۲۱-۶۵)$$

یا با استفاده از شکل دیگر U از معادله ۲۱-۶۳ داریم:

$$U+V=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right)^2 dx-\frac{P_{CR}}{2}\int_0^L\left(\frac{d\upsilon}{dx}\right)^2 dx \qquad (۲۱-۶۶)$$

حال برای شکل خیز یافته، معادله زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\upsilon=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (۲۱-۶۷)$$

این معادله شرایط مرزی زیر را ارضا می‌کند:

$$(\upsilon)_{x=0}=(\upsilon)_{x=L}=0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right)_{x=0}=\left(\frac{d^2\upsilon}{dx^2}\right)_{x=L}=0$$

و قادر است در حدودی که معتبر است و در آن حدود برای ضرایب ثابت A_n مقادیر مناسبی انتخاب شوند، هر منحنی پیوسته ای را نمایش دهد. بدین ترتیب ما در موقعیتی هستیم که می خواهیم مقدارP_{CR} را دقیقا پیدا کنیم. با جایگذاری معادله ۲۱-۶۷ در ۲۱-۶۶ خواهیم داشت:

$$U+V=\frac{EI}{2}\int_0^L\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left(\sum_{n=1}^{\infty}n^2A_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx$$
$$-\frac{P_{CR}}{2}\int_0^L\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\left(\sum_{n=1}^{\infty}nA_n\cos\frac{n\pi x}{L}\right)^2 dx \qquad (۲۱-۶۸)$$

عبارت حاصل ضرب در هر دو مجموع معادله ۲۱-۶۸، هنگام اجتماع از بین می رود و فقط مقادیر جمع شده عبارات مربع را باقی می گذارد. بنابراین:

$$U+V=\frac{\pi^4EI}{4L^3}\sum_{n=1}^{\infty}n^4A_n^2-\frac{\pi^2P_{CR}}{4L}\sum_{n=1}^{\infty}n^2A_n^2 \qquad (۲۱-۶۹)$$

با قبول مقدار ثابت برای پتانسیل نهایی معادله ۲۱-۶۹ نسبت به هر ضریب A_n و سپس با فرض اینکه A_n مقدار نوعی است، داریم:

$$\frac{\partial(U+V)}{\partial A_n}=\frac{\pi^4EIn^4A_n}{2L^3}-\frac{\pi^2P_{CR}n^2A_n}{2L}=0$$

که از آن:

Web: www.M-Alirezaei.com استفاده غیرتجاری از این اثر با ذکر منبع، بلامانع است

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 EIn^2}{L^2}$$

مانند قبل. می‌بینیم که هر عبارت در معادله ۲۱–٦٧ شکل خیز یافته خاصی را با توجه به بار بحرانی مربوط، نشان می‌دهد. که از آن، عبارت اول، خیز ستون شکل ۲۱–١٦ را با $P_{CR}=\pi^2EI/L^2$ نشان می‌دهد. عبارت‌های دوم و سوم، مربوط به شکل‌های نشان داده شده در شکل ۲۱–٤ ب و ۲۱–٤ ج هستند که دارای بارهای بحرانی $4\pi^2EI/L^2$ و $9\pi^2EI/L^2$ هستند و.... واضح است که ستون باید به گونه‌ای وادار شود تا به صورت‌هایی پیچیده‌تر، اینگونه کمانش یابد. به عبارت دیگر، ستونی که به یک حالت غیر طبیعی در آمده است، سخت تر است و مقاومت بیشتری را در برابر کمانش نشان می‌دهد. این امر را از مقادیر بالاتر بار بحرانی می‌توان مشاهده نمود. اگر شکل خیز یافته ستون مجهول نباشد مهم نیست که کدام یک از معادله های ۲۱–٦٥ یا ۲۱–٦٦ برای انرژی پتانسیل نهایی مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر چند هنگامی که یک راه حل تقریبی در دسترس است معادله ۲۱–٦٥ ارجح است، زیرا مجموع مربوط به ممان خمشی، به دقت شکل υ در نظر گرفته شده، بستگی دارد. در حالی که عبارت مربوط، در معادله ۲۱–٦٦ به دقت $d^2\upsilon/dx^2$ بستگی دارد. عموماً برای یک منحنی خیز، مقدار υ دقیق تر از $d^2\upsilon/dx^2$ به دست می‌آید. فرض کنید که منحنی یک ستون خاص مجهول است یا بسیار پیچیده است، در این حالت، ما شکلی منطقی که تا حد ممکن، شرایط انتهایی ستون و پترن و الگوی شکل خیز یافته را ارضا کند، در نظر می‌گیریم. (روش ریلی – ریتز) عموماً شکل در نظر گرفته شده به صورتی است که شامل سری‌هایی متناهی از ثابت های مجهول و توابع در نظر گرفته شده بر حسب x است. مقدار υ برابر است با:

$$\upsilon = A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + A_3 f_3(x)$$

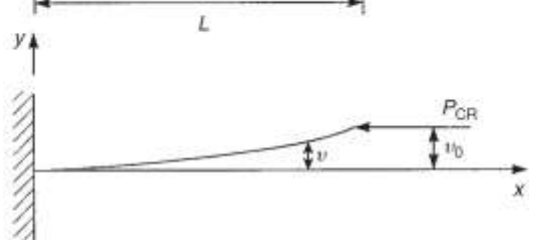
با جایگذاری در معادله ۲۱–٦٥ عبارتی برای انرژی پتانسیل نهایی بر حسب بار بحرانی و ضرایب A_1,A_2 و A_3 به عنوان مجهولات به دست خواهد آمد. با در نظر گرفتن مقدار ثابت انرژی پتانسیل نهایی نسبت به A_1,A_2 و A_3، سه معادله همزمان تولید می‌شود که در آنها نسبت های A_1/A_2، A_1/A_3 و بار بحرانی تعیین می‌شود. مقادیر مطلق ضرایب، دست نیافتنی هستند زیرا تغییر مکان های ستون در موقعیت کمانش یافته‌اش در تعادل خنثی، نامعین هستند. به عنوان نمایشی ساده، ستون شکل ۲۱–١٧ را در شرایط کمانش یافته‌اش در نظر

کانال تلگرام: Telegram Channel: @AlirezaeiChannel

بگیرید. شکلی تقریبی را می‌توان برای شکل خیز یافته طره، بارگذاری شده در انتهایش، استدلال کرد. بنابراین از معادله ٤ مثال ۱۳–۱ داریم:

$$\upsilon = \frac{\upsilon_0 x^2}{2L^3}\left(3L - x\right)$$

این عبارت شرایط انتهایی خیز را ارضا می‌کند، یعنی در $x=0$ $\upsilon=0$ و در $x=L$, $\upsilon=\upsilon_o$. علاوه بر این، این عبارت این شرایط را نیز ارضا می‌کند که شیب در انتهای گیردار ستون صفر است و ممان خمشی یعنی $d^2\upsilon/dx^2$ در انتهای آزاد صفر است. ممان خمشی در هر مقطع برابر است با $M=P_{CR}(\upsilon_o-\upsilon)$.



شکل۲۱-۱۷ بار کمانشی برای یک ستون گیردار با روش انرژی

بنابراین با جایگذاری M و υ در معادله ۲۱–٦۵ می‌دهد:

$$\left(U+V\right) = \frac{P_{CR}^2 \times \upsilon_0^2}{2EI}\int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{2L^2} + \frac{x^3}{2L^3}\right)dx - \frac{P_{CR}}{2}\int_0^L \left(\frac{3\upsilon_0}{2L^3}\right)^2 x^2\left(2L-x\right)dx$$

با جمع و جایگذاری حدود خواهیم داشت:

$$\left(U+V\right) = \frac{17}{35}\frac{P_{CR}^2 \times \upsilon_0^2 L}{2EI} - \frac{3}{5}P_{CR}\frac{\upsilon_0^2}{L}$$

که از آنجا:

$$\frac{\partial\left(U+V\right)}{\partial \upsilon_0} = \frac{17}{35}\frac{P_{CR}^2 \times \upsilon_0^2 L}{2EI} - \frac{6P_{CR}\upsilon_0}{5L} = 0$$

که از آنجا:

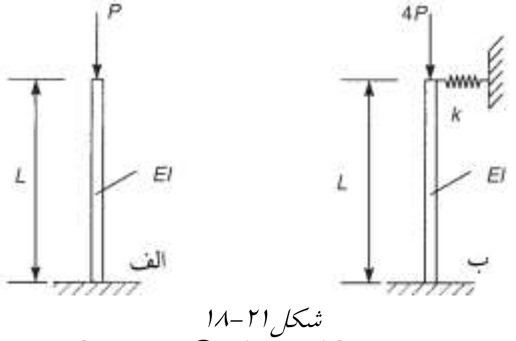
$$P_{CR} = \frac{42EI}{17L^2} = 2.471\frac{EI}{L^2}$$

این مقدار بار بحرانی با مقدار دقیق $\pi^2 EI/4L^2=2.467EI/L^2$ مقایسه می‌شود. (معادله ۲۱–۱۵ را ببینید). این خطا در این مورد، بسیار کوچک است، مقادیر تقریبی بار بحرانی که توسط روش انرژی به دست می آیند همواره بزرگتر از مقادیر حقیقی هستند،

این امر از آنجا نشات می‌گیرد که شکل خیزیافته فرضی به اعمال قیدهایی به منظور مجبور کردن ستون برای داشتن شکلی مصنوعی نیاز دارد و همانطور که دیده‌ایم اثری سخت کننده بر ستون، همراه با افزایش در بار بحرانی دارد. مشاهده می‌شود که حل مثال بالا به سادگی با مساوی قرار دادن افزایش انرژی داخلی U، با کار انجام شده توسط بار بحرانی خارجی – V میسر است. هنگامی که شکل خیز یافته فرضی، شامل یک ضریب مجهول مثل υ_o است، این امر همواره صحیح است. در این فصل ما ناپایداری سازه‌ها با توجه به کمانش کلی یا شکست ستون‌های تحت بار محوری و خمش را مورد بررسی قرار دادیم. خواننده باید آگاه باشد که صورت های دیگری از ناپایداری نیز رخ می دهند. به عنوان مثال، بار فشاری در یک تیر ورق با مقطع I، در غیر از حالتی که مقید شود، می‌تواند تحت ممان‌های خمشی به صورت جانبی کمانش یابد. علاوه بر این مقاطع تیر جدار نازک باز، که در برابر پیچش ضعیف هستند ممکن است ناپایداری پیچشی از خود نشان دهند، یعنی هنگامی که تحت بارهای محوری قرار بگیرند، به صورت ناگهانی پیچ بخورند. این اشکال ناپایداری در کتاب‌های پیشرفته‌تر مورد بحث قرار می‌گیرند.

مسائل:

۱) ستونی یک دست با طول L و صلبیت خمشی EI در یک انتها گیردار و در دیگری آزاد است. ستون به گونه ای طراحی شده است که کمترین بار کمانشی اش برابر P است. (شکل ۲۱–۱۸الف) متعاقباً لازم است تا یک بار افزایش یافته را حمل کند و به این دلیل به وسیله یک فنر جانبی در انتهای آزادش تجهیز می‌شود. (شکل ۲۱–۱۸ب). سختی لازم برای فنر k را تعیین کنید وقتی که بار کمانشی اش $4P$ است.



شکل ۲۱–۱۸

۲) ستون دارای انتهای مفصلی به طول L و صلبیت خمشی EI به گونه‌ای تقویت شده است که در نیمه میانی‌اش دارای صلبیت خمشی $4EI$ باشد. کمترین بار کمانشی را تعیین کنید.

۳) ستون یک دست دارای انتهای مفصلی به طول L و صلبیت خمشی EI دارای انحنای ابتدایی است به گونه ای که جابجایی جانبی در هر نقطه بین ستون و خط مستقیم بین دو انتها از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\upsilon_0 = a\frac{4x}{L^2}\left(L-x\right)$$

که a جابجایی ابتدایی در میان طول ستون است و مرکز برای x در یک انتها قرار دارد. نشان دهید که بیشینه ممان خمشی ناشی از بار محوری فشاری P از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$M_{\max} = -\frac{8aP}{(\mu L)^2}\left(\sec\frac{\mu L}{2}-1\right) \qquad \mu^2 = \frac{P}{EI}$$

٤) عضوی فشاری از مقطع لوله گرد دارای قطر d و ضخامت t دارای انحنای ابتدایی است به گونه ای که شکل خیزیافته ابتدایی‌ش را می‌توان با عبارت زیر بیان کرد:

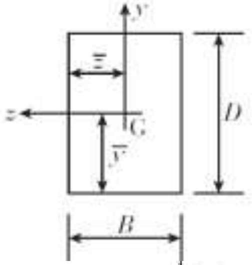
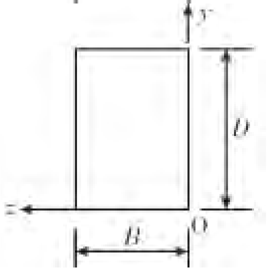
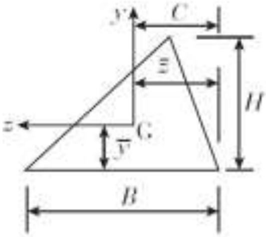
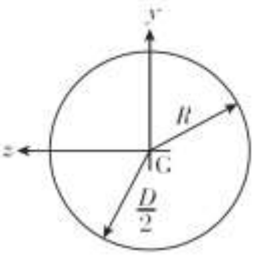
$$\upsilon_0 = \delta \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

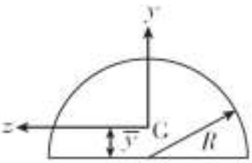
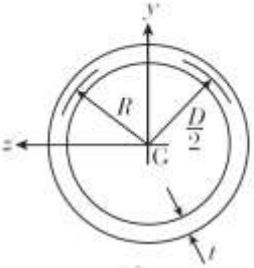
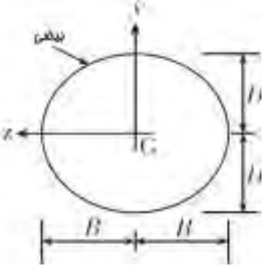
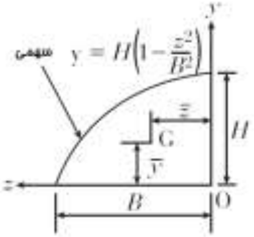
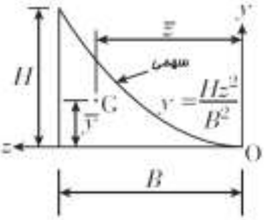
که در آن δ جابجایی در میان دهانه با مرکزیت x در یکی ازانتهاهاست. نشان بدهید که اگر انتهاها مفصلی باشند، بار فشاری P، بیشینه تنش مستقیمی σ_{max} با رابطه زیر القا می‌کند:

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{\pi dt}\left(1+\frac{1}{1-\alpha}\frac{4\delta}{d}\right)$$

که $\alpha = P/P_{CR}$ و $P_{CR} = \pi^2 EI/L^2$ می‌باشد. فرض کنید که t در مقایسه با d کوچک است و بدین ترتیب مساحت سطح مقطع لوله برابر πdt است و ممان دوم سطح آن برابر است با $\pi d^3 t/8$.

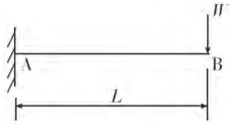
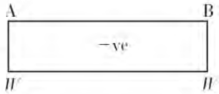
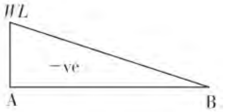
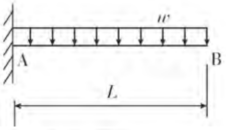
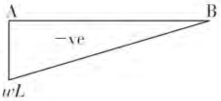
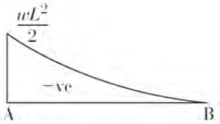
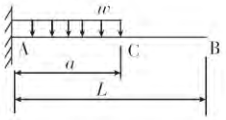
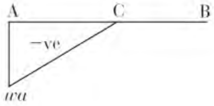
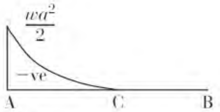
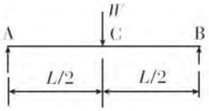
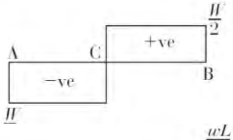
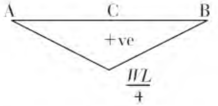
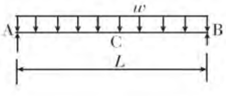
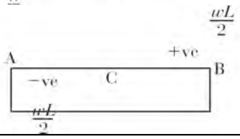
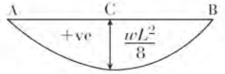
پیوست الف
خصوصیات هندسی مقاطع

مقطع	A	$\bar{z}$	$\bar{y}$	I_z	I_y	I_{zy}
	BD	$\frac{B}{2}$	$\frac{D}{2}$	$\frac{BD^3}{12}$	$\frac{DB^3}{12}$	0
	0	0	0	$\frac{BD^3}{3}$	$\frac{DB^3}{3}$	$\frac{B^2D^2}{4}$
	$\frac{BH}{2}$	$\frac{B+C}{3}$	$\frac{H}{3}$	$\frac{BH^3}{36}$	$\frac{BH^2}{36}\left(B^2+BC+C^2\right)$	$\frac{BH^2}{72}\left(B-2C\right)$
	πR^2			$\frac{\pi R^4}{4}$	$\frac{\pi R^4}{4}$	0

	$\frac{\pi R^2}{2}$		$\frac{4R}{3\pi}$	$\approx 0.11R^4$	$\frac{\pi R^4}{8}$	0
	$2\pi Rt$			$\pi R^3 t$	$\pi R^3 t$	0
	πBD			$\frac{\pi BD^3}{4}$	$\frac{\pi DB^3}{4}$	0
	$\frac{2BH}{3}$	$\frac{3B}{8}$	$\frac{2H}{5}$			
	$\frac{BH}{3}$	$\frac{3B}{4}$	$\frac{3H}{10}$			

پیوست ب

خیز تیرها

تیر	دیاگرام نیروی برشی	دیاگرام گشتاور خمشی	خیز حداکثر
			$\frac{WL^3}{3EI}$
			$\frac{wL^4}{8EI}$
			$\frac{wa^3}{24EI}(4L-a)$
			$\frac{WL^3}{48EI}$
			$\frac{5wL^4}{384EI}$

مراجع:

1. Megson, T.H.G . 1996. *Structural and Stress Analysis,* Butterworth Heinmann
2. Hibbeler, R. C. 2004. *Engineering Mechanics: Statics,* 10th ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
3. Gere, J. M. and Timoshenko, S. P. 1990. *Mechanics of Materials,* 3rd ed. PWS, Boston. Chapter 4 contains a discussion of shear and moment concepts. Beam deflections are covered in Chaps. 7, 8, and 10.
4. Nash, W. A. 1994. *Theory and Problems of Strength of Materials,* 3rd ed., McGraw-Hill, New York. Numerous solved problems for shear and moment are given in Chap. 6.
5. Beer, F. P. and Johnston, E. R., Jr. 1981. *Stress and strain — axial loading and torsion In Mechanics of Materials.*
۶- علیرضایی، مهدی،۱۳۸۶ «*استاتیک*» کاردانی به کارشناسی ، انتشارات اندیشه عصر فارابی